پرسش‌ها و مسئله‌های فصل ۵

۵-۴ انرژی درونی و قانون اول ترمودینامیک

۱) ظرفی شامل ۳/۰kg آب است. با هم زدن آب داخل ظرف، ۴۰kJ کار روی آن انجام می‌دهیم و در این مدت ۳۱kJ گرما از ظرف به بیرون منتقل می‌شود. انرژی درونی آب چقدر تغییر می‌کند؟

طبق قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$W = ۴۰kJ \ , \ Q = -۳۱kJ \ , \ \Delta U = ?$$

$$\Delta U = Q + W = -۳۱ + ۴۰ = ۹kJ \rightarrow \Delta U = ۹kJ$$

۵-۵ برخی فرآیندهای ترمودینامیکی

۲) الف) در فرآیند هم حجم چگونه می‌توان فشار گاز را افزایش یا کاهش داد؟

در فرآیند هم حجم با افزایش دما، فشار گاز افزایش و با کاهش دما، فشار گاز کاهش می‌یابد.

ب) در فرآیند هم فشار چگونه می‌توان حجم گاز را افزایش یا کاهش داد؟

در فرآیند هم‌فشار اگر دما افزایش یابد، حجم گاز افزایش و اگر دما کاهش یابد، حجم گاز کاهش می‌یابد.

۳) ته یک سرنگ را که دسته‌ی آن می‌تواند آزادانه حرکت کند مسدود می‌کنیم، آن را درون مقداری آب می‌اندازیم و آب را به تدریج گرم می‌کنیم. هوای درون سرنگ چه فرآیندی را طی می‌کند؟

فرآیند انبساط هم‌فشار

۴) حجم ۰/۵۰ مول از یک گاز آرمانی تک اتمی ۸/۳ لیتر و فشار آن ۱/۵ اتمسفر است.

الف) مقداری گرما به گاز می‌دهیم تا فشار آن از طریق یک فرآیند هم حجم دو برابر شود. کار و گرمای مبادله شده را برای این فرآیند محاسبه کنید.

$$n = ۰/۵mol, \ \text{گاز تک اتمی} \ , V_۱ = ۸/۳L = ۸/۳ \times ۱۰^{-۳}m^۳ \ , \ P_۱ = ۱/۵atm = ۱/۵ \times ۱۰^۵Pa$$

$$\text{فرایند هم حجم} \ , P_۲ = ۲P_۱ = ۲ \times ۱/۵ \times ۱۰^۵ = ۳ \times ۱۰^۵Pa \ , W = ? \ , Q = ?$$

کارهای انجام شده در فرایند هم حجم صفر است بنابراین: $W = ۰$

گرمای مبادله شده در فرایند هم حجم برابر است با:

$$Q = nC_V\Delta T = n \times \frac{۳}{۲}R(T_۲ - T_۱) = \frac{۳}{۲}(nRT_۲ - nRT_۱) = \frac{۳}{۲}(P_۲V_۲ - P_۱V_۱) \rightarrow Q = \frac{۳}{۲}V\Delta P$$

$$\rightarrow Q = \frac{۳}{۲} \times ۸/۳ \times ۱۰^{-۳} \times (۳ - ۱/۵) \times ۱۰^۵ = ۱۸/۶۷۵ \times ۱۰^۲J \rightarrow Q = ۱/۹ \times ۱۰^۳J$$

ب) اگر به جای گرما دادن به گاز مقداری گرما از گاز بگیریم تا حجم آن در طی یک فرآیند هم فشار نصف شود، کار و گرمای مبادله شده در این فرآیند چقدر می‌شود؟

$$\text{فرایند هم فشار} \ V_۱ = ۸/۳ \times ۱۰^{-۳}m^۳ \ , \ V_۲ = \frac{۱}{۲}V_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۸/۳ \times ۱۰^{-۳} = ۴/۱۵ \times ۱۰^{-۳}m \ , \ W = ? \ , Q = ?$$

کار انجام شده در فرآیند هم‌فشار برابر است با:

$$W = -P\Delta V = -۱/۵ \times ۱۰^۵ \times (۴/۱۵ - ۸/۳) \times ۱۰^{-۳} = +۶/۲۲۵ \times ۱۰^۲J \rightarrow W = ۶/۲ \times ۱۰^۲J$$

گرمای مبادله شده در فرایند هم فشار نیز برابر است با:

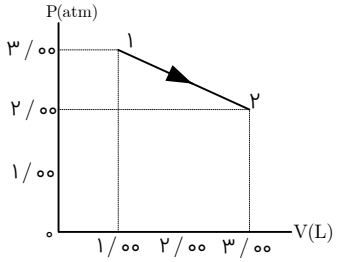
$$Q = nC_p\Delta T = n \times \frac{۵}{۲} \times R(T_۲ - T_۱) = \frac{۵}{۲}(nRT_۲ - nRT_۱) = \frac{۵}{۲}(P_۲V_۲ - P_۱V_۱) \rightarrow Q = \frac{۵}{۲}P\Delta V$$

$$Q = \frac{۵}{۲} \times ۱/۵ \times ۱۰^۵ \times (۴/۱۵ - ۸/۳) \times ۱۰^{-۳} = ۱۵/۵۶۲۵ \times ۱۰^۲J \rightarrow Q = ۱/۶ \times ۱۰^۳ \times ۱۰^۲J$$

نکته: برای گازهای تک‌اتمی گرمای مبادله شده در فرایند هم حجم را می‌توان از رابطه $Q_{\text{هم حجم}} = \frac{۳}{۲}V\Delta P$ و گرمای مبادله شده در فرایند هم فشار را می‌توان از رابطه $Q_{\text{هم فشار}} = \frac{۵}{۲}P\Delta V$ به دست آورد.

نکته: برای گازهای دو اتمی نیز گرمای مبادله شده در فرایند هم حجم از رابطه $Q_{\text{هم حجم}} = \frac{۵}{۲}V\Delta P$ و هم فشار از رابطه $Q_{\text{هم فشار}} = \frac{۷}{۲}P\Delta V$ به دست می‌آید.

۵) نمودار P-Vی گازی رقیق در شکل روبه‌رو نشان داده شده است. در این فرآیند با فرض آنکه انرژی درونی در نقطه‌ی (۱) برابر ۴۵۶J و در نقطه‌ی (۲) برابر ۹۱۲Jباشد، چقدر گرما مبادله شده است؟ آیا گاز گرما گرفته است یا از دست داده است؟



با توجه به انرژی درونی اولیه و نهایی، تغییر انرژی درونی فرایند برابر است با:

$$U_۱ = ۴۵۶J \ , \ U_۲ = ۹۱۲J \rightarrow \Delta U = U_۲ - U_۱ = ۹۱۲ - ۴۵۶ = ۴۵۶J \rightarrow \Delta U = ۴۵۶$$

برای محاسبه گرمای مبادله شده ابتدا باید کار انجام شده در این فرایند را محاسبه کنیم که برابر است با مساحت سطح زیر نمودار P-V:

$$|W|_{\text{چرخه}} = S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع دو قاعده}}{۲} = \frac{(۲+۳)\times ۱۰^{۵} \times (۳-۱)\times ۱۰^{-۳}}{۲} = \frac{۵\times ۱۰^{۵} \times ۲ \times ۱۰^{-۳}}{۲}$$

$$= ۵۰۰ \times ۱۰^{۲} = ۵۰۰J \rightarrow |W| = ۵۰۰J$$

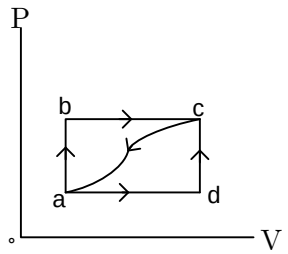
چون در این فرایند گاز منبسط شده علامت کار منفی است: $W = -۵۰۰J$

حال با دانستن تغییر انرژی درونی و کار انجام شده و با استفاده از قانون اول ترمودینامیک، گرمای مبادله شده برابر است با:

$$Q = \Delta U - W = ۴۵۶ - (-۵۰۰) = ۴۵۶ + ۵۰۰ = ۹۵۶J \rightarrow Q = ۹۵۶J$$

علامت Q مثبت است بنابراین گاز در این فرایند گرما گرفته است.

۶) گازی مطابق شکل، از طریق مسیر abc از حالت a به c می‌رود. گاز در این مسیر، ۹۰ ژول گرما می‌گیرد و ۷۰ ژول کار انجام می‌دهد.



الف) تغییر انرژی درونی گاز در مسیر abc چقدر است؟

$$Q = +۹۰J \ , \ W = -۷۰J \rightarrow \Delta U = Q + W = ۹۰ - ۷۰ = ۲۰J \rightarrow \Delta U = ۲۰J$$

ب) اگر برای رسیدن به حالت c فرایند از مسیر adc انجام شود، کار انجام شده توسط گاز در مقایسه با مسیر abc بیشتر است یا کمتر؟ گرمای داده شده به گاز بیشتر است یا کمتر؟

چون مساحت سطح زیر نمودار در مسیر adc کمتر است، قدر مطلق کار نیز در این مسیر کمتر است. نقاط ابتدا و انتهای هر دو مسیر مشترک است پس تغییر انرژی درونی هر دو مسیر یکسان است؛ از طرفی چون گاز در مسیر adc کار کمتری را انجام داده است، گرمای کمتری نیز دریافت کرده است.

پ) اگر گاز را از مسیر خمیده از حالت c به حالت a برگردانیم، چقدر باید از آن انرژی بگیریم؟

انرژی که از گار در مسیر c به a گرفته می‌شود برابر با تغییر انرژی درونی گاز در این مسیر است، بنابراین:

$$\Delta U_{a\to c} = ۲۰J \to \Delta U_{c\to a} = -۲۰J$$

۷) ۱۲/۰g گاز اکسیژن ($O_۲$) در فشار متعارف جو ($۱/۰۱\times۱۰^۵Pa$) از $۲۵/۰°C$ تا $۱۲۵°C$ گرم می‌شود. نسبت تغییر انرژی درونی گاز به گرمای داده شده به آن را به دست آورید.

روش اول:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta U = nC_V\Delta T: \text{تغییر انرژی درونی در هر فرایند}\\ Q = nC_P\Delta T \quad \text{گرمای مبادله شده در فرایند هم فشار:}\end{array}\right\} \to \frac{\Delta U}{Q} = \frac{nC_V\Delta T}{nC_P\Delta T} = \frac{C_V}{C_p} \Rightarrow \frac{\Delta U}{Q} = \frac{۲۱/۲}{۲۹/۴} = ۰/۷۲۱$$

روش دوم: برای اکسیژن داریم:

$$C_V = ۲۱/۲\frac{J}{mol.K}\ ,\ C_p = ۲۹/۴\frac{J}{mol.K}\ ,\ M_{O_۲} = ۳۲\frac{g}{mol}\ ,\ \Delta T = ۱۲۵-۲۵ = ۱۰۰K\ ,\ m = ۱۲g$$

$$n = \frac{m}{M} = \frac{۱۲}{۳۲} = \frac{۳}{۸}mol \to n = \frac{۳}{۸}mol_{n^۲}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta U = nC_V\Delta T = \frac{۳}{۸}\times۲۱/۲\times۱۰۰ = \frac{۶۳۶۰}{۸}J\\ \Delta Q = nC_P\Delta T = \frac{۳}{۸}\times۲۹/۴\times۱۰۰ = \frac{۸۸۲۰}{۸}J\end{array}\right\} \to \frac{\Delta U}{Q} = \frac{\frac{۶۳۶۰}{۸}}{\frac{۸۸۲۰}{۸}} = \frac{۶۳۶۰}{۸۸۲۰} \simeq ۰/۷ \to \frac{\Delta U}{Q} = ۰/۷۲۱$$

۸) یک مکعب آلومینیمی توپُر به ضلع $۲۰/۰cm$ از $۵۰/۰°C$ تا $۱۵۰/۰°C$ در فشار متعارف جو ($۱/۰۱\times۱۰^۵Pa$) گرم می‌شود. کار انجام شده توسط مکعب و تغییر انرژی درونی آن را محاسبه کنید.

$$V_۱ = ۲۰\times۲۰\times۲۰ = ۸۰۰۰cm^۳\ ,\ \Delta T = ۱۵۰-۵۰ = ۱۰۰K\ ,\ P = ۱/۰۱\times۱۰^۵Pa \text{ فشار ثابت است،}$$

$$\alpha_{AL} = ۲۳\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{K}\ ,\ c_{AL} = ۹۰۰\frac{J}{mol.K}\ ,\ \rho_{AL} = ۲/۷\times۱۰^۳\frac{kg}{m^۳}$$

ابتدا تغییر حجم جسم را از رابطه انبساط حجمی جامدها محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta V = V_۱(۳\alpha)\Delta T = ۸۰۰۰\times۳\times۲۳\times۱۰^{-۶}\times۱۰۰ = ۵۵/۲cm^۳ \to \Delta V = ۵۵/۲\times۱۰^{-۶}m^۳$$

کار انجام شده در فرایند هم فشار برابر است با:

$$W = -P\Delta V = -۱/۰۱\times۱۰^۵\times۵۵/۲\times۱۰^{-۶} = -۵/۵۷J \to W = -۵/۵۷J \to \text{کار انجام شده توسط مکعب}$$

برای محاسبه تغییر انرژی درونی مکعب با استفاده از قانون اول ترمودینامیک ($\Delta U = Q + W$) به گرمای داده شده به مکعب نیاز داریم:

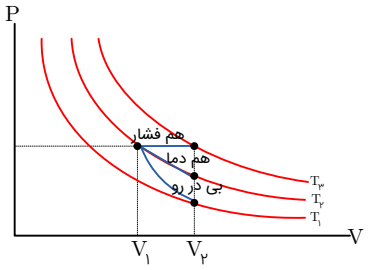
$$\begin{cases} Q = mc_{Al}\Delta\theta = ۲۱/۶\times۹۰۰\times۱۰۰ = ۱۹۴/۴\times۱۰^۴J \to Q = ۱/۹۴\times۱۰^۶J\\ m = \rho V = ۲/۷\times۱۰^۳\times۸۰۰۰\times۱۰^{-۶} = ۲۱/۶kg\end{cases}$$

کار انجام شده توسط مکعب نسبت به گرمای داده شده به آن بسیار ناچیز است؛ بنابراین با صرف‌نظر کردن از کار انجام شده توسط مکعب داریم:

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{W=۰} \Delta U = Q = ۱/۹۴\times۱۰^۶J$$

نتیجه: در جامدها تقریباً همه‌ی گرمای داده شده به جسم صرف تغییر انرژی درونی آن می‌شود.

۹) مطابق شکل روبه‌رو، حجم گازی آرمانی طی سه فرآیند هم‌فشار، هم دما و بی دررو از V_1 به حجم بزرگ‌تر V_2 می‌رسد.



الف) اندازه‌ی کار انجام شده توسط گاز را در این سه فرآیند مقایسه کنید.

با توجه به مساحت سطح زیر نمودار در سه فرایند داریم:

$$|W_{\text{هم فشار}}| > |W_{\text{هم دما}}| > |W_{\text{بی دررو}}|$$

ب) دمای نهایی را در این فرآیندها مقایسه کنید.

مطابق نمودار $T_3 > T_2 > T_1$ بنابراین:

$$T_{f\,\text{هم فشار}} > T_{f\,\text{هم دما}} > T_{\text{بی دررو}}$$

پ) گرمای داده شده به گاز را در این فرآیندها مقایسه کنید.

در فرایند بی در رو= $Q_{\text{بی در رو}}$

در فرایند هم دما داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta U = 0 \Rightarrow Q = -W \\ \text{فرایند انبساط} \Rightarrow W < 0\end{array}\right\} \Rightarrow Q_{\text{هم دما}} > 0$$

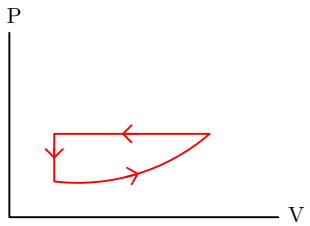
در فرایند هم فشار داریم:

$$Q_{\text{هم فشار}} = nC_P\Delta T = \frac{C_P}{R}nR\Delta T = \frac{C_P}{R}P\Delta V = \frac{C_P}{R}|W_{\text{هم فشار}}|$$

$$\left.\begin{array}{l}Q_{\text{هم فشار}} = \frac{C_P}{R}|W_{\text{هم فشار}}| \\ Q_{\text{هم دما}} = |W_{\text{هم دما}}|\end{array}\right\} \xrightarrow[\frac{C_P}{R} > 1]{|W_{\text{هم فشار}}| > |W_{\text{هم دما}}|} Q_{\text{هم فشار}} > Q_{\text{هم دما}} > Q_{\text{بی در رو}} = 0$$

۶-۵ چرخه‌ی ترمودینامیکی

۱۰) برای چرخه‌ی گازی که نمودار P-Vی آن در اینجا نشان داده شده است، ΔU گاز، W و Q مثبت است یا منفی و یا برابر صفر است؟

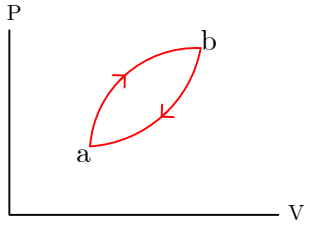


تغییر انرژی درونی در یک چرخه صفر است بنابراین $\Delta U = 0$

چرخه پادساعتگرد است بنابراین کار انجام شده در چرخه مثبت است (W مثبت)

در چرخه: $\Delta U = 0 \rightarrow Q + W = 0 \rightarrow Q = -W \rightarrow Q < 0$

۱۱) شکل روبه‌رو چرخه‌ای را نشان می‌دهد که یک گاز طی کرده است.



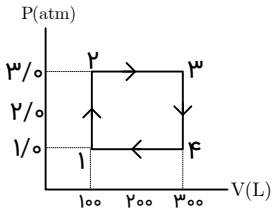
الف) تعیین کنید که گاز در این چرخه گرما گرفته یا از دست داده است؟

چرخه ساعتگرد $\rightarrow W < ۰ \xrightarrow{Q=-W} Q > ۰ \rightarrow$ گاز گرما گرفته است.

ب) اگر مقدار گرمای مبادله شده در این چرخه ۴۰۰J باشد، کار انجام شده روی گاز چقدر است؟

$Q = -W \rightarrow W = -Q = -۴۰۰ \rightarrow W = -۴۰۰J$ ،درچرخه، $Q = ۴۰۰J$

۱۲) یک گاز کامل دو اتمی چرخه‌ی نشان داده شده در شکل زیر را می‌پیماید. دمای گاز در حالت (۱) برابر ۲۰۰K است.



الف) دما در سه‌نقطه‌ی دیگر چقدر است؟

$$\frac{P_۱V_۱}{T_۱} = \frac{P_۲V_۲}{T_۲} \xrightarrow{\text{فرایند ۱ به ۲ هم حجم}} \frac{P_۱}{T_۱} = \frac{P_۲}{T_۲} \rightarrow \frac{۱}{۲۰۰} = \frac{۳}{T_۲} \rightarrow T_۲ = ۶۰۰K$$

$$\frac{P_۲V_۲}{T_۲} = \frac{P_۳V_۳}{T_۳} \xrightarrow{\text{فرایند ۲ به ۳ هم فشار}} \frac{V_۲}{T_۲} = \frac{V_۳}{T_۳} \rightarrow \frac{۱۰۰}{۶۰۰} = \frac{۳۰۰}{T_۳} \rightarrow T_۳ = ۱۸۰۰K$$

$$\frac{P_۳V_۳}{T_۳} = \frac{P_۴V_۴}{T_۴} \xrightarrow{\text{فرایند ۳ به ۴ هم حجم}} \frac{P_۳}{T_۴} = \frac{P_۴}{T_۴} \rightarrow \frac{۳}{۱۸۰۰} = \frac{۱}{T_۴} \rightarrow T_۴ = ۶۰۰K$$

ب) کار انجام شده در چرخه چقدر است؟

$$|W| = S = (۳-۱)\times ۱۰^۵ \times (۳۰۰-۱۰۰)\times ۱۰^{-۳} = ۲\times ۱۰^۵ \times ۲۰۰ \times ۱۰^{-۳} = ۴۰۰ \times ۱۰^۲ J = ۴\times ۱۰^۴ J$$

چرخه ساعتگرد $\rightarrow W = -۴\times ۱۰^۴ J$

پ) در چه فرآیندهایی گاز گرما گرفته است؟

با توجه به رابطه‌های $Q = nC_V\Delta T$ هم‌حجم و $Q = nC_P\Delta T$ هم فشار، در فرایندهای هم‌حجم و هم‌فشار گرمای مبادله شده با افزایش دما مثبت و با کاهش دما منفی است بنابراین:

فرایند ۱ به ۲ $\xrightarrow{\text{افزایش دما}}$ $Q > ۰ \rightarrow$ گاز گرما گرفته است

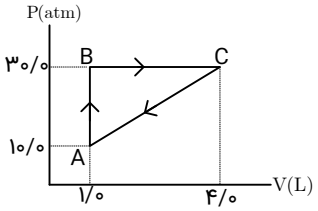
فرایند ۲ به ۳ $\xrightarrow{\text{افزایش دما}}$ $Q > ۰ \rightarrow$ گاز گرما گرفته است

ت) در چه فرآیندهایی گاز گرما از دست داده است؟

فرایند ۳ به ۴ $\xrightarrow{\text{کاهش دما}}$ $Q < ۰ \rightarrow$ گاز گرما از دست داده است.

فرایند ۴ به ۱ $\xrightarrow{\text{کاهش دما}}$ $Q < ۰ \rightarrow$ گاز گرما از دست داده است.

۱۳) گاز داخل یک استوانه، چرخه‌ای مطابق شکل روبه‌رو را می‌پیماید، گرمای بادله شده در این چرخه چند ژول است؟



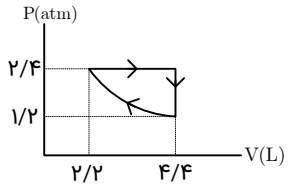
با توجه به اینکه در یک چرخه Q=-W برای محاسبه گرمای مبادله شده در یک چرخه باید کار انجام شده در چرخه را محاسبه کنیم:

$$|W_{\text{چرخه}}| = S_{\text{مثلث}} = \frac{(۳۰-۱۰)\times ۱۰^{۵}\times(۴-۱)\times ۱۰^{-۳}}{۲} = \frac{۲۰\times ۱۰^{۵}\times ۳\times ۱۰^{-۳}}{۲} = ۳۰۰۰J$$

$$\xrightarrow{\text{چرخه ساعتگرد}} W = -۳۰۰۰J$$

$$Q = -W = -(-۳۰۰۰) = +۳۰۰۰J \rightarrow Q = ۳۰۰۰J$$

۱۴) دستگاهی متشکل از ۰/۳۲mol گاز کامل تک اتمی حجمی برابر ۲/۲L را در فشار ۲/۴atm اشغال کرده است. این دستگاه چرخه‌ای مطابق شکل را می‌پیماید که در آن فرآیند CA فرآیندی هم دما است.



الف) دما در نقاط B، A و C چقدر است.

$$n = ۰/۳۲mol\ ,\ R \simeq ۸\frac{J}{mol.K}$$

در نقطه A : $P_AV_A = nRT_A \rightarrow T_A = \frac{P_AV_A}{nR} = \frac{۲/۴\times ۱۰^{۵}\times ۲/۲\times ۱۰^{-۳}}{۰/۳۲\times ۸} = ۲۰۶/۲۵K$

فرایند A به B هم فشار $\frac{P_AV_A}{T_A} = \frac{P_BV_B}{T_B} \rightarrow \frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \rightarrow \frac{۲/۲}{۲۰۶/۲۵} = \frac{۴/۴}{T_B}$

$$\rightarrow T_B = \frac{۴/۴\times ۲۰۶/۲۵}{۲/۲} = ۴۱۲/۵K \rightarrow T_B = ۴۱۲/۵K$$

فرایند B به C هم حجم $\frac{P_BV_B}{T_B} = \frac{P_CV_C}{T_C} \rightarrow \frac{P_B}{T_B} = \frac{P_C}{T_C} \rightarrow \frac{۲/۴}{۴۱۲/۵} = \frac{۱/۲}{T_C}$

$$\rightarrow T_C = \frac{۴۱۲/۵\times ۱/۲}{۲/۴} = ۲۰۶/۲۵K \rightarrow T_C = ۲۰۶/۲۵K$$

ب) ΔU را برای هر یک از سه فرآیند چرخه به دست آورید.

تغییر انرژی درونی در همه فرایندها از رابطه $\Delta U = nC_V\Delta T$ به دست می‌آید:

$$n = ۰/۳۲mol\ ,\ C_V = \frac{۳}{۲}R$$

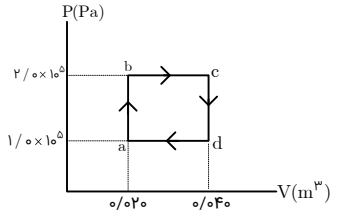
$$\Delta U_{AB} = nC_V(T_B - T_A) = ۰/۳۲\times\frac{۳}{۲}\times ۸\times(۴۱۲/۵ - ۲۰۶/۲۵) = ۷۹۲J \rightarrow \Delta U_{AB} = ۷۹۲J$$

$$\Delta U_{BC} = nC_V(T_C - T_B) = ۰/۳۲\times\frac{۳}{۲}\times ۸\times(۲۰۶/۲۵ - ۴۱۲/۵) = -۷۹۲J \rightarrow \Delta U_{BC} = -۷۹۲J$$

فرایند CA هم دما است. $\rightarrow \Delta U_{CA} = ۰$

۵-۷ ماشین‌های گرمایی

۱۵) یک مول از یک گاز کامل تک اتمی در یک ماشین گرمایی آرمانی، چرخه‌ای را مطابق شکل روبه‌رو می‌پیماید. مطلوب است:



الف) کار انجام شده توسط ماشین گرمایی در پیمودن یک چرخه.

کار انجام شده در یک چرخه برابر است با مساحت داخل چرخه بنابراین:

$$|W_{\text{چرخه}}| = S = (۲-۱)\times ۱۰^{۵}\times(۰/۰۴-۰/۰۲) = ۲۰۰۰ \xrightarrow[\text{چرخه ساعتگرد}]{} W = -۲۰۰۰J$$

ب) گرمای مبادله شده در فرآیند abc.

$$Q_{abc} = Q_{ab} + Q_{bc}$$

فرایند ab هم‌حجم است. $\rightarrow Q_{ab} = \frac{۳}{۲}V\Delta P = \frac{۳}{۲}\times ۰/۰۲\times(۲-۱)\times ۱۰^{۵} = ۳۰۰۰J \rightarrow ۳/۰kJ$

فرایند bc هم‌فشار است. $\rightarrow Q_{bc} = \frac{۵}{۲}P\Delta V = \frac{۵}{۲}\times ۲\times ۱۰^{۵}\times(۰/۰۴-۰/۰۲) = ۱۰۰۰۰J \rightarrow Q_{bc} = ۱۰kJ$

$$\rightarrow Q_{abc} = ۳/۰+۱۰ = ۱۳kJ \rightarrow Q_{abc} = ۱۳kJ$$

پ) گرمای مبادله شده در فرایند cda

$$Q_{cda} = Q_{cd} + Q_{da}$$

فرایند cd هم‌حجم است. $\rightarrow Q_{cd} = \frac{۳}{۲}\times V\Delta P = \frac{۳}{۲}\times ۰/۰۴\times(۱-۲)\times ۱۰^{۵} = -۶۰۰۰J \rightarrow Q_{cd} = -۶/۰kJ$

فرایند bc هم‌فشار است. $Q_{da} = \frac{۵}{۲}P\Delta V = \frac{۵}{۲}\times ۱\times ۱۰^{۵}\times(۰/۰۲-۰/۰۴) = -۵۰۰۰J \rightarrow Q_{da} = -۵/۰kJ$

$$\rightarrow Q_{cda} = -۶/۰-۵/۰ = -۱۱kJ \rightarrow Q_{cda} = -۱۱kJ$$

ت) تغییر انرژی درونی در فرآیند abc

$$\Delta U_{abc} = \Delta U_{ab} + \Delta U_{bc} = (Q_{ab}+W_{ab}) + (Q_{bc}+W_{bc})$$

فرایند ab هم‌حجم است. $\rightarrow W_{ab} = ۰$

فرایند bc هم‌فشار است. $\rightarrow W_{bc} = -P\Delta V = -۲\times ۱۰^{۵}\times(۰/۰۴-۰/۰۲) = -۴/۰kJ \rightarrow W_{bc} = -۴kJ$

$$\Delta U_{abc} = (۳/۰+۰)+(۱۰-۴/۰) = ۹/۰kJ \rightarrow \Delta U_{abc} = ۹/۰kJ$$

۱۶) یک ماشین گرمایی آرمانی در هر چرخه $۱۰۰/۰J$ گرما از منبع دما بالا می‌گیرد و $۶۰/۰J$ گرما به منبع دما پایین می‌دهد.

الف) بازده این ماشین چقدر است؟

$$Q_H = ۱۰۰J \;,\; Q_L = -۶۰J \;,\; t = ۰/۵s \;,\; \eta = ? \;,\; P = ?$$

$$\eta = ۱-\frac{|Q_L|}{Q_H} = ۱-\frac{۶۰}{۱۰۰} = ۱-۰/۶ = ۰/۴ \rightarrow \eta = ۴۰\%$$

ب) اگر هر چرخه $۰/۵۰۰s$ طول بکشد، توان خروجی این ماشین چقدر است؟

$$|W| = Q_H - |Q_L| = ۱۰۰-۶۰ = ۴۰J \;,\; P = \frac{|W|}{t} = \frac{۴۰}{۰/۵} = ۸۰W \rightarrow P = ۸۰W$$

۱۷) بازده‌ی یک ماشین آرمانی ۲۵/۰ درصد است و در هر چرخه $۸/۲\times۱۰^{۳}J$ کار انجام می‌دهد.

الف) Q_H و $|Q_L|$ را در هر چرخه ماشین به دست آورید.

$$\eta=\frac{۲۵}{۱۰۰}=۰/۲۵\ ,\ |W|=۸/۲\times۱۰^{۳}J\ ,\ Q_H=?\ ,\ Q_L=?$$

$$\eta=\frac{|W|}{Q_H}\rightarrow Q_H=\frac{|W|}{\eta}=\frac{۸/۲\times۱۰^{۳}}{۰/۲۵}=۳۲/۸\times۱۰^{۳}J\rightarrow Q_H=۳۲/۸\times۱۰^{۳}$$

$$Q_H=|W|+|Q_L|\rightarrow|Q_L|=Q_H-|W|=۳۲/۸\times۱۰^{۳}-۸/۲\times۱۰^{۳}=۲۴/۶\times۱۰^{۳}\rightarrow|Q_L|=۲۴/۶\times۱۰^{۳}J$$

ب) اگر با تنظیم موتور، بازده‌ی ماشین به ۳۰/۰ درصد افزایش یابد، Q_H و $|Q_L|$ به ازای همان مقدار کار چقدر می‌شود؟

$$\eta=\frac{۳۰}{۱۰۰}=۰/۳\ ,\ |W|=۸/۲\times۱۰^{۳}J\ ,\ Q_H=?\ ,\ Q_L=?$$

$$\eta=\frac{|W|}{Q_H}\rightarrow Q_H=\frac{|W|}{\eta}=\frac{۸/۲\times۱۰^{۳}}{۰/۳}\simeq۲۷/۳\times۱۰^{۳}J\rightarrow Q_H\simeq۲۷/۳\times۱۰^{۳}J$$

$$|Q_L|=Q_H-|W|=۲۷/۳\times۱۰^{۳}-۸/۲\times۱۰^{۳}=۱۹/۱\times۱۰^{۳}J\rightarrow|Q_L|=۱۹/۱\times۱۰^{۳}J$$

۱۸) یک ماشین‌بخار در هر دقیقه $۱/۵\times۱۰^{۵}MJ$ گرما از دیگ بخار دریافت می‌کند و $۹/۰\times۱۰^{۴}MJ$ گرما در چگالنده از دست می‌دهد. با فرض آرمانی بودن این ماشین:

الف) کار انجام شده توسط ماشین در هر دقیقه چند مگاژول است؟

$$Q_H=۱/۵\times۱۰^{۵}MJ\ ,\ |Q_L|=۹\times۱۰^{۴}MJ=۰/۹\times۱۰^{۵}MJ\ ,\ |W|=?$$

$$|W|=Q_H-|Q_L|=۱/۵\times۱۰^{۵}-۰/۹\times۱۰^{۵}=۰/۶\times۱۰^{۵}MJ\rightarrow|W|=۶\times۱۰^{۴}MJ$$

ب) بازده این ماشین چقدر است؟

$$\eta=\frac{|W|}{Q_H}=\frac{۶\times۱۰^{۴}}{۱/۵\times۱۰^{۵}}=۰/۴=۴۰\%\rightarrow\eta=۴۰\%$$

۱۹) یک ماشین گرمایی درون‌سوز در هر چرخه $۸/۰۰kJ$ گرما از سوزاندن سوخت دریافت می‌کند و $۲/۰۰kJ$ کار تحویل می‌دهد. گرمای حاصل از سوخت $۵/۰\times۱۰^{۴}J/g$ است و ماشین در هر ثانیه ۴۰/۰ چرخه را می‌پیماید. کمیت‌های زیر را حساب کنید.

الف) بازده ماشین.

$$Q_H=۸kJ=۸\times۱۰^{۳}J\ ,\ |W|=۲kJ=۲\times۱۰^{۳}J,\ \text{گرمای سوختن}=۵\times۱۰^{۴}\frac{J}{g}\ \text{هر ثانیه ۴۰ چرخه،}$$

$$\eta=\frac{|W|}{Q_H}=\frac{۲\times۱۰^{۳}}{۸\times۱۰^{۳}}=۰/۲۵\rightarrow\eta=۲۵\%$$

ب) با فرض آرمانی بودن ماشین، گرمای تلف شده در هر چرخه.

$$|Q_L|=Q_H-|W|=۸\times۱۰^{۳}-۲\times۱۰^{۳}=۶\times۱۰^{۳}J\rightarrow|Q_L|=۶\times۱۰^{۳}J$$

پ) سوخت مصرف شده در هر چرخه.

$$\frac{۱}{x}=\frac{۵\times۱۰^{۴}}{۸\times۱۰^{۳}}\rightarrow x=\frac{۸\times۱۰^{۳}}{۵\times۱۰^{۴}}=۰/۱۶g\rightarrow x=۰/۱۶g$$

ت) توان ماشین.

$$|W|=۴۰\times۲\times۱۰^{۳}=۸\times۱۰^{۴}\ ,\ t=۱S\ ,\ P=\frac{|W|}{t}\rightarrow P=\frac{۸\times۱۰^{۴}}{۱}=۸\times۱۰^{۴}W\ \text{توان ماشین}$$

۸-۵ قانون دوم ترمودینامیک (به بیان ماشین گرمایی)

۲۰) مخترعی مدعی است ماشینی ساخته که بین نقطه‌های جوش (در فشار متعارف جو) و انجماد کار می‌کند و بازده‌ی آن ۷۰/۰ درصد است. آیا ادعای این مخترع می‌تواند درست باشد؟ توضیح دهید.

بازده کارنوی ماشین گرمایی که بین این دو دما کار می‌کند را بدست می‌آوریم:

$$T_H = ۱۰۰ + ۲۷۳ = ۳۷۳K \quad , \quad T_L = ۰ + ۲۷۳ = ۲۷۳K \quad , \quad \eta = ?$$

$$\eta = ۱ - \frac{T_L}{T_H} = ۱ - \frac{۲۷۳}{۳۷۳} = ۱ - ۰/۷۳ = ۰/۲۷ \rightarrow \eta = ۲۷\%$$

با توجه به اینکه حداکثر بازده ماشین گرمایی که بین این دماها کار می‌کند، ۲۷ درصد است، ادعای این مخترع نادرست است.

۲۱) می‌خواهیم بازده یک ماشین کارنو را افزایش دهیم. با مثالی عددی بررسی کنید آیا بهتر است که دمای منبع دما بالا را افزایش دهیم یا دمای منبع دما پایین را به همان مقدار کاهش دهیم؟

با فرض $T_H = ۴K$ و $T_L = ۲K$ بازده کارنو برابر است با:

$$\text{کارنو} \quad \eta = ۱ - \frac{T_L}{T_H} = ۱ - \frac{۲}{۴} = ۰/۵$$

اگر دمای منبع بالا را یک درجه افزایش دهیم داریم:

$$\text{کارنو} \quad \eta = ۱ - \frac{۲}{۴+۱} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$

اگر دمای منبع پایین را یک درجه کاهش دهیم داریم:

$$\text{کارنو} \quad \eta = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$$

با توجه به نتایج به دست آمده در مثال فوق برای افزایش بازده ماشین کارنو بهتر است دمای منبع دما پایین را کاهش دهیم.

۲۲) مخترعی ادعا می‌کند چهار ماشینساخته است که هر یک بین منبع‌های با دمای ۳۰۰K و ۴۰۰K کار می‌کنند. داده‌های هر ماشین در هر چرخه عبارت‌اند از:

ماشین A	$Q_H = ۲۰۰۰J$	$Q_L = -۱۷۵۰J$	$W = -۴۰J$
ماشین B	$Q_H = ۵۰۰J$	$Q_L = -۲۰۰J$	$W = -۴۰۰J$
ماشین C	$Q_H = ۶۰۰J$	$Q_L = -۲۰۰J$	$W = -۴۰۰J$
ماشین D	$Q_H = ۱۰۰J$	$Q_L = -۹۰J$	$W = -۱۰J$

با فرض آرمانی بودن این چهار ماشین:

الف) کدام یک از ماشین‌ها قانون اول ترمودینامیک را نقض می‌کنند؟

قانون اول ترمودینامیک همان قانون اول پایستگی انرژی است یعنی در هر ماشین گرمایی $Q_H = |Q_L| + |W|$ بنابراین:

$$\text{ماشین A} : \begin{cases} |Q_L| + |W| = ۱۷۵۰ + ۴۰ = ۱۷۹۰J \\ Q_H = ۲۰۰۰J \end{cases} \rightarrow Q_H \neq |Q_H| + |W| \rightarrow \text{قانون اول نقض می‌شود}$$

$$\text{ماشین B} : \begin{cases} |Q_L| + |W| = ۴۰۰ + ۲۰۰ = ۶۰۰J \\ Q_H = ۵۰۰J \end{cases} \rightarrow Q_H \neq |Q_L| + |W| \rightarrow \text{قانون اول نقض می‌شود}$$

$$\text{ماشین C} : \begin{cases} |Q_L| + |W| = ۴۰۰ + ۲۰۰ = ۶۰۰J \\ Q_H = ۶۰۰J \end{cases} \rightarrow Q_H = |Q_L| + |W| \rightarrow \text{قانون اول برقرار است}$$

$$\text{ماشین D} : \begin{cases} |Q_L| + |W| = ۱۰ + ۹۰ = ۱۰۰J \\ Q_H = ۱۰۰J \end{cases} \rightarrow Q_H = |Q_L| + |W| \rightarrow \text{قانون اول برقرار است}$$

ب) کدام یک از ماشین‌ها قابل ساخت هستند؟

حداکثر بازده یک ماشین گرمایی که بین دو منبع گرم و سرد با دمای ۳۰۰K و ۴۰۰K کار می‌کند برابر است با:

$$\text{کارنو}\ \eta = ۱ - \frac{T_L}{T_H} = ۱ - \frac{۳۰۰}{۴۰۰} = \frac{۱}{۴} = ۰/۲۵ \rightarrow \eta = ۰/۲۵$$

بازده ماشین‌های C و Dرا محاسبه کرده و با بازده کارنو مقایسه می‌کنیم، ماشینی قابل ساخت است که در آن هم قضیه کارنو و هم قانون اول ترمودینامیک برقرار باشد:

$$\eta_C = ۱ - \frac{|Q_L|}{|Q_H|} = ۱ - \frac{۲۰۰}{۶۰۰} = ۱ - ۰/۳۳ = ۰/۶۷ \rightarrow \eta_C > \eta \rightarrow$$ قضیه کارنو برقرار نیست:

$$\eta_D = ۱ - \frac{|Q_L|}{|Q_H|} = ۱ - \frac{۹۰۰}{۱۰۰} = ۱ - ۰/۹ = ۰/۱ \rightarrow \eta_D < \eta \rightarrow$$ قضیه کارنو برقرار است:

۲۳) یک ماشین کارنو بین دماهای $۲۸۰/۰K$ و $۳۶۰/۰K$ کار می‌کند. این ماشین در هر چرخه $۷۵۰/۰J$ گرما از منبع دما بالا می‌گیرد.

الف) در هر چرخه $|W|$ چقدر است؟

$$T_L = ۲۸۰K\ ,\ T_H = ۳۶۰K\ ,\ Q_H = ۷۵۰J\ ,\ |W| = ?\ ,\ |Q_L| = ?$$

$$\text{کارنو}\ \eta = ۱ - \frac{T_L}{T_H} = ۱ - \frac{۲۸۰}{۳۶۰} = ۱ - \frac{۲۸}{۳۶} = \frac{۸}{۳۶} = \frac{۲}{۹}$$

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} \rightarrow |W| = \eta Q_H = \frac{۲}{۹} \times ۷۵۰ = \frac{۵۰۰}{۳} \rightarrow |W| = \frac{۵۰۰}{۳} J$$

ب) در هر چرخه چقدر گرما به منبع دما پایین داده می‌شود؟

$$|Q_L| = Q_H - |W| \rightarrow |Q_L| = ۷۵۰ - \frac{۵۰۰}{۳} = \frac{۱۷۵۰}{۳} \rightarrow |Q_L| = \frac{۱۷۵۰}{۳} J$$

۹-۵ قانون دوم ترمودینامیک و یخچال‌ها

۲۴) قرار است نیم‌ساعت دیگر مهمانی برای شما برسد در حالی که هیچی یخی را برای نوشابه‌ی خود آماده نکرده‌اید. به سرعت $۱/۰۰L$ آبِ $۱۰/۰°C$ را در قالب‌های یخ می‌ریزید و در فریزر قرار می‌دهید. آیا در زمانی که مهمان می‌رسد، یخ خواهید داشت؟ ضریب عملکرد یخچال ۴/۰ و توان آن $۱۱۰/۰W$ است. (فرض کنید همه‌ی توان الکتریکی یخچال صرف سرد کردن ویخ زدن آب می‌شود.)

$$V = ۱L = ۱ \times ۱۰^{-۳} m^۳\ ,\ c_{\text{آب}} = ۴۲۰۰ \frac{J}{kg.K}\ ,\ L_{F_{\text{یخ}}} = ۳۳۳/۷ \times ۱۰^۳ \frac{J}{kg}\ ,\ \rho_{\text{آب}} = ۱۰۰۰ \frac{kg}{m^۳}$$

$$K = ۴\ ,\ P = ۱۱۰W\ ,\ t = ?$$

با استفاده از رابطه $\rho = \frac{m}{V}$ جرم آب را محاسبه می‌کنیم:

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow m = \rho V = ۱۰۰۰ \times ۱ \times ۱۰^{-۳} = ۱kg \rightarrow m = ۱kg$$

مقدار گرمایی که ۱kg آب $۱۰°C$ از دست می‌دهید تا به یخ $۰°C$ تبدیل شود به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Q = mc\Delta\theta - mL_F = ۱ \times ۴۲۰۰ \times (۰ - ۱۰) - (۱ \times ۳۳۳/۷ \times ۱۰^۳)$$

$$= -۴۲۰۰ - ۳۳۳۷۰۰ = -۳۷۵۷۰۰ \rightarrow |Q_L| = ۳۷۵۷۰۰J$$

کاری که یخچال از آب برای یخ زدن می‌گیرد:

کاری که یخچال برای یخ‌زدن آب انجام می‌دهد:

$$K = \frac{|Q_L|}{W} \rightarrow W = \frac{|Q_L|}{K} = \frac{۳۷۵۷۰۰}{۴} = ۹۳۹۲۵J \rightarrow W = ۹۳۹۲۵J$$

زمانی که طول می‌کشد تا آب یخ بزند:

$$P = \frac{W}{t} \rightarrow t = \frac{W}{P} = \frac{۹۳۹۲۵}{۱۱۰} = ۸۵۳S \rightarrow t \simeq ۱۴\,min$$

با توجه به اینکه تقریباً ۱۴ دقیقه طول می‌کشد تا همه آب به یخ $۰°C$ تبدیل شود زمان کافی برای درست کردن یخ خواهیم داشت.

۲۵) یک کولر گازی در هر دقیقه $۹/۰\times۱۰^۴J$ گرما از اتاق می‌گیرد و در همان مدت $۱/۳\times۱۰^۵J$ گرما به فضای بیرون می‌دهد. با فرض آرمانی بودن کولر،

الف) توان مصرفی این کولر چند وات است؟

$$t = ۶۰s \quad , \quad |Q_L| = ۹\times۱۰^۴J \quad , \quad Q_H = ۱۳\times۱۰^۴J \quad , \quad P = ? \quad , \quad K = ?$$

برای بدست آوردن توان مصرفی کولر ابتدا باید کار انجام شده توسط کولر را محاسبه کرد:

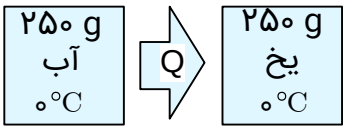
در یخچال‌ها : $|Q_H| = Q_L + W \rightarrow W = |Q_H| - Q_L = ۱۳\times۱۰^۴ - ۹\times۱۰^۴ = ۴\times۱۰^۴J \rightarrow W = ۴\times۱۰^۴J$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{۴\times۱۰^۴}{۶۰} = \frac{۲}{۳}\times۱۰^۳W \rightarrow P = \frac{۲}{۳}\times۱۰^۳W$$ توان مصرفی کولر

ب) ضریب عملکرد آن چقدر است؟

$$K = \frac{|Q_L|}{W} = \frac{۹\times۱۰^۴}{۴\times۱۰^۴} = ۲/۲۵ \rightarrow K = ۲/۲۵$$ ضریب عملکرد کولر

۲۶) فرض کنید $۲۵۰/۰g$ آب صفر درجه سلسیوس در اختیار داریم. می‌خواهیم با قرار دادن این آب در یخچال، یخ تهیه کنیم. یخچال در اتاقی قرار دارد که دمای آن $۲۲/۰°C$ است. دمای داخل یخچال در $-۵/۰°C$ ثابت نگه داشته شده است. کمترین مقدار انرژی الکتریکی که باید به یخچال داده شود تا یخ صفر درجه‌ی سلسیوس تشکیل شود، چقدر است؟



$$m = ۲۵۰g = ۰/۲۵kg \quad , \quad T_H = ۲۲ + ۲۷۳ = ۲۹۵K \quad , \quad T_L = -۵ + ۲۷۳ = ۲۶۸K \quad , \quad W = ?$$

یخ $۳۳۳/۷\times۱۰^۳ \frac{J}{kg}$

$$Q_L = -mL_F = -۰/۲۵\times۳۳۳/۷\times۱۰^۳ = -۸۳۴۲۵J \rightarrow Q_L = ۸۳۴۲۵J$$

کمترین مقدار انرژی داده شده به یخچال زمانی است که یخچال بیشترین بازده را داشته باشد: کارنو=K

ضریب عملکرد یخچال:

$$K_{\text{کارنو}} = \frac{T_L}{T_H - T_L} = \frac{۲۶۸}{۲۹۵ - ۲۶۸} = \frac{۲۶۸}{۲۷} \simeq ۱۰ \rightarrow K_{\text{کارنو}} = K = ۱۰$$

$$K = \frac{|Q_L|}{W} \rightarrow W = \frac{|Q_L|}{K} = \frac{۸۳۴۲۵}{۱۰} = ۸۳۴۲/۵J \rightarrow W = ۸۳۴۲/۵J$$