

فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

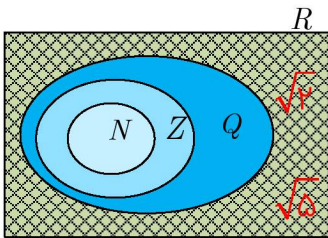
درس اول: مجموعه های متناهی و نامتناهی

صفحه ۲

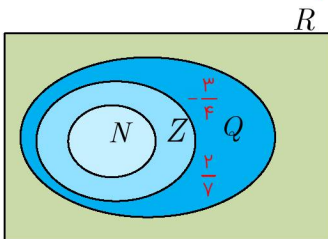
کار در کلاس



الف) مجموعه  $R - Q$  چه نام دارد؟ آن را روی شکل مقابل هاشور بزنید و دو عضو دلخواه از آن را در ناحیه ی هاشور خورده بنویسید. مجموعه اعداد گنگ نام دارد و با  $Q$  نمایش داده می شود.

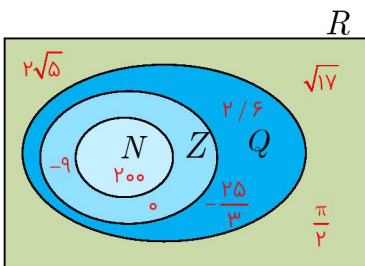


ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشند و آنها را روی شکل مقابل در محل مناسب بنویسید.  $\frac{2}{7}, \frac{3}{4}$



پ) اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید.

$$\sqrt{17}, 0, 200, \frac{\pi}{2}, 2/6, 2\sqrt{5}, -\frac{25}{3}, -9$$

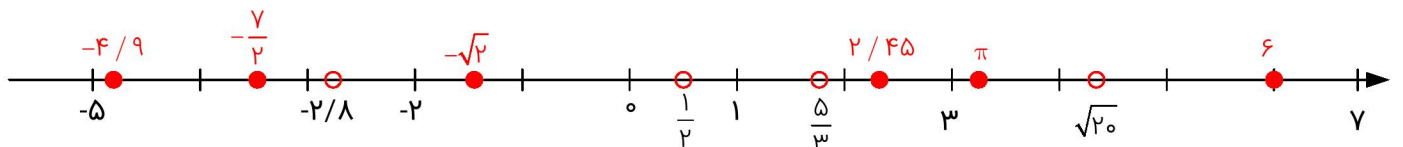


ت) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی را با نمایش اعضا بنویسید.  $Z - W = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$

ث) مجموعه ی  $W - N = \{0\}$  چند عضو دارد؟ فقط یک عضو دارد و آن عدد صفر است.

۲) هر یک از اعداد داده شده را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید. کدام یک از این شش عدد گنگ اند؟ زیر آنها خط بکشید.

$$2/45, \frac{-7}{2}, 6, -4/9, \pi, \underline{\underline{-\sqrt{2}}}$$



اعداد  $-\sqrt{2}$  و  $\pi$  اعدادی گنگ هستند.



اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که  $a < b$  آنگاه جدول زیر را کامل کنید:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه ای	نمایش هندسی
باز	$(a, b)$	$\{x \in R \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم باز	$[a, b)$	$\{x \in R \mid a \leq x < b\}$	
نیم باز	$(a, b]$	$\{x \in R \mid a < x \leq b\}$	
نیم باز	$(1, 5]$	$\{x \in R \mid 1 < x \leq 5\}$	
نیم باز	$[-3, 2)$	$\{x \in R \mid -3 \leq x < 2\}$	



اگر  $a$  عدد حقیقی دلخواهی باشد، جدول زیر را کامل کنید.

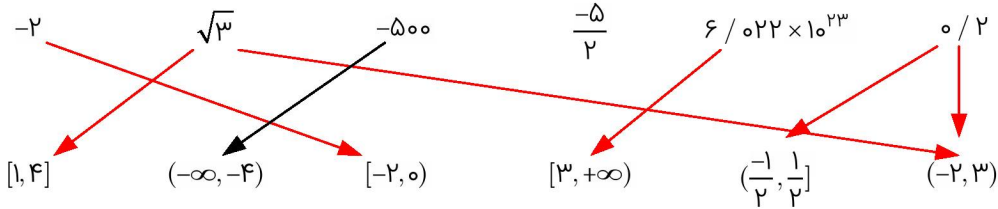
نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه ای	نمایش هندسی
نیم باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in R \mid x > a\}$	
نیم باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in R \mid x \geq a\}$	
نیم باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in R \mid x \leq a\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in R \mid x < a\}$	
باز	$(-\infty, +\infty)$	$\mathbb{R}$	
نیم باز	$[3, +\infty)$	$\{x \in R \mid x \geq 3\}$	
باز	$(-\infty, 5)$	$\{x \in R \mid x < 5\}$	



۱) درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

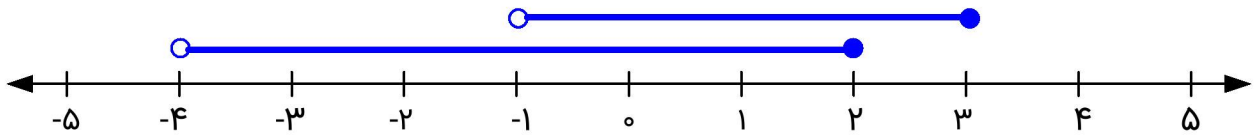
الف) $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{2}, 2)$ ✓	ب) $-2 \in (-2, 0]$ ✗	پ) $0 \in (-2, 0]$ ✓	ت) $-2 \in \{-2, 0\}$ ✓	ث) $-1 \in \{-2, 0\}$ ✗
ج) $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$ ✗	چ) $\{0, 1\} \subseteq [-1, 2)$ ✓	ح) $\emptyset \subseteq (-17, 0]$ ✓	خ) $[2, 5) = (2, 5]$ ✗	د) $\sqrt{2} \in (0, 1)$ ✗

۲) هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه‌های داده شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه‌های نظیر آن وصل کنید.



$-\frac{5}{2}$  به هیچکدام از بازه‌ها تعلق ندارد.

۳) نمایش هندسی دو بازه  $A = (-4, 2]$  و  $B = (-1, 3]$  را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.



$A \cup B = (-4, 3]$  (ب)

$A \cap B = (-1, 2]$  (الف)

$B - A = (2, 3]$  (ت)

$A - B = (-4, -1]$  (پ)

صفحه ۵



فرض کنید A مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمتر از ۴ و B مجموعه‌ی اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد.

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{3, 2, 1, 0, -1, \dots\}$

الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید.

ب) A چند عضو دارد؟ ۳ عضو

پ) درباره‌ی تعداد اعضای B چه می‌توان گفت؟ تعداد اعضای مجموعه B بی‌شمار است.

صفحه ۶

کار در کلاس



۱) منتهای یا نامتهای بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. درباره‌ی مجموعه‌های منتهای سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید.

تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های منتهای)	منتهای	نامتهای	مجموعه
۴	✓		مجموعه اعداد اول یک رقمی
حدود هفت میلیارد	✓		مجموعه انسان‌های روی زمین
-		✓	مجموعه اعداد طبیعی فرد
حدود ۱۰۰ میلیارد	✓		مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان
-		✓	مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات
حدود ۴۰۰ نفر	✓		مجموعه دانش آموزان مدرسه شما
۹/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰	✓		مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی
حدود ۳۹۰/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰	✓		مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون
-		✓	مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک
-		✓	مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰
-		✓	بازه (۰, ۱)
برابر عدد آواگادرو $6 / 0.22 \times 10^{23}$	✓		مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب

(۲) دو مجموعه‌ی متناهی نام ببرید.

الف) مجموعه اعداد زوج کمتر از ۱۰۰

ب) مجموعه حالت‌هایی که در پرتاب دو تاس اتفاق می‌افتند.

(۳) دو مجموعه‌ی نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها زیر مجموعه‌ی دیگری باشد.

مجموعه اعداد گویا ( $Q$ ) و مجموعه‌ی اعداد صحیح ( $Z$ ) که  $Z \subseteq Q$

(۴) دو مجموعه‌ی نامتناهی مثل  $A$  و  $B$  مثال بزنید که  $A \subseteq B$  بوده و  $B-A$  تک عضوی باشد.

$A$  را مجموعه اعداد طبیعی ( $N$ ) و  $B$  را مجموعه اعداد حسابی ( $W$ ) در نظر بگیرید در این صورت داریم؛

$$A \subseteq B$$

$$B - A = \{0\}$$

صفحه ۷

فهرست



الف)  $\frac{1}{3}$ ، عددی بین ۰ و ۱ است. چهار عدد گویای دیگر از بازه‌ی  $(0, 1)$  بنویسید و جواب خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

تنوع عددها بسیار زیاد است.  $\frac{300}{401}, \frac{17}{18}, \frac{5}{2016}, \frac{1}{8}$

ب) آیا می‌توان بین ۰ و ۱ به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟ بله

پ) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه‌ی  $(0, 1)$  چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

بین صفر و یک، تعداد نامتناهی عدد گویا وجود دارد.

ت) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن  $Q$  چه می‌توان گفت؟

$Q$  مجموعه‌ای نامتناهی است.

ث) اگر  $A$  دارای یک زیر مجموعه‌ی نامتناهی باشد، آنگاه  $A$  یک مجموعه نامتناهی خواهد بود.

### تمرین درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

صفحه ۷

(۱) فرض کنید  $U$  مجموعه‌ی تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد.

الف)  $U$  را با نمایش اعضای آن بنویسید.  $A = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$

ب)  $U$  متناهی است یا نامتناهی؟ نامتناهی

پ) یک زیر مجموعه‌ی متناهی از  $U$  بنویسید.  $B = \{10, 20, \dots, 80, 90\}$

ت) دو زیر مجموعه‌ی نامتناهی مانند  $C$  و  $D$  از  $U$  بنویسید، به طوری که  $C \subseteq D$ .

$$D = \{10, 20, 30, 40, \dots\}, C = \{100, 200, 300, \dots\}$$

(۲) متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی. نامتناهی

ب) مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۶. متناهی است زیرا؛  $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

پ) بازه  $(\frac{1}{q}, \frac{1}{p})$ . نامتناهی

ت)  $A = \{x \in N \mid 1 < x < 2\}$  متناهی  $A = \{ \}$

ث) مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰. نامتناهی

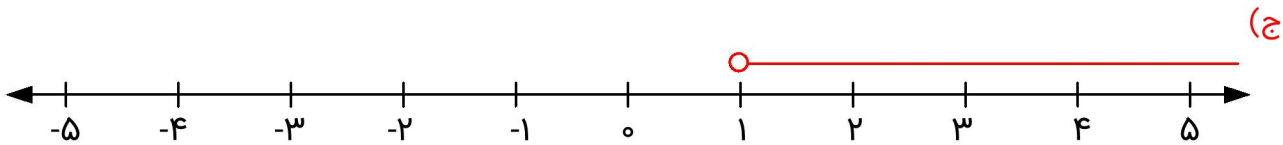
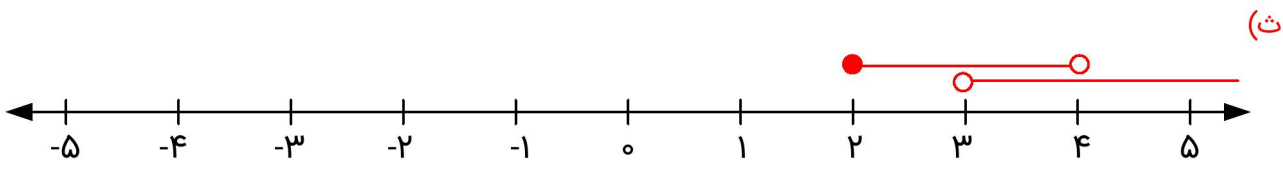
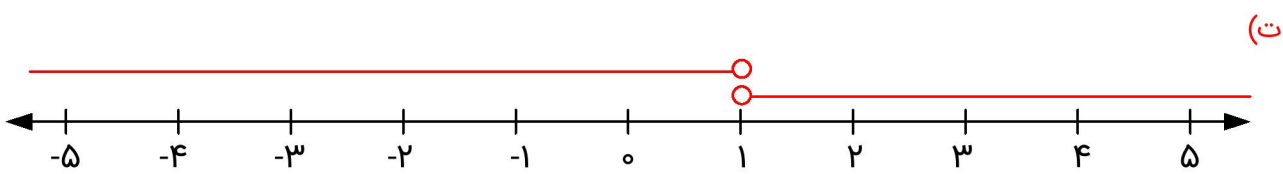
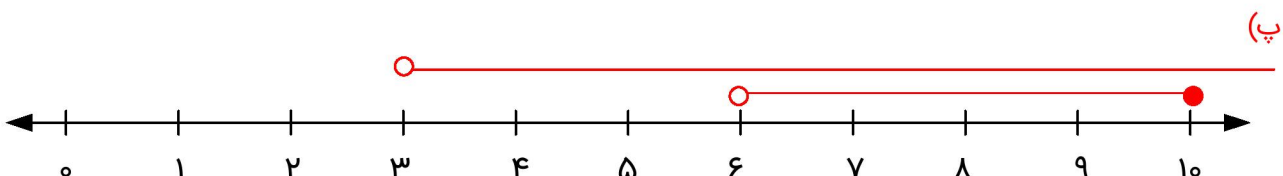
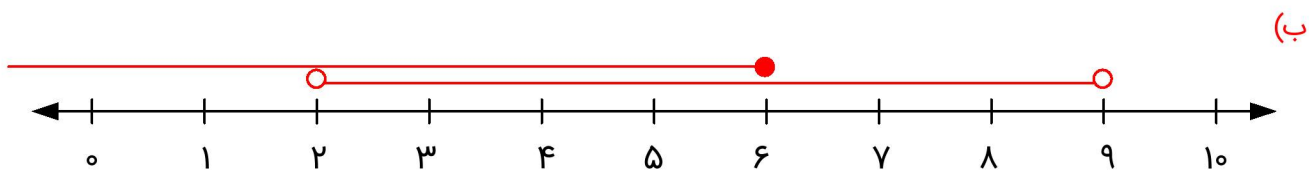
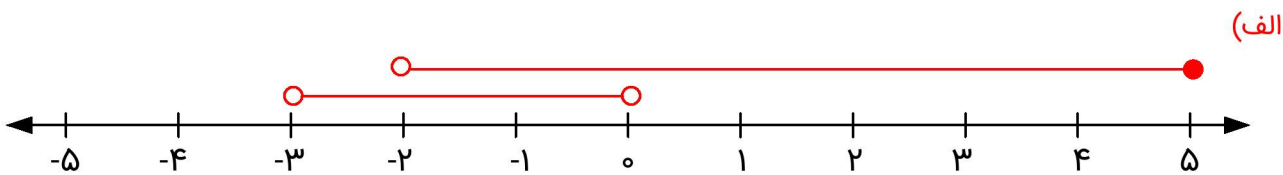


۳) دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه ای منتهای باشد.  
مجموعه اعداد طبیعی ( $N$ ) و مجموعه اعداد صحیح بین  $-۵$  تا  $+۵$  ( $A$ ).

$$\left. \begin{aligned} N &= \{1, 2, 3, \dots\} \\ A &= \{-4, -3, \dots, 3, 4\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \cap N = \{1, 2, 3, 4\}$$

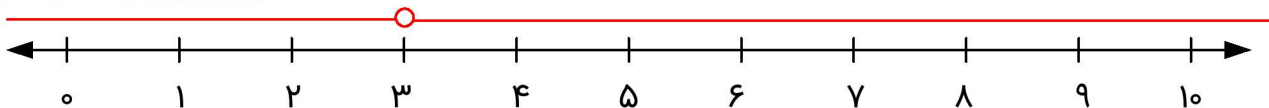
۴) حاصل هر یک از مجموعه های زیر را با رسم بازه های آنها روی یک محور به دست آورید.

(الف)  $(-3, 5) \cup (-2, 5] = (-3, 5]$       (ب)  $(-\infty, 6] \cap (2, 9) = (2, 6]$       (پ)  $(3, +\infty) \cap (6, 10] = (6, 10]$   
 (ت)  $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty) = R$       (ث)  $(3, +\infty) - [2, 4] = [4, +\infty)$       (ج)  $[2, 4] - (3, +\infty) = [2, 3]$



۵) مجموعه  $R - \{3\}$  را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

$$R - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$$



۶) اگر  $A \subseteq B$  و  $B$  مجموعه ای منتهای باشد، آنگاه  $A$  منتهای خواهد بود یا نامتناهی؟  
تعداد اعضای  $A$  از  $B$  کمتر است، بنابراین  $A$  هم منتهای خواهد بود.

## فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

### درس دوم: متمم یک مجموعه

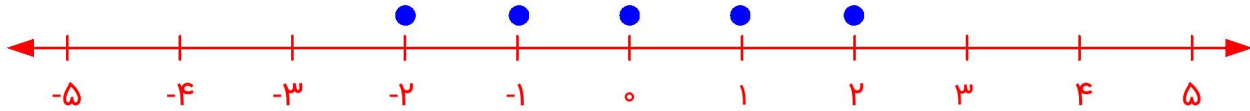
صفحه ۸

فعالیت

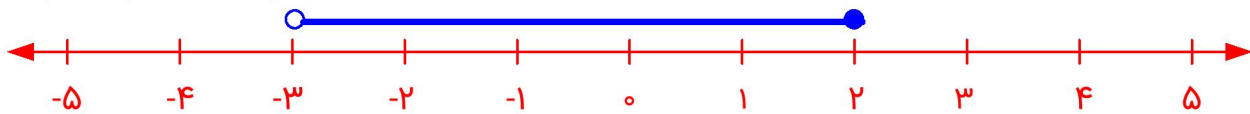


الف) دو مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهید.

$$A = \{x \in Z \mid -3 < x \leq 2\}$$



$$B = \{x \in R \mid -3 < x \leq 2\}$$



ب)  $A$  را با نمایش اعضا و  $B$  را به صورت یک بازه بنویسید.

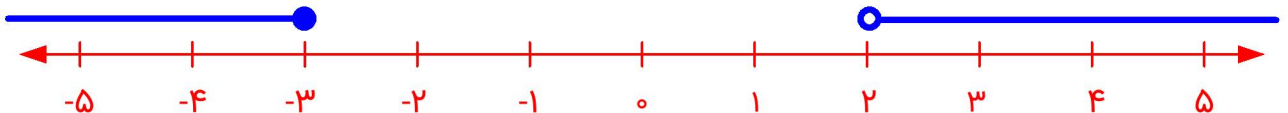
$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$B = (-3, 2]$$

پ) در مورد  $A$  اگر مجموعه‌ی مرجع را  $Z$  در نظر بگیریم،  $A'$  را مشخص کنید.

$$A' = \{\dots, -5, -4, -3, 3, 4, 5, \dots\}$$

ت) در مورد  $B$  با فرض این که  $R$  مجموعه‌ی مرجع باشد،  $B'$  را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید.



صفحه ۹

کار در کلاس



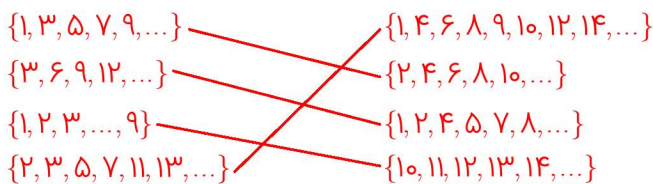
۱) اگر  $U$  مجموعه‌ی شامل تمام استان‌های کشورمان باشد، و  $A$  مجموعه‌ی استان‌های غیر ساحلی، آن‌گاه  $A'$  را با نمایش اعضای آن بنویسید.

$$A' = \{\text{هرمزگان، سیستان و بلوچستان، بوشهر، خوزستان، گلستان، مازندران، گیلان}\}$$

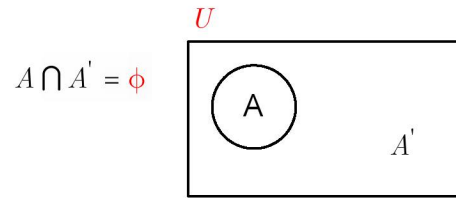
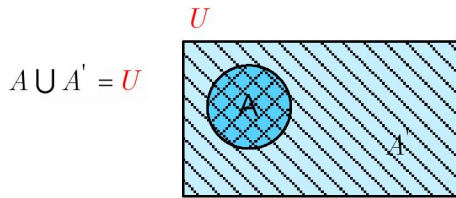
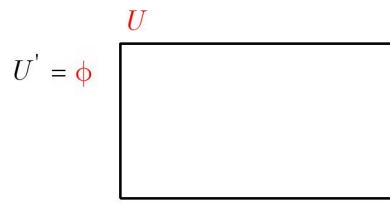
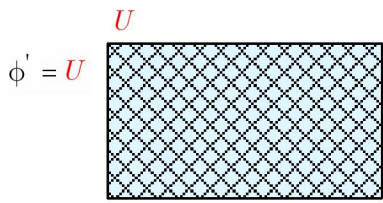
۲) فرض کنیم  $U$  مجموعه‌ی تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری شده‌ی کشور و  $B$  مجموعه‌ی اتومبیل‌های با پلاک فرد باشد. در این صورت  $B'$  چه مجموعه‌ای خواهد بود؟

$B'$  مجموعه اتومبیل‌های با پلاک زوج خواهد بود.

۳) با فرض آنکه  $N$  مجموعه مرجع باشد، هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید.



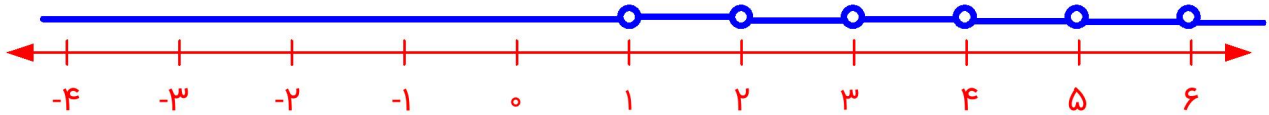
۴)  $U$  مجموعه‌ی مرجع و  $A$  زیر مجموعه‌ی دلخواهی از آن می‌باشد. با رسم نمودار، طرف دوم تساوی زیر را بنویسید.



(۵) الف) اگر  $\mathbb{Z}$  را به عنوان مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم آنگاه  $\mathbb{N}'$  را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

$\mathbb{N}' = \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -۳, -۲, -۱, ۰\}$

(ب) اگر  $\mathbb{R}$  را به عنوان مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم، در این صورت  $\mathbb{N}'$  را روی محور نمایش دهید.



(۶) فرض کنیم  $U = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$  مجموعه مرجع باشد و  $A = \{۱, ۲, ۳\}$  و  $B = \{۲, ۴\}$  ابتدا  $A'$  و  $B'$  را بنویسید و سپس جدول‌های زیر را کامل کنید. از هر قسمت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

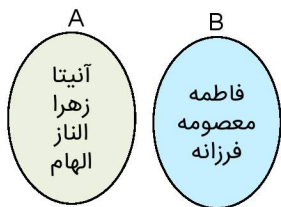
$A' = \{۴, ۵\}$

$B' = \{۱, ۳, ۵\}$

$(A')$		$\Rightarrow$	$(A')' = A$
$\{۱, ۲, ۳\}$			
$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$\Rightarrow$	$A' \cap B' = (A \cup B)'$
$\{۱, ۲, ۳, ۴\}$	$\{۵\}$		
$A \cap B$	$(A \cap B)'$	$\Rightarrow$	$A' \cup B' = (A \cap B)'$
$\{۲\}$	$\{۱, ۳, ۴, ۵\}$		
$A - B$	$A - (A \cap B)$	$\Rightarrow$	$A - B = A - (A \cap B)$
$\{۱, ۳\}$	$\{۱, ۳\}$		



(۱) یک تیم کوهنوردی متشکل از ۴ دانش‌آموز و ۳ دانشجوی عضو یک مؤسسه‌ی طرفدار محیط زیست است. اعضای این تیم به طور داوطلبانه در روزهای جمعه‌ی هر هفته کوه‌های اطراف شهر خود را از وجود زباله پاک‌سازی می‌کنند. اعضای دانش‌آموز این تیم مجموعه {آنیتا، زهرا، الناز، الهام} و اعضای دانشجوی آن مجموعه {فاطمه، معصومه، فرزانه} هستند. همان گونه که دیده می‌شود، این دو مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند؛ به عبارت دیگر  $A \cap B = \phi$ .



الف) اعضای  $A \cup B$  را که بیانگر اعضای تیم کوهنوردی می‌باشد، بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید.

$$A \cup B = \{\text{فاطمه، معصومه، فرزانه، آنیتا، زهرا، الناز، الهام}\}$$

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$
۴	۳	۷	۰

ب) تعداد عضوهای  $A \cup B$  چه رابطه‌ای با  $n(A)$  و  $n(B)$  دارد؟ این رابطه را به صورت یک فرمول بنویسید.

تعداد عضوهای  $A \cup B$  با حاصل جمع  $n(A)$  و  $n(B)$  برابر است یعنی:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

پ) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعه دلخواه  $A$  و  $B$  برقرار است؟

زمانی که  $A \cap B = \emptyset$  یعنی دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  هیچ اشتراکی نداشته باشند.

۲) الف) مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب  $A$  و  $B$  می‌نامیم. موارد خواسته شده را بنویسید.

مجموعه شمارنده‌های عدد ۲۸ :  $A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\} \Rightarrow n(A) = 6$

مجموعه شمارنده‌های عدد ۳۰ :  $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} \Rightarrow n(B) = 8$

شمارنده‌های مشترک ۲۸ و ۳۰ :  $A \cap B = \{1, 2\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 28, 30\} \Rightarrow n(A \cup B) = 12$$

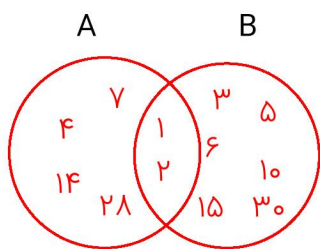
ب) جدول زیر را کامل کنید.

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$
۶	۸	۲	۱۲

پ) چرا رابطه‌ای را که در فعالیت (۱) به دست آوردید؛ یعنی  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$  در این مثال برقرار نیست؟

چون اشتراک  $A$  و  $B$  تهی نیست.

ت) با تکمیل نمودار مقابل سعی کنید رابطه‌ی درست برای  $n(A \cap B)$  را حدس بزنید.



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

همانطور که دیدیم، اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

با توجه به نمودار روبه‌رو، در مورد علت درستی این رابطه با دوستان خود بحث کنید.

چون زمانی که تعداد اعضای  $A$  و  $B$  با هم جمع می‌شوند، تعداد اعضای  $A \cap B$  یک بار جزو اعضای  $A$  و یک بار جزو اعضای  $B$  حساب شده اند و لذا باید یک بار تعداد اعضای  $A \cap B$  کم شود تا تعداد اعضای  $A \cup B$  به دست آید.



صفحه ۱۱

کار در کلاس



۱) یک دوره جشنواره‌ی فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم‌هایی که:

الف) پویانمایی یا طنزند.

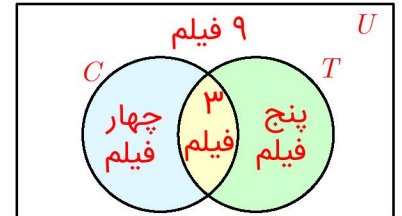
ب) غیرپویانمایی و غیر طنزند.

روش اول حل: مجموعه‌ی شامل تمام فیلم‌ها را با  $U$ ، مجموعه فیلم‌های پویانمایی را با  $C$  و مجموعه فیلم‌های طنز را با  $T$  نشان می‌دهیم. جاهای خالی را پر کنید و جواب‌ها را بیابید.

الف)  $n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T) = 7 + 8 - 3 = 12$

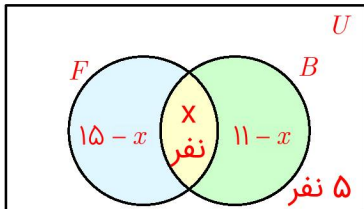
ب)  $n(C \cup T)' = n(U) - n(C \cup T) = 21 - 12 = 9$

روش دوم حل: در نمودار ون مقابل، دو مجموعه‌ی  $C$  و  $T$  سطح درون  $U$  را به چهار ناحیه‌ی جداگانه تقسیم کرده‌اند که عدد مربوط به دو تا از نواحی نوشته شده است. با نوشتن اعداد مربوط به دو قسمت دیگر، جواب قسمت‌های (الف) و (ب) را بیابید.



الف)  $4 + 3 + 5 = 12$   
ب) ۹

۲) در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند؟ روش اول حل: با تکمیل نمودار زیر، مقدار  $x$  را بیابید.



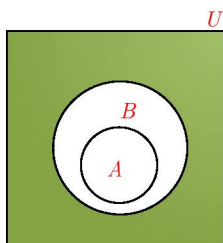
$(15 - x) + x + (11 - x) + 5 = 25 \Rightarrow x = 6$

روش دوم حل: چون ۵ نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نیستند، پس  $n(B \cup F) = 20$ . حال با نوشتن فرمول  $n(B \cup F)$  می‌توان  $n(B \cap F)$  را به دست آورد.

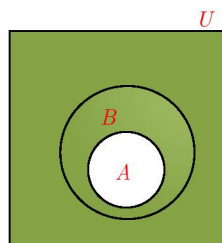
$n(B \cup F) = n(B) + n(F) - n(B \cap F) \Rightarrow 20 = 15 + 11 - x \Rightarrow x = 6 \Rightarrow n(B \cap F) = 6$

۳) فرض کنیم  $A \subseteq B \subseteq U$  که در آن  $U$  مجموعه‌ی مرجع است، در نمودارهای مقابل  $A'$  و  $B'$  را مشخص کنید و سپس تعیین کنید که آیا بین  $A'$  و  $B'$  هم رابطه‌ی زیر مجموعه بودن برقرار است؟ چگونه؟

بله، با توجه به نمودار ون داریم؛  $B' \subseteq A'$



نمودار  $B'$



نمودار  $A'$

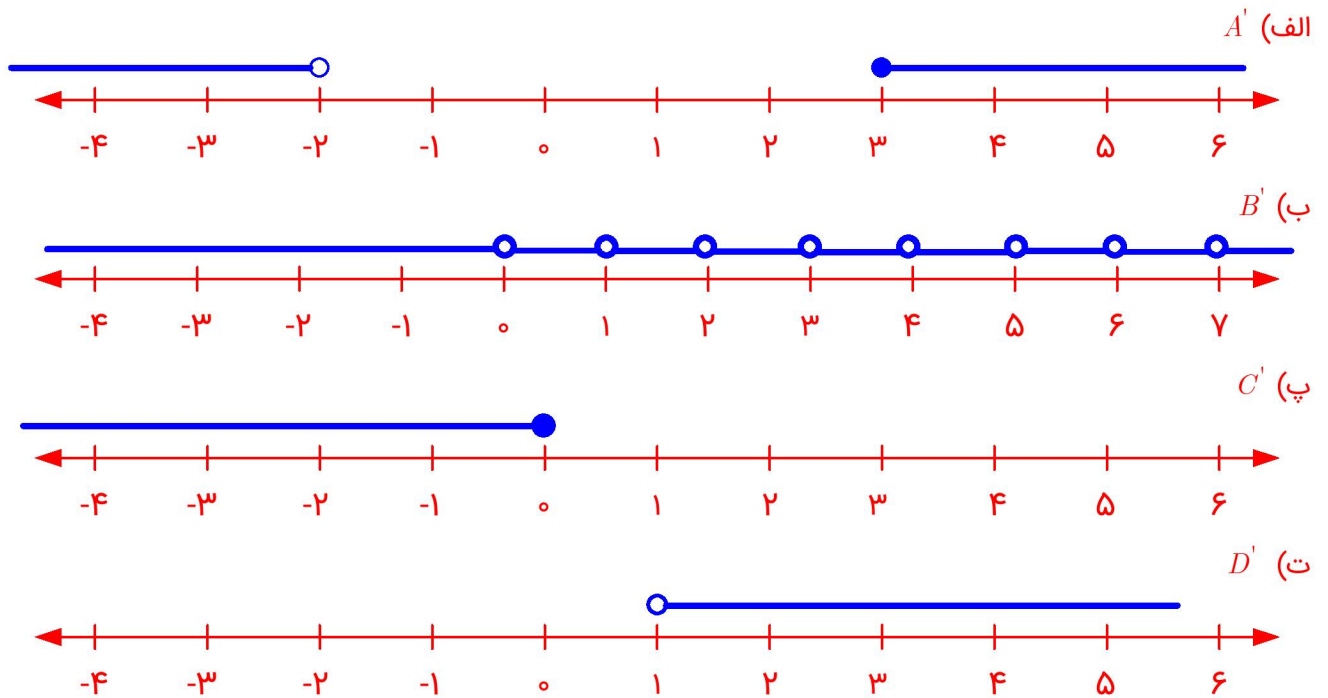
ب) اگر  $U = \{a, b, c, d, e\}$  مجموعه‌ی مرجع باشد و  $A = \{a, b\}$  و  $B = \{a, b, c\}$ ، در این صورت  $A \subseteq B$  می‌باشد. با به دست آوردن  $A'$  و  $B'$  نشان دهید که بین  $A'$  و  $B'$  هم رابطه‌ی زیر مجموعه بودن برقرار است.

$$\left. \begin{matrix} A' = \{c, d, e\} \\ B' = \{d, e\} \end{matrix} \right\} \Rightarrow B' \subseteq A'$$

تمرین درس دوم : متمم یک مجموعه  
صفحه ۱۲

۱)  $R$  را به عنوان مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.

- الف)  $A = [-2, 3)$       ب)  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$       پ)  $C = (0, +\infty)$       ت)  $D = (-\infty, 1]$



۲)  $N$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل  $A$  مثال بزنید که  $A'$  هم نامتناهی باشد.

$$A = \{2, 4, 6, 8, \dots\} \Rightarrow A' = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل  $B$  مثال بزنید که  $B'$  متناهی باشد.

$$B = \{101, 102, 103, \dots\} \Rightarrow B' = \{1, 2, \dots, 100\}$$

پ) مجموعه‌ای متناهی مثل  $C$  مثال بزنید و  $C'$  را به دست آورید.  $C'$  متناهی است یا نامتناهی؟

$$C = \{1, 2, 3, \dots, 100\} \Rightarrow C' = \{101, 102, 103, 104, \dots\}$$

۳) اگر  $n(A) = 15$ ،  $n(A \cap B) = 5$  و  $n(A \cup B) = 30$  آنگاه  $n(B)$  را محاسبه کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 30 = 15 + n(B) - 5 \Rightarrow n(B) = 20$$

۴) فرض کنیم  $A$  و  $B$  زیر مجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع  $U$  باشند، به طوری که  $n(U) = 100$ ،  $n(A) = 60$ ،  $n(B) = 40$  و  $n(A \cap B) = 20$  مطلوب است:

الف)  $n(A \cup B)$

ب)  $n(A \cap B')$

پ)  $n(A' \cap B)$

ت)  $n(A' \cap B')$

برای حل این تمرین می‌توان از فرمول یا نمودار ون استفاده کرد:  
استفاده از فرمول:

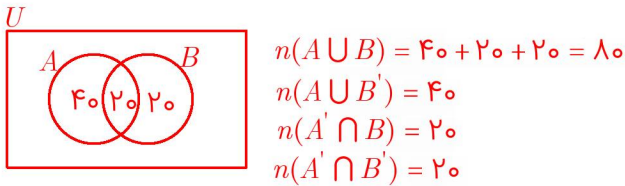
الف)  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 60 + 40 - 20 = 80$

ب)  $n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 60 - 20 = 40$

پ)  $n(A' \cap B) = n(B \cap A') = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 40 - 20 = 20$

ت)  $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = 100 - 80 = 20$

استفاده از نمودار ون:



۵) در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:  
الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.

$14 - 5 = 9$

ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

$n(A \cup B) = 14 + 19 - 5 = 28$  دانش‌آموزانی که حداقل عضو یک گروه هستند

$31 - 28 = 3$  نفر عضو هیچ گروهی نیستند.

۶) در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:  
الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 70 + 57 - 32 = 95$

ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند؟

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 70 - 32 = 38$

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟

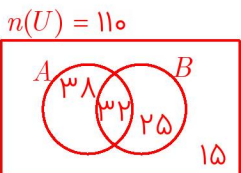
دقیقاً از یکی از دو شرکت خرید کرده باشند یعنی یا فقط از شرکت A و یا فقط از شرکت B خرید کرده باشند:

$$\left. \begin{aligned} A &\Rightarrow n(A - B) = 70 - 32 = 38 \\ B &\Rightarrow n(B - A) = 57 - 32 = 25 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 38 + 25 = 63 \text{ نفر}$$

ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند؟

$n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 110 - 95 = 15$

با استفاده از نمودار ون نیز می‌توانید به همان پاسخ‌های فوق برسید.



## فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

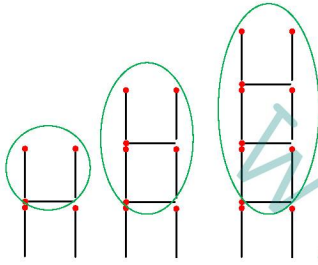
## درس سوم: الگو و دنباله

صفحه ۱۵

فعالیت

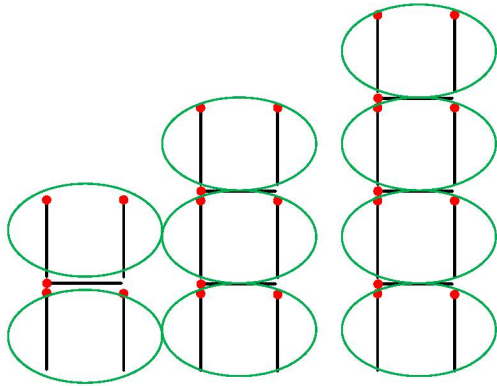


۱) آیدا برای به دست آوردن حاصل  $a_n$  در مثال بالا، شکل‌های الگو را به صورت روبه‌رو در نظر گرفت. به کمک این روش، مقدار  $a_1$  و  $a_n$  را به دست آورید.



$$a_1 = 1(3) + 2 \quad a_2 = 2(3) + 2 \quad a_3 = 3(3) + 2 \quad a_4 = 4(3) + 2 \quad \dots \quad a_{10} = 10(3) + 2 = 32 \rightarrow a_n = n(3) + 2 = 3n + 2$$

۲) آيسا روش ديگري را به کار برد، او تعداد چوب کبريت‌های افقی و عمودی در هر شکل را به طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار  $a_n$  دست یابد. مقدار حاصل برای  $a_n$  از این روش را در جای مشخص شده بنویسید.

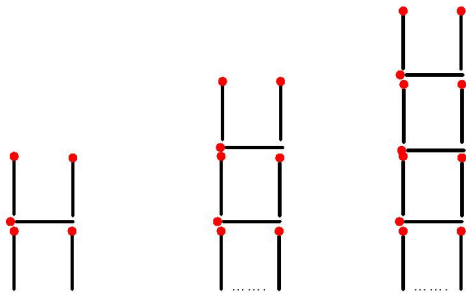


$$a_1 = 1 + 2(2) \quad a_2 = 2 + 3(2) \quad a_3 = 3 + 4(2) \quad a_4 = 4 + 5(2) \quad \dots$$

چوب‌های افقی — چوب‌های عمودی

$$a_{10} = 10 + (10 + 1)2 \rightarrow a_n = n + (n + 1)2 = 3n + 2$$

۳) آیا شما راه دیگری را برای به دست آوردن حاصل  $a_n$  می‌دانید؟



اگر در هر شکل یک چوب کبريت فرضی اضافه کنیم، آنگاه در هر شکل به تعداد (شماره شکل + ۱) × ۳ چوب کبريت خواهیم داشت:

$$a_1 = 2(3) - 1 \quad a_2 = 3(3) - 1 \quad a_3 = 4(3) - 1 \quad a_{10} = 11(3) - 1 \rightarrow a_n = (n + 1)(3) - 1 = 3n + 2$$



۴) همان طور که در قسمت‌های (۱) و (۲) دیدیم، آیدا و آيسا مقدار  $a_n$  را به ترتیب به صورت‌های  $a_n = 3n + 2$  و  $a_n = n + (n+1)(2)$  به دست آوردند. جواب آيسا را ساده کنید تا به شکل جواب آیدا در آید.

$$a_n = n + (n+1)(2) = n + 2n + 2 = 3n + 2$$

۵) به کمک رابطه‌ی  $a_n = 3n + 2$  تعداد چوب کبریت‌های شکل بیستم را بیابید.

$$a_{20} = 3 \times (20) + 2 = 62$$

۶) با استفاده از رابطه‌ی  $a_n = 3n + 2$  مشخص کنید که چندمین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.

$$a_n = 77 \Rightarrow 77 = 3n + 2 \Rightarrow 3n = 75 \Rightarrow n = 25$$

پس شکل بیست و پنجم دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.

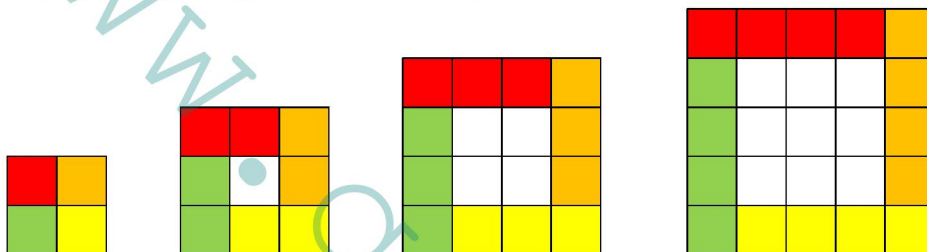
صفحه ۱۷

کار در کلاس



۱) شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.

شکل ۱      شکل ۲      شکل ۳      شکل ۴



شماره شکل $n$	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد مربع‌های رنگی $b_n$	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
رابطه بین $b_n$ و $n$	$b_1 = 4 \times 1$	$b_2 = 4 \times 2$	$b_3 = 4 \times 3$	$b_4 = 4 \times 4$	$b_5 = 4 \times 5$

۲) توضیح دهید که چرا این الگو یک الگوی خطی محسوب می‌شود. چون فاصله هر دو جمله‌ی متوالی برابر مقدار ثابت ۴ است.

۳) با توجه به میزان افزایش جملات الگو، مقدار  $a$  در رابطه‌ی  $b_n = an + h$  را بیابید و پس از حدس زدن مقدار  $h$  حاصل  $b_n$  را به دست

آوردید. مقدار  $a$  همان فاصله بین جملات الگو است که برابر ۴ است. با توجه به جدول فوق داریم؛  $b_n = 4n$  و  $h = 0$

$$b_{250} = 250 \times 4 = 1000$$

۴) شکل شماره‌ی ۲۵۰ دارای چند مربع رنگی است؟

۵) در چه مرحله‌ای از الگوی بالا، تعداد مربع‌های رنگی برابر ۱۴۴ است؟ مرحله ۳۶ ام

$$b_n = 144 \Rightarrow 144 = 4n \Rightarrow n = \frac{144}{4} = 36$$

شکل ۳۶ ام دارای ۱۴۴ مربع رنگی است.

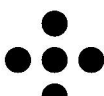
صفحه ۱۷

فعالیت



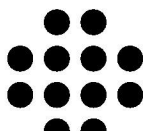
۱) در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید.

شکل ۱



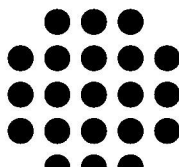
۵ نقطه

شکل ۲



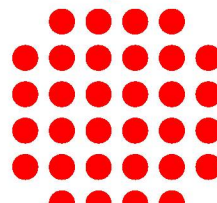
۹ نقطه

شکل ۳



۱۶ نقطه

شکل ۴



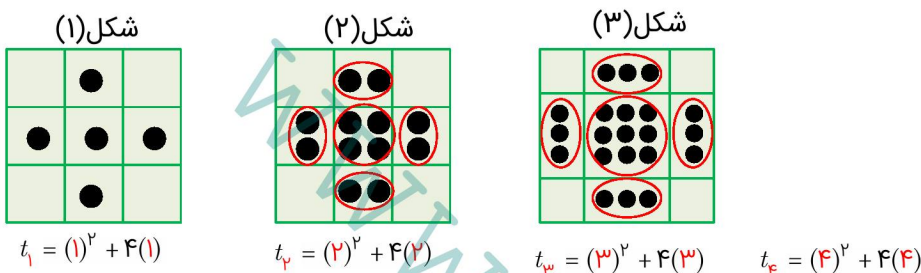
۲۵ نقطه

شماره‌ی شکل : $n$	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد نقطه‌ها : $t_n$	۵	۱۲	۲۱	۳۲	۴۵
رابطه بین $n$ و $t_n$	$t_1 = ۵$	$t_2 = ۲^2 + ۴ \times ۲$ $t_2 = ۱۲$	$t_3 = ۳^2 + ۴ \times ۳$ $t_3 = ۲۱$	$t_4 = ۴^2 + ۴ \times ۴$ $t_4 = ۳۲$	$t_5 = ۵^2 + ۴ \times ۵$ $t_5 = ۴۵$

۲) آیا این الگو یک الگوی خطی است؟ چرا؟

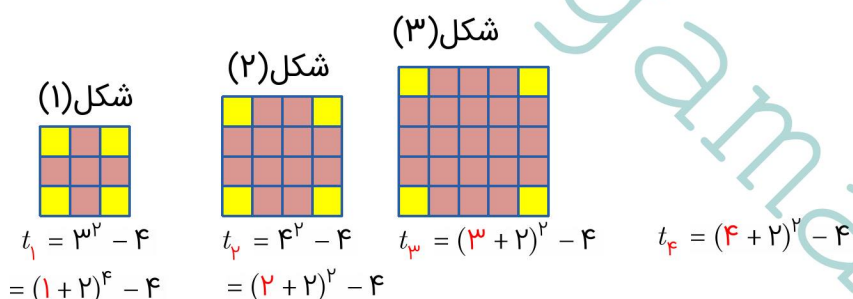
خیر، چون فاصله‌ی هر دو جمله متوالی مقدار ثابتی نیست.

۳) امیررضا برای یافتن جمله‌ی عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را به صورت زیر دسته‌بندی کرد. از شکل‌های امیررضا کمک بگیرید و مقدار  $t_n$  را بیابید.



جمله عمومی دنباله با روش امیررضا  $t_n = n^2 + 4n$

۴) امیرمحمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را به صورت زیر نظیر کرد. با استفاده از این شکل‌ها مقدار  $t_n$  را بنویسید.



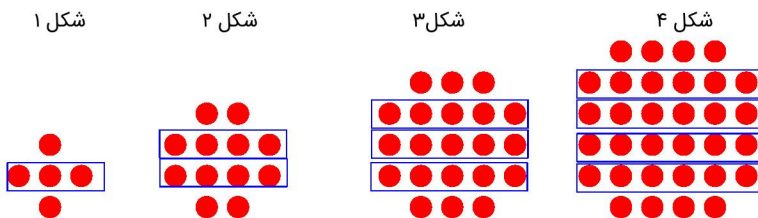
جمله عمومی دنباله با روش امیرمحمد  $t_n = (n+2)^2 - 4$

۵) نشان دهید که دو مقدار به دست آمده برای  $t_n$  در دو قسمت قبلی، برابرند.

(روش امیررضا)  $t_n = n^2 + 4n$

(روش امیرمحمد)  $t_n = (n+2)^2 - 4 = n^2 + 4n + 4 - 4 = n^2 + 4n$

۶) آیا شما روش دیگری برای یافتن  $t_n$  می‌شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.



$t_1 = 1 \times (1+2) + 2(1) = 5$      $t_2 = 2 \times (2+2) + 2(2) = 12$      $t_3 = 3 \times (3+2) + 2(3) = 21$      $t_4 = 4 \times (4+2) + 2(4) = 32$     ...

$\rightarrow t_n = n(n+2) + 2n \Rightarrow t_n = n^2 + 4n$



۱) دو دنباله‌ی دلخواه مثال بنویسید.

الف) ۴, ۷, ۱۰, ۱۳, ...

ب) ۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, ...

۲) جمله‌ی عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

الف)  $a_n = n^2 - 1$  : ۰, ۳, ۸, ۱۵, ۲۴

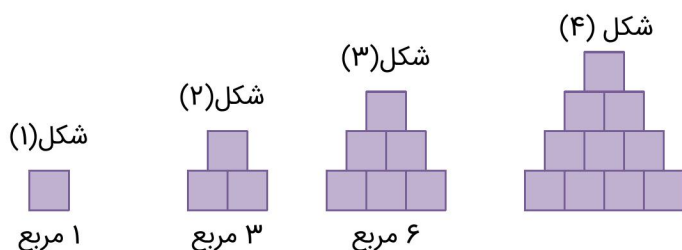
ب)  $b_n = -n + ۴$  : ۳, ۲, ۱, ۰, -۱, -۲

ج)  $c_n = -۱۳ + ۲n$  : -۱۱, -۹, -۷, -۵, -۳

در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جمله‌ی بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید جمله‌ی عمومی دنباله را نیز حدس بزنید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	...	$t_n$	...
-۱	-۲	-۳	-۴	-۵	-۶	-۷	...	$-n$	...
۱	$\sqrt{۳}$	$\sqrt{۵}$	$\sqrt{۷}$	$\sqrt{۹} = ۳$	$\sqrt{۱۱}$	$\sqrt{۱۳}$	...	$\sqrt{۲n-1}$	...
۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹	...	$n^2$	...
۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰۰۱	...	$۱۰^{-n}$	...
-۱	۸	-۲۷	۶۴	-۱۲۵	۲۱۶	-۳۴۳	...	$(-1)^n n^3$	...
۵	۱۸	۳۱	۴۴	۵۷	۷۰	۸۳	...	$۵ + ۱۳(n-1)$	...
-۲	۱	$\frac{-1}{۲}$	$\frac{1}{۴}$	$\frac{-1}{۸}$	$\frac{1}{۱۶}$	$\frac{-1}{۳۲}$	...	$\frac{(-1)^n}{۲^{n-2}}$	...
۱	۲	۴	۷	۱۱	۱۶	۲۲	...	$\frac{n(n-1)}{۲} + ۱$	...
۳	۱	۴	۱	۵	۱	۶	...		...
۱	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	...	$a_1 = a_2 = 1$ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$	...
۲	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	۱۷	...	اعداد اول	...

۲) الگوی مقابل را در نظر بگیرید.



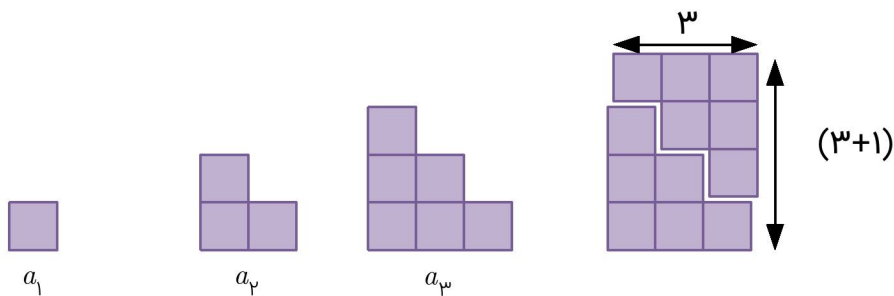
الف) تعداد مربع‌ها در الگو را به صورت یک دنباله تا جمله‌ی ششم آن بنویسید.

۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, ۲۱

ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله‌ی خطی است؟ چرا؟

خیر، چون فاصله‌ی هر دو جمله متوالی از این دنباله مقدار ثابتی نیست.

پ) شکل‌های الگوی بالا را به صورت مقابل تبدیل می‌کنیم. با دقت در تصویر مقابل سعی کنید حاصل  $a_n$  را بر حسب  $n$  بدست آورید.



$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 + 2 \quad a_3 = 1 + 2 + 3 \quad \dots \quad a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

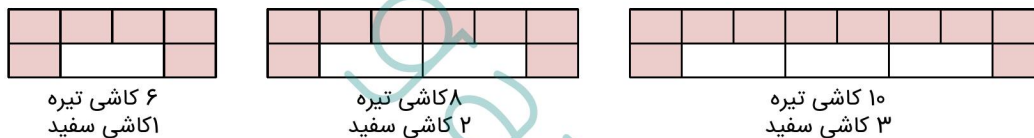
$2a_3 = 3(3 + 1) \Rightarrow a_3 = \frac{3(3 + 1)}{2} \Rightarrow a_n = \frac{n(n + 1)}{2}$

(ت) به کمک مرحله‌ی قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.

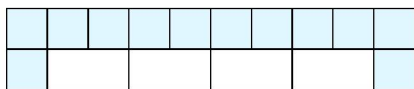
$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$

تمرین درس سوم: الگو و دنباله  
صفحه ۲۰

(ا) به الگوی زیر توجه کنید.



(الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیره‌ی آن را مشخص کنید.



شامل ۱۲ کاشی تیره و ۴ کاشی سفید

(ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله‌ی هفتم آن بنویسید.

$6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots$

(پ) اگر  $n$  تعداد کاشی‌های سفید و  $t_n$  تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار  $t_n$  را بر حسب  $n$  بنویسید.

$t_n = 2n + 4$

(ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟

$t_{100} = 2 \times (100) + 4 = 204$

(ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چندتا است؟

بله، با توجه به معادله، شکل ۲۳ام چنین وضعیتی دارد.

$t_n = 50 \Rightarrow 2n + 4 = 50 \Rightarrow 2n = 46 \Rightarrow n = 23$

به ازای ۲۳ کاشی تیره، ۵۰ کاشی سفید لازم است.

(۲) الگوی زیر را در نظر بگیرید.

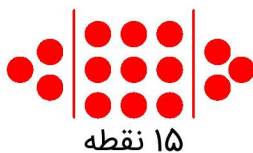
شکل ۱



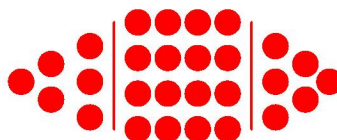
شکل ۲



شکل ۳

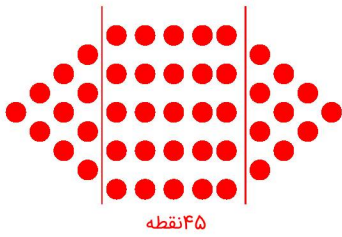


شکل ۴





الف) شکل بعدی را رسم کنید. سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله‌ی ششم آن بنویسید.



تعداد نقاط در هر شکل : ۱, ۶, ۱۵, ۲۸, ۴۵, ۶۶

ب) جمله‌ی عمومی الگو را بیابید.

دقت کنید که دایره‌های داخلی دنباله اعداد مربعی و دایره‌های جانبی دنباله‌ی اعداد مثلثی را تشکیل می‌دهند. بنابراین کل دنباله مجموعه‌ای از دنباله مربعی و دو برابر دنباله مثلثی است.

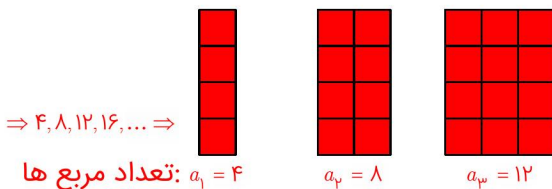
$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 1^2 + 2\left(\frac{(1-1)(1)}{2}\right) \\ a_2 &= 2^2 + 2\left(\frac{(2-1)(2)}{2}\right) \\ a_3 &= 3^2 + 2\left(\frac{(3-1)(3)}{2}\right) \\ a_4 &= 4^2 + 2\left(\frac{(4-1)(4)}{2}\right) \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_n = n^2 + 2\left(\frac{(n-1)n}{2}\right) = n^2 - 2n$$

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

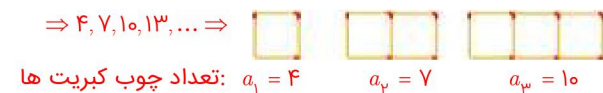
$$a_{10} = 2(10)^2 - 10 = 200 - 10 = 190$$

۳) جمله‌ی عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله‌ی اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

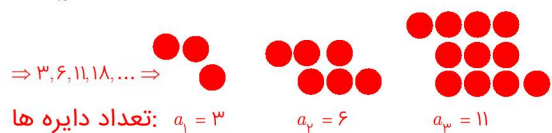
الف)  $a_n = 4n$



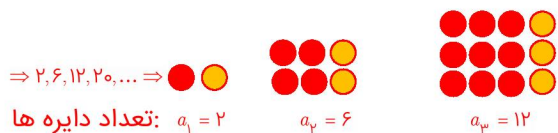
ب)  $b_n = 3n + 1$



پ)  $c_n = n^2 + 2$

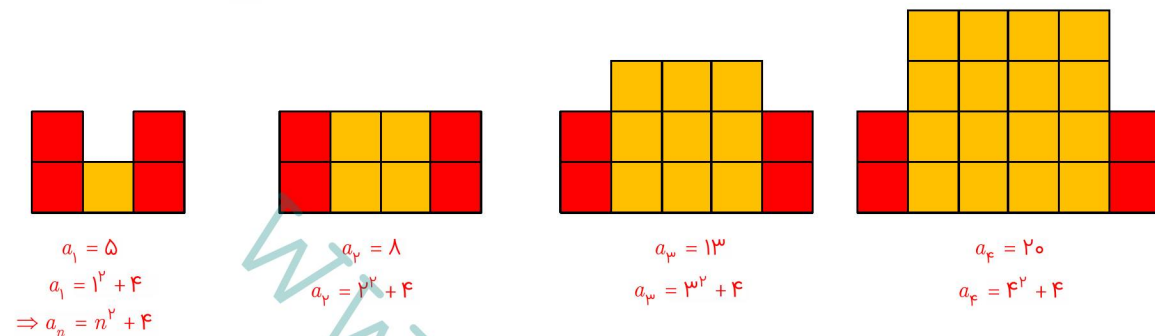


ت)  $d_n = n^2 + n$

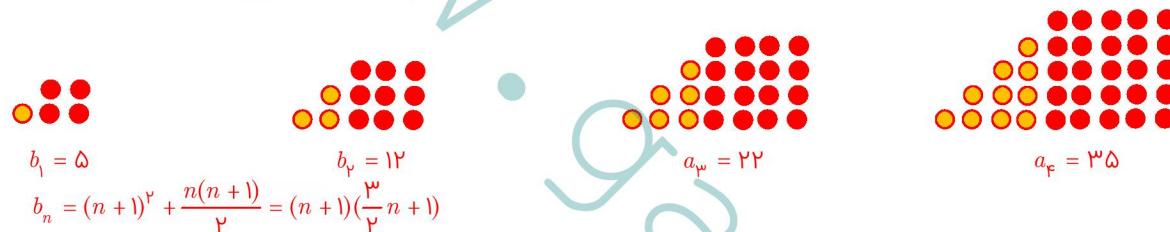


۴) برای دنباله‌های درجه‌ی دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله‌ی عمومی هر دنباله را بیابید.

الف)  $5, 8, 13, 20, 29, \dots$



ب)  $5, 12, 22, 35, 51, \dots$



## فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

## درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

صفحه ۲۱



سال‌های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزاره‌ی سوم میلادی به بعد به صورت زیر است که جملات یک دنباله‌ی حسابی‌اند.  
 $۲۰۰۰, ۲۰۰۴, ۲۰۰۸, ۲۰۱۲, ۲۰۱۶, ۲۰۲۰, \dots$

الف) جمله‌ی اول و قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید.  $t_1 = ۲۰۰۰$  ,  $d = ۴$

ب) نهمین دوره‌ی المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد؟  $۲۰۳۲$

$۲۰۰۰, ۲۰۰۴, ۲۰۰۸, ۲۰۱۲, ۲۰۱۶, ۲۰۲۰, ۲۰۲۴, ۲۰۲۸, \boxed{۲۰۳۲}$

پ) با تکمیل جدول زیر، جمله‌ی عمومی این دنباله را به دست آورید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	...	$t_n$	...	...
۲۰۰۰	$۲۰۰۰ + ۱(۴)$	$۲۰۰۰ + ۲(۴)$	$۲۰۰۰ + ۳(۴)$	...	$۲۰۰۰ + (n)(۴)$	$۲۰۰۰ + (n-1)(۴)$	...

ت) بیست و چهارمین دوره‌ی المپیک در هزاره‌ی سوم میلادی در چه سالی برگزار خواهد شد؟

$$t_{۲۴} = ۲۰۰۰ + (۲۴ - 1)(۴) = ۲۰۹۲$$

۲) با تکمیل جدول زیر، سعی کنید ساختار کلی جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی را بدست آورید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	...	$t_n$	...
$t_1$	$t_1 + 1d$	$t_1 + 2d$	$t_1 + 3d$	$t_1 + 4d$	$t_1 + 5d$	...	$t_1 + (n-1)d$	...

مجموع جمله اول با مضربی از یک عدد ثابت جمله‌های این دنباله را تشکیل می‌دهند.

صفحه ۲۲

کار در کلاس



۱) در دنباله‌های حسابی زیر با مشخص کردن قدر نسبت، سه جمله‌ی بعدی را بنویسید و سپس جمله‌ی عمومی هر کدام را به دست آورید.

الف)  $۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵, ۳۰, ۳۵, \dots$   $d = ۵$  ,  $a_n = ۵n$

ب)  $۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, \dots$   $d = ۲$  ,  $b_n = ۲n - ۱$

پ)  $۵, ۹, ۱۳, ۱۷, ۲۱, ۲۵, ۲۹, \dots$   $d = ۴$  ,  $c_n = ۴n + ۱$

ت)  $۱۳, ۷, ۱, -۵, -۱۱, -۱۷, -۲۳, \dots$   $d = -۶$  ,  $d_n = -۶n + ۱۹$

۲) A و B دو شرکت عرضه کننده‌ی سیم کارت‌های تلفن همراه با شرایط زیرند.

**سیم کارت های شرکت B**  
 هزینه ثابت ماهانه: ۳۰۰۰ تومان  
 هزینه هر دقیقه مکالمه: ۲۰ تومان

**سیم کارت های شرکت A**  
 هزینه ثابت ماهانه: ۲۰۰۰ تومان  
 هزینه هر دقیقه مکالمه: ۳۰ تومان

فرض کنیم  $a_n$  نشان دهنده‌ی هزینه‌ی کل  $n$  دقیقه مکالمه از طریق سیم کارت شرکت A و  $b_n$  هزینه‌ی مشابه برای استفاده از سیم کارت شرکت B باشد.

الف) مقدار  $a_n$  و  $b_n$  را بر حسب  $n$  بنویسید.

ب) جدول زیر را کامل کنید.

$n$ : زمان مکالمه‌ی ماهانه (دقیقه)	۰	۴۰	۸۰	۱۲۰	۱۶۰
$a_n$ : هزینه‌ی سیم کارت A	۲۰۰۰	۳۲۰۰	۴۴۰۰	۵۶۰۰	۶۸۰۰
$b_n$ : هزینه‌ی سیم کارت B	۳۰۰۰	۳۸۰۰	۴۶۰۰	۵۴۰۰	۶۲۰۰

پ) آیا  $a_n$  و  $b_n$  هر کدام می‌توانند جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی باشند؟ چرا؟

بله، زیرا هر دو دنباله‌های خطی با قدرنسبت ثابت هستند.

اگر جواب مثبت است، قدرنسبت هر یک را مشخص کنید.

$a_n$  = ۱۲۰۰ = قدرنسبت دنباله  $b_n$  = ۸۰۰ = قدرنسبت دنباله

ت) سارا در هر ماه حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً ۱۵۰ دقیقه با تلفن همراه مکالمه می‌کنند. به هر یک از آنها کدام سیم کارت را پیشنهاد می‌کنید؟ چرا؟

$$\left. \begin{aligned} a_{60} &= 2000 + (60)(30) = 3800 \\ b_{60} &= 3000 + (60)(20) = 4200 \end{aligned} \right\} \rightarrow a_{60} < b_{60}$$

$$\left. \begin{aligned} a_{150} &= 2000 + (150)(30) = 6500 \\ b_{150} &= 3000 + (150)(20) = 6000 \end{aligned} \right\} \rightarrow b_{150} < a_{150}$$

سیم کارت شرکت A برای سارا به صرفه‌تر و سیم کارت شرکت B برای فاطمه به صرفه‌تر است.

صفحه ۲۳

کار در کلاس



۱) الف) یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت مثبت مثال بزنید که جمله‌ی چهارم آن ۱۰ باشد.

$-2, 2, 6, 10, 14, \dots \quad d = 4$

ب) یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت منفی مثال بزنید که جمله‌ی چهارم آن ۱۰ باشد.

$19, 16, 13, 10, 7, \dots \quad d = -3$

پ) دنباله‌ای حسابی مثال بزنید که تنها سه جمله‌ی مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند.

$16, 9, 2, -5, -12, -17, \dots$

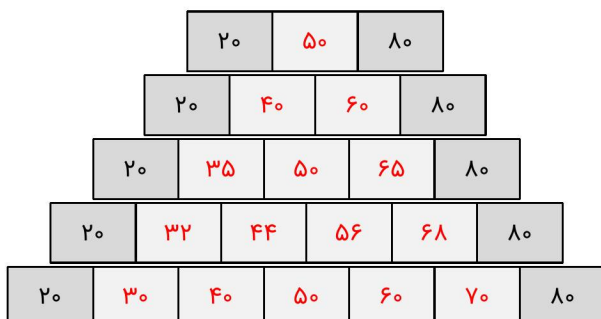
۲) الف) بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند. در این حالت می‌گوییم بین ۱۸ و ۶۲ سه واسطه‌ی حسابی درج کرده ایم.

حل: با فرض اینکه ۱۸ جمله اول باشد، قدرنسبت را به دست آورید و جدول را کامل کنید.

$$\begin{cases} t_1 = 18 \\ t_5 = 62 \Rightarrow t_1 + 4d = 62 \Rightarrow d = \frac{62 - 18}{4} = \frac{44}{4} = 11 \end{cases}$$

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$
۱۸	۲۹	۴۰	۵۱	۶۲

ب) بین ۲۰ و ۸۰ به تعداد مشخص شده در هر مورد واسطه‌ی حسابی درج کنید.





تمرین دنباله‌های حسابی صفحه ۲۴

۱) از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدر نسبت، جمله‌ی بیست و یکم را بیابید.

(الف) دنباله حسابی) ۳, ۱۰, ۱۷, ۲۴, ...

$$a_1 = 3, d = 7 \Rightarrow a_n = 7n - 4 \Rightarrow a_{21} = 7(21) - 4 = 147 - 4 = 143$$

(ب) دنباله حسابی نیست) ۱, ۲, ۴, ۸, ...

(پ) دنباله حسابی)  $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \dots$

$$a_1 = \sqrt{3}, d = \sqrt{3} \Rightarrow a_n = \sqrt{3}n \Rightarrow a_{21} = 21\sqrt{3}$$

(ت) دنباله حسابی) ۱۰, ۷, ۴, ۱, ...

$$a_1 = 10, d = -3 \rightarrow a_n = -3n + 13 \rightarrow a_{21} = -3(21) + 13 = -63 + 13 = -50$$

(ث) دنباله حسابی)  $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots$

$$a_1 = \frac{2}{5}, d = \frac{1}{5} \rightarrow a_n = \frac{1}{5}n + \frac{1}{5} \rightarrow a_{21} = \frac{1}{5}(21) + \frac{1}{5} = \frac{22}{5}$$

(ج) دنباله حسابی) ۲, ۲, ۲, ۲, ...

$$a_1 = 2, d = 0 \rightarrow a_n = 0 \times n + 2 = 2 \rightarrow a_{21} = 2$$

۲) در یک دنباله‌ی حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به دست آوردن جمله‌ی اول و قدر نسبت، جملات دنباله را بنویسید.

$$\begin{cases} a_n = a + (n-1)d \\ a_3 = a + 2d = 20 \\ a_7 = a + 6d = 56 \end{cases} \rightarrow 4d = 36 \rightarrow d = 9$$

$$a + 2d = 20 \rightarrow a + 18 = 20 \rightarrow a = 2$$

۲, ۱۱, ۲۰, ۲۹, ...

بنابراین جملات دنباله به صورت زیر هستند:

۳) در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع سه جمله‌ی اول ۳ و مجموع سه جمله‌ی بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

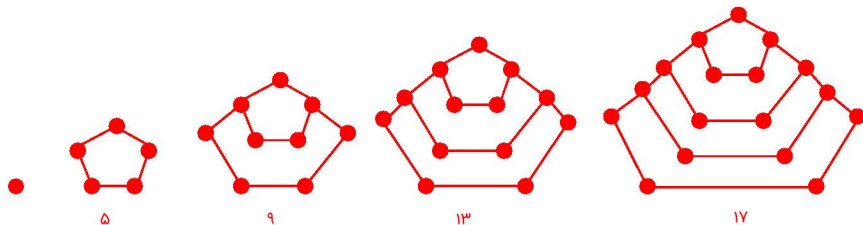
$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 3 \rightarrow a + (a+d) + (a+2d) = 3 \\ a_4 + a_5 + a_6 = 39 \rightarrow (a+3d) + (a+4d) + (a+5d) = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 3d = 3 \\ 3a + 12d = 39 \end{cases} \Rightarrow 9d = 36 \Rightarrow d = 4$$

$$3a + 3d = 3 \Rightarrow 3a + 12 = 3 \Rightarrow 3a = -9 \Rightarrow a = -3$$

-۳, ۱, ۵, ...

جملات دنباله به صورت زیر خواهد بود:

۴) الف) دو جمله‌ی بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.



این الگو یک دنباله حسابی است که جمله اول آن ۱ و قدر نسبت آن ۴ است

ب) جمله‌ی عمومی آن را مشخص کنید.

$$\begin{cases} a = 1 \\ d = 4 \end{cases} \Rightarrow a_n = 1 + (n-1)(4) = 4n - 3$$

(پ) جمله‌ی چندم این دنباله ۳۹۷ است؟

$$a_n = 397 \Rightarrow 397 = 4n - 3 \Rightarrow 4n = 400 \Rightarrow n = 100$$

بنابراین جمله صدم برابر ۳۹۷ است.

(۵) الف) واسطه‌ی حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

$$5, x, 11 \Rightarrow x = \frac{11+5}{2} = 8$$

ب) واسطه‌ی حسابی بین ۲۰ و ۳۰ چه عددی است؟

$$20, x, 30 \Rightarrow x = \frac{30+20}{2} = 25$$

(پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

واسطه حسابی بین دو عدد میانگین آن دو عدد است.

(۶) مسئله زیر در پایپروس را بنویسید. آن را حل کنید.

«۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد.»

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 100 & (\otimes) \\ a_1 + a_2 = \frac{1}{3}(a_3 + a_4 + a_5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a_1 + 10d = 100 & (*) \\ 2a_1 + d = a_1 + 3d \Rightarrow a_1 = 2d \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} 5(2d) + 10d = 100 \Rightarrow d = 5 \xrightarrow{(\otimes)} 5a_1 + 50 = 100 \Rightarrow 5a_1 = 50 \Rightarrow a_1 = \frac{50}{5} = 10 \Rightarrow 10, 15, 20, 25, 30$$

دنباله هندسی

صفحه ۲۵

فعالیت



(۱) جدول مقابل را کامل کنید و  $t_n$  را بنویسید.

روز: $n$	$t_n$ : تعداد افراد جدیدی که در روز $n$ مبتلا می‌شوند.
۱	۲ (امید و محسن)
۲	$2 \times 2 = 2^2$
۳	$4 \times 2 = 2^3$
۴	$8 \times 2 = 2^4$
۵	$16 \times 2 = 2^5$
۶	$32 \times 2 = 2^6$
⋮	⋮
$n$	$t_n = 2^n$

(۲) در روز دهم چند فرد جدید مبتلا می‌شوند؟

$2^{10}$  فرد جدید

(۳) در روز یازدهم چند شخص جدید به این بیماری مبتلا می‌شوند؟

$2^{11}$  فرد جدید

(۴) در روز چندم تعداد افراد جدیدی که به بیماری آنفولانزا مبتلا می‌شوند، برابر ۱۶۳۸۴ نفر می‌شود.

$$2^n = 16384 = 2^{14} \Rightarrow n = 14 \Rightarrow \text{روز چهاردهم}$$

صفحه ۲۵

فعالیت



در حالت کلی در یک دنباله‌ی هندسی، اگر جمله‌ی اول  $t_1$  و قدر نسبت  $r$  باشد، جملات آن به شکل زیر خواهند بود. جدول را تکمیل کنید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	...	$t_n$	...
$t_1$	$t_1 r$	$t_1 r^2$	$t_1 r^3$	$t_1 r^4$	...	$t_1 r^{n-1}$	...

صفحه ۲۶

کار در کلاس



۱) نرگس و نگار برای محاسبه‌ی هفتمین جمله‌ی دنباله‌ی هندسی ... ۱, ۳, ۹, ... روش‌های مقابل را به کار برده‌اند. کدام یک از آنها این مثال را درست حل کرده‌اند؟ توضیح دهید.

<p><b>نگار</b></p> $r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ $t_7 = 9 \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}$ $= \frac{1}{81}$	<p><b>نرگس</b></p> $r = \frac{9}{3} = 3$ $t_7 = 9(3)^{7-1}$ $= 6561$
--	--

نگار درست حل کرده است. زیرا قدر نسبت در دنباله هندسی برابر نسبت جمله دوم به جمله اول در هر دو جمله‌ی متوالی است. (۲) در دنباله‌های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کنید و دو جمله‌ی بعدی را بنویسید.

- الف)  $2, 6, 18, 54, 162, 486, \dots \rightarrow r = \frac{6}{2} = 3, a_n = 2 \times 3^{n-1}$
- ب)  $5, 15, 45, 135, 405, \dots \rightarrow r = \frac{15}{5} = 3, b_n = 5 \times 3^{n-1}$
- پ)  $6, -6, 600, -6000, 60000, -600000, \dots \rightarrow r = \frac{-60}{6} = -10, c_n = 6 \times (-10)^{n-1}$
- ت)  $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \rightarrow r = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, d_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

۳) الف) اگر بین ۳ و ۴۸، عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند. در این حالت می‌گوییم ۱۲ یک واسطه‌ی هندسی بین ۳ و ۴۸ است. برای این کار به جز ۱۲ چه عدد دیگری را می‌توان در نظر گرفت؟

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_3 = 48 \end{cases} \Rightarrow t_3 = t_1 r^{3-1} = 48 \Rightarrow 3r^2 = 48 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = \pm 4$$

	$t_1$	$t_2$	$t_3$
$r = 4$	۳	۱۲	۴۸
$r = -4$	۳	-۱۲	۴۸

ب) بین ۳ و ۴۸ سه واسطه‌ی هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟

خیر، جواب یکتا نیست و دو دنباله حاصل می‌شود یکی به قدرنسبت  $+4$  و دیگری با قدرنسبت  $-4$ .

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_5 = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ ar^4 = 48 \end{cases} \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} 3, 6, 12, 24, 48 \\ 3, -6, 12, -24, 48 \end{cases}$$

(پ) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنباله‌ی هندسی حاصل شود.

	۱۰	۲۰۰	۴۰۰۰	$10r^{3-1} = 4000 \Rightarrow r = 20$		
	۱۰	۲۰۰	۴۰۰۰	۸۰۰۰۰	$10r^{4-1} = 80000 \Rightarrow r = 20$	
۴	۱۲	۳۶	۱۰۹	۳۲۴	۹۷۲	$4r^{6-1} = 972 \Rightarrow r = 3$

(۴) یک کوه یخی هزار تنی، در هر روز یک پنجم وزن خود را از دست می‌دهد. پس از گذشت ۵ روز کدام گزینه درست است؟

- (الف) چیزی از آن باقی نمی‌ماند.  
 (ب) حدود  $\frac{1}{3}$  آن باقی می‌ماند.  
 (پ) تقریباً نصف آن آب می‌شود.  
 (ت) حدود  $\frac{2}{3}$  آن باقی می‌ماند.

$a_1 = 1000$

اگر  $a_n$  را دنباله مقدار یخ باقی‌مانده پس از  $n$  روز در نظر بگیریم، در این صورت در هر روز  $\frac{4}{5}$  مقدار قبلی باقی ماند.

$a_2 = 1000 - 1000 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \times 1000$

یعنی جمله اول برابر  $a_1 = 1000$  و قدر نسبت برابر  $r = \frac{4}{5}$  است. پس داریم:

$a_n = 1000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow a_5 = 1000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 4096/5$

بنابراین تقریباً نصف آن آب می‌شود و گزینه (پ) درست است.

**تمرین درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی**  
صفحه ۲۷

(۱) از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

(الف) ۷, ۲۸, ۱۱۲, ۴۴۸, ...  $r = \frac{28}{7} = \frac{112}{28} = 4$  دنباله هندسی با قدر نسبت ۴

(ب)  $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \dots$   $d = 2\sqrt{5}$  دنباله حسابی با قدرنسبت

(پ)  $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \dots$   $r = \frac{-1/2}{1} = \frac{1/4}{-1/2} = -\frac{1}{2}$  دنباله هندسی با قدرنسبت

(ت) ۵, ۵, ۵, ۵, ... دنباله هندسی با قدرنسبت ۱  $r = \frac{5}{5} = 1$  و دنباله حسابی با قدرنسبت صفر

(۲) چند دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت  $\frac{4}{5}$  می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

بی‌شمار دنباله، با جمله‌ی اول دلخواه می‌توان ساخت:

$a_1 = -1 \Rightarrow -1, -\frac{4}{5}, -\frac{16}{25}, -\frac{64}{125}, \dots$

$a_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{25}, \frac{16}{125}, \dots$



۳) درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.  
الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی.

نادرست است، مثلاً دنباله مربعی  $1, 4, 9, \dots$  نه حسابی است و نه هندسی

ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

نادرست است. همانطور که در فعالیت‌ها دید دنباله‌هایی مانند  $3, 3, 3, 3, \dots$  هم حسابی‌اند (با  $d = 0$ ) و هم هندسی (با  $r = 1$ ).

۴) علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه‌ی دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

پس از هر سال قیمت دوچرخه ۸۰٪ قیمت سال قبلش است بنابراین تصاعدی هندسی با قدر نسبت  $\frac{80}{100}$  داریم. بعد از سال هم یعنی جمله ی چهارم این تصاعد؛

$$a_4 = a_1 r^3 = 500000 \times \left(\frac{80}{100}\right)^3 = 256000$$

بنابراین، بعد از سه سال دوچرخه را به قیمت ۲۵۶ هزار تومان می‌تواند بفروشد.

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت  $n$  سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

$$\left. \begin{aligned} a &= 500000 \\ r &= \frac{80}{100} = \frac{4}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_n = 500000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

۵) حاصل ضرب بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی مقابل را محاسبه کنید.  $2, 4, 8, \dots$

$$\Rightarrow a = 2, r = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\text{جمله اول} = a \times ar \times ar^2 \times ar^3 \times \dots \times ar^{19} = a^{20} \times r^{1+2+\dots+19} = a^{20} \times r^{\frac{20 \times 19}{2}} \Rightarrow 2^{20} \times 2^{190} = 2^{210}$$

۶) جملات سوم و ششم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

$$\left\{ \begin{aligned} a_3 = a_1 r^2 = 12 \\ a_6 = a_1 r^5 = 96 \end{aligned} \right. \Rightarrow \frac{a_1 r^5}{a_1 r^2} = \frac{96}{12} \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2 \mid \xrightarrow{a_1=3} 3, 6, 12, 24, \dots$$

۷) بنا بر آمار منتشر شده از جانب پزشکی قانونی کشور، آمار تلفات جاده‌ای از عدد ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۵۸۴ نفر در سال ۱۳۹۴ کاهش یافته است که نشان دهنده‌ی حدود ۵ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد:

الف) پیش‌بینی می‌شود در هر یک از سال‌های منتهی به سال ۱۴۰۰ چند نفر از هم وطن‌های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدهند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰
تعداد تلفات مورد انتظار	۱۶۵۸۴	۱۵۷۵۵	۱۴۹۶۷	۱۴۲۱۹	۱۳۵۰۷	۱۲۸۳۲	۱۲۱۹۱

ب) اعداد حاصل، چه نوع دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟

آمار مربوط به سال ۱۳۹۴ را به عنوان جمله اول در نظر بگیرید. بنابراین دنباله هندسی با جمله‌ی عمومی  $a_n = 16584 \left(\frac{95}{100}\right)^{n-1}$  حاصل میشود.