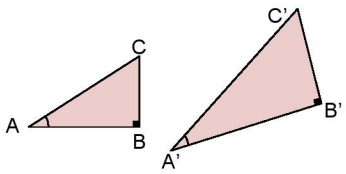
فصل ۲: مثلثات

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

کار در کلاس ..... صفحه ۳۰

۱) در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABC و $A'B'C'$، $A = A'$. جاهای خالی را کامل کنید.



$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

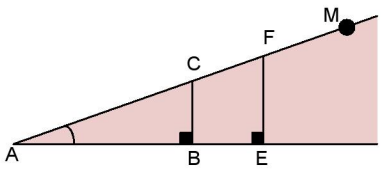
۲) از تساوی $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$ ، می‌توان نتیجه گرفت $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ (چرا؟). با توجه به این نکته، جاهای خالی را کامل کنید:

چون $AB \times A'C' = AC \times A'B'$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad , \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

فعالیت ..... صفحه ۳۰

۱) در شکل سمت راست، درستی تساوی $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$ را بررسی کنید.



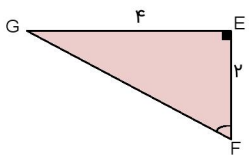
$$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF} \Rightarrow AB \times EF = BC \times AE \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$$

۲) نقطه‌ی دیگری مثل M را در امتداد AC در نظر بگیرید و از آن نقطه، عمودی بر ضلع دیگرِ زاویه A رسم کنید و پای عمود را N بنامید. اکنون جاهای خالی را کامل کنید:

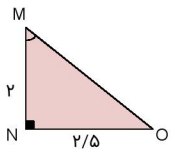
$$\frac{BC}{AB} = \frac{MN}{AN} = \frac{EF}{AE}$$

فعالیت ..... صفحه ۳۱

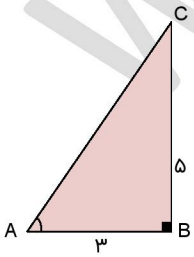
۱) در هر یک از شکل‌های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.



$$\tan F = \frac{GE}{EF} = \frac{۴}{۲}$$
$$\cot F = \frac{EF}{GE} = \frac{۲}{۴}$$

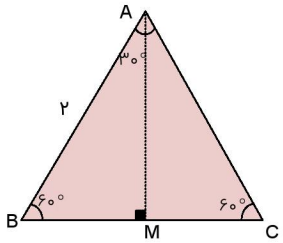


$$\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{۲}{۲/۵}$$
$$\tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{۲/۵}{۲}$$



$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{۵}{۳}$$
$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{۳}{۵}$$

۲) مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با اضلاعی به طول۲ واحد را در نظر بگیرید.



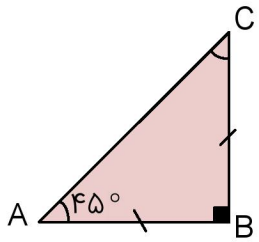
الف) محل برخورد نیمساز زاویه‌ی A با پاره‌خط BC را M بنامید. با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین، AM عمود منصف ضلع BC است.

بنابراین: $BM = MC =$ ۱ واحد

ب) با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس، طول AM و حاصل کسرهای زیر را بدست آورید.

$$\tan ۳۰° = \frac{BM}{AM} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \ , \ \tan ۶۰° = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{۳}}{۱} = \sqrt{۳}.$$

پ) با استفاده از یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین، تانژانت و کتانژانت زاویه‌ی $۴۵°$ را پیدا کنید.



$$\tan ۴۵° = \frac{BC}{BA} = ۱$$

$$\cot ۴۵° = \frac{AB}{CB} = ۱$$

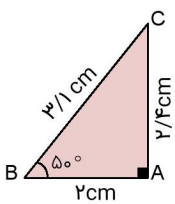
کار در کلاس ..... صفحه ۳۲

به کمک شکل فعالیت قبل، با پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های $۳۰°$ و $۶۰°$ جدول زیر را کامل کنید.

مقدار	$۳۰°$	$۴۵°$	$۶۰°$
$\sin A$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$\tan A$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
$\cot A$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

فعالیت ..... صفحه ۳۳

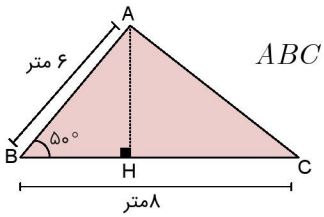
۱) یک زاویه‌ی $۵۰°$ رسم کنید. با تشکیل یک مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری طول‌های مورد نظر با یک خط‌کش مدرج، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $۵۰°$ را به صورت تقریبی حساب کنید. سپس با ماشین‌حساب، مقادیر واقعی را به دست آورید و با مقادیر قبل مقایسه کنید.



$$\sin ۵۰° = \frac{AC}{BC} = \frac{۲/۴}{۳/۱} = ۰/۷۷۰ \ , \ \sin ۵۰° = ۰/۷۶۶ \qquad \tan ۵۰° = \frac{AC}{AB} = \frac{۲/۴}{۲} = ۱/۲ \ , \ \tan ۵۰° = ۱/۹۱$$

$$\cos ۵۰° = \frac{AB}{BC} = \frac{۲}{۳/۱} = ۰/۶۴ \ , \ \cos ۵۰° = ۰/۶۴۲ \qquad \cot ۵۰° = \frac{AB}{AC} = \frac{۲}{۲/۴} = ۰/۸۳ \ , \ \cot ۵۰° = ۰/۸۳۹$$

۲) می‌خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می‌دانیم:



مساحت مثلث ABC = $\frac{۱}{۲}$ ×قاعده ×ارتفاع

الف) با توجه به اینکه $\sin ۵۰° \simeq ۰/۷۶$، داریم:

$$sin۵۰° = \frac{AH}{\text{وتر}} = \frac{AH}{۶} \Rightarrow AH \simeq ۶ \times sin۵۰° = ۶ \times ۰/۷۶ = ۴/۵۶$$

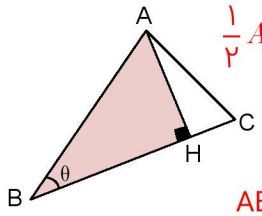
ب) با توجه به قسمت (الف) داریم:

مساحت مثلث ABC $\frac{۱}{۲} AH \times BC \simeq \frac{۱}{۲} \times ۴/۵۶ \times ۸ \times \simeq ۱۸/۲۴$

کار در کلاس ..... صفحه ۳۴

۱) در هر مثلث با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع مثلث و اندازه زاویه‌ی بین آنها نشان دهید:

مساحت $\overset{\Delta}{ABC} = \frac{۱}{۲} \times AB \times BC \times \sin B$

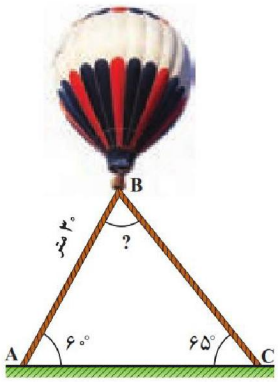


مساحت مثلث ABC= $\frac{۱}{۲} AH \times BC$

$$\sin\theta = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \times \sin\theta$$

مساحت مثلث ABC $= \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲}(AB \times \sin\theta) \times BC = \frac{۱}{۲} AB \times BC \times \sin\theta$

۲) در راه‌پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است. می‌خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم.



الف) ابتدا اندازه‌ی زاویه‌ی B را به دست آورید. سپس ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم کنید و آن را BH بنامید.

$B = ۱۸۰° - (۶۰° + ۶۵°) = ۵۵°$

ب) طول BH را با استفاده از سینوس زاویه‌ی A به دست آورید.

$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \times \sin A = ۳۰ \times \sin ۶۰° = ۳۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۳۰\sqrt{۳}}{۲} = ۱۵\sqrt{۳} = ۲۵/۹$$

پ) اکنون با استفاده از سینوس زاویه $۶۵°$ ، طول طناب دوم را پیدا کنید.

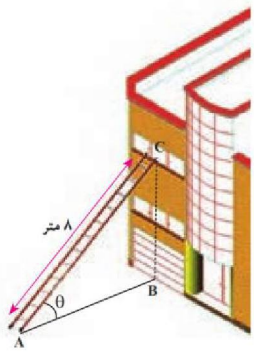
$$\sin C = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BC = \frac{BH}{\sin C} = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{\sin ۶۵°} = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۰/۹} = ۲۸/۸۶$$ طول طناب دوم (متر)

۳) مطابق شکل مقابل نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجره‌ی ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویه‌ی نردبان با سطح زمین $\theta = ۳۰°$ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصله‌ی پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟

$$\sin\theta = \frac{BC}{۸} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{BC}{۸} \Rightarrow ۲BC = ۸ \Rightarrow BC = ۴$$

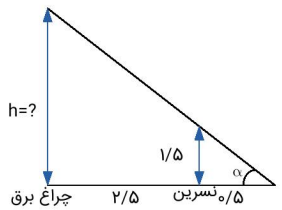
اکنون به کمک رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$AB^۲ = AC^۲ - BC^۲ = ۶۴ - ۱۶ = ۴۸ \Rightarrow AB = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}$$



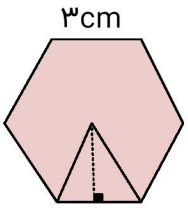
تمرین درس اول: نسبت‌های مثلثاتی
صفحه ۳۴

۱) نسرین می‌خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایه‌ی آن ۳ متر است، حساب کند. قد نسرین ۱/۵ متر و طول سایه‌ی او در همان لحظه ۰/۵ متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟



$$\tan\alpha = \frac{۱/۵}{۰/۵} = \frac{h}{۳} \Rightarrow h = ۹m$$

۲) مساحت شش ضلعی منتظم زیر را بدست آورید.

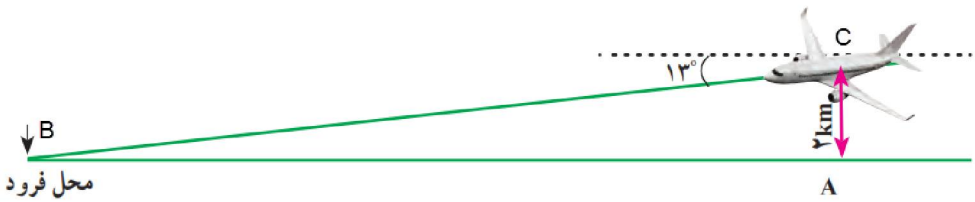


در شش ضلعی منتظم اندازه ه ضلع با اندازه شعاع دایره محیطی برابر است. پس شش ضلعی منتظم را می‌توان به ٦ مثلث متساوی‌الاضلاع برابر تبدیل کرد که هر زاویه آن ٦٠ درجه است.

مساحت شش ضلعی = ٦ برابر مساحت مثلث $= ۶ \times (\frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۳ \times \sin ۶۰^\circ) = \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$

۳) یک هواپیما در ارتفاع $۲km$ از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه‌ی هواپیما با افق حدود ۱۳° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه‌ی A فرود می‌آید.

$\tan ۱۳^\circ \simeq ۰/۲۳$

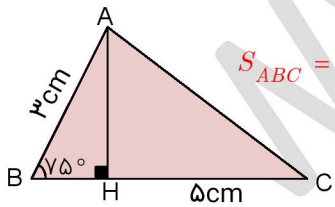


مثلث ABC قائم الزاویه است و $CBA = ۱۳^\circ$. با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی داریم:

$$\tan ۱۳^\circ = \frac{AC}{AB} \Rightarrow ۰/۲۳ = \frac{۲}{AB} \Rightarrow AB = \frac{۲}{۰/۲۳} \simeq ۸/۷km$$

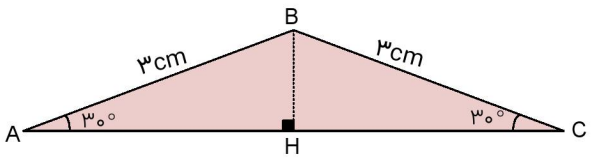
بنابراین هواپیما تقریباً در در فاصله ۸/۷ کیلومتری از نقطه A فرود می‌آید.

٤) فرض کنید $\sin ۷۵^\circ \simeq ۰/۹۶$. مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.



$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB \times BC \times \sin ۷۵^\circ = S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times \sin ۷۵^\circ \simeq \frac{۱۵}{۲} \times ۰/۹۶ = ۷/۲$$

۵) مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



$$S_{ABC} = ۲S_{ABH} = ۲ \times \frac{۱}{۲} AB \times BH \times \sin(۶۰^\circ) = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times ۳ \times \frac{۳}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$

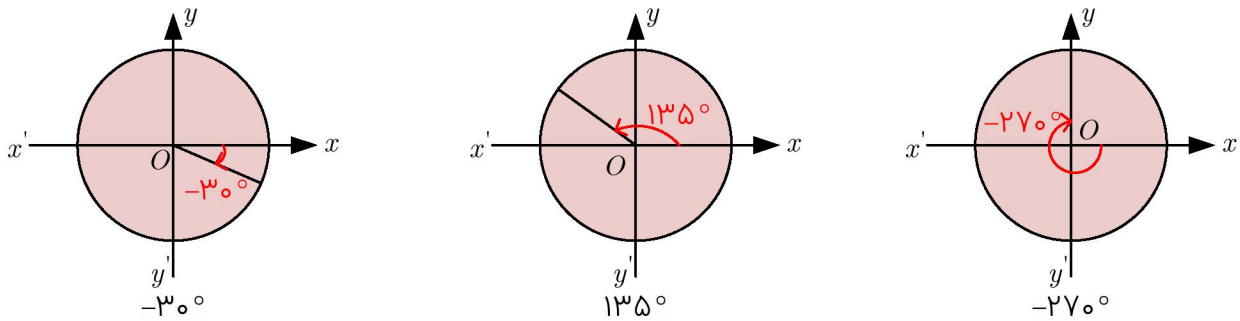
$$\sin ۳۰^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{BH}{۳} \Rightarrow BH = \frac{۳}{۲}$$

فصل ۲: مثلثات

درس دوم: دایره مثلثاتی

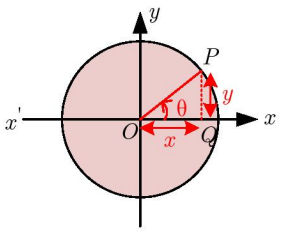
فعالیت صفحه ۳۶

۱) هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره‌های مثلثاتی داده شده نشان دهید.



-۳۰° ۱۳۵° -۲۷۰°

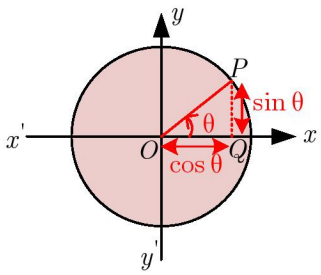
۲) فرض کنید $P(x,y)$ نقطه‌ای دلخواه روی دایره‌ی مثلثاتی روبرو باشد و θ زاویه‌ای است که نیم خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{Ox}$ می‌سازد. از نقطه‌ی P خطی بر محور $\overrightarrow{Ox}$ عمود می‌کنیم و محل برخورد را Q می‌نامیم.



الف) در مثلث OPQ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را به دست آورید.

$$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ} \qquad \sin\theta = \frac{PQ}{OP} = PQ \qquad \cos\theta = \frac{OQ}{OP} = OQ$$

ب) با توجه به قسمت (الف) می‌توان دید فاصله‌ی Q تا مبدأ با $\cos\theta$ برابر است و فاصله‌ی نقطه‌ی P تا پای عمود، یعنی نقطه‌ی Q با $\sin\theta$ برابر است.



کار در کلاس صفحه ۳۷

۱) مشخص کنید هر یک از زاویه‌های زیر در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد؟

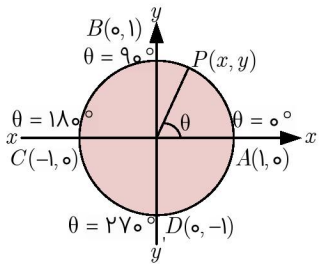
الف) -۳۰° (ربع چهارم) ب) ۶۵° (ربع اول) پ) ۱۸۲° (ربع سوم) ت) -۹۵° (ربع سوم)

۲) با توجه به آنچه در فعالیت قبل، به دست آوردید، توضیح دهید که اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ای در ربع اول باشد (زاویه در ربع اول باشد)، آنگاه چرا نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه همگی مثبت‌اند؟

زیرا مقادیر PQ و OP همواره مثبت خواهند بود و در نتیجه هر سه نسبت مثلثاتی عددی مثبت می شوند.

فعالیت ..... صفحه ۳۸

۱) در دایره‌ی روبه‌رو اگر $\theta = ۹۰^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.



$\cos ۹۰^\circ = ۰$

$\sin ۹۰^\circ = ۱$

$\tan ۹۰^\circ = \frac{y}{x} = \frac{۱}{۰} = \infty$

$\cot ۹۰^\circ = \frac{۰}{۱} = ۰$

تانژانت ۹۰ درجه تعریف نشده است.

۲) اگر $\theta = ۱۸۰^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

اگر $\theta = ۱۸۰^\circ$ باشد، نقطه P به مکان نقطه C انتقال می یابد و داریم:

$\sin ۱۸۰^\circ = ۰$, $\cos ۱۸۰^\circ = -۱$, $\tan ۱۸۰^\circ = \frac{y}{x} = \frac{۰}{-۱} = ۰$, $\cot ۱۸۰^\circ = \frac{-۱}{۰} = -\infty$ تعریف نشده

۳) اگر $\theta = ۲۷۰^\circ$ نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

$\sin ۲۷۰^\circ = -۱$

$\cos ۲۷۰^\circ = ۰$

$\tan ۲۷۰^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-۱}{۰} = -\infty$ تعریف نشده

$\cot ۲۷۰^\circ = \frac{x}{y} = \frac{۰}{-۱} = ۰$

کار در کلاس ..... صفحه ۳۸

با توجه به نتایج بالا، جدول زیر را کامل کنید.

مقدار	۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
$\sin\theta$	۰	۱	۰	-۱	۰
$\cos\theta$	۱	۰	-۱	۰	۱
$\tan\theta$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot\theta$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

فعالیت ..... صفحه ۳۸

۱) فرض کنید θ زاویه‌ای در ربع سوم دایره‌ی مثلثاتی باشد. با توجه به اینکه $y = \sin\theta$ و $x = \cos\theta$ و در ربع سوم، $x, y < ۰$ علامت هر یک از نسبت‌های مثلثاتی θ را در ربع سوم مشخص کنید.

$\sin\theta = y < ۰$ $\cos\theta = x < ۰$ $\tan\theta = \frac{y}{x} > ۰$ $\cot\theta = \frac{x}{y} > ۰$

۲) فرض کنید α زاویه‌ای در دایره‌ی مثلثاتی در ربع دوم باشد. فعالیت قبل را برای α نیز تکرار کنید.

در ربع دوم $x < ۰$ و $y > ۰$ است، پس داریم:

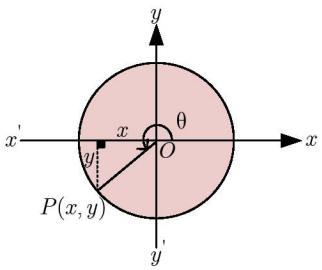
$\sin\alpha = y > ۰$ $\cos\alpha = x < ۰$ $\tan\alpha = \frac{y}{x} < ۰$ $\cot\alpha = \frac{x}{y} < ۰$

۳) جدول زیر را کامل کنید.

مقدار	ربع اول $x, y > ۰$	ربع دوم $x < ۰, y > ۰$	ربع سوم $x < ۰, y < ۰$	ربع چهارم $x > ۰, y < ۰$
$\sin\theta$	+	+	-	-
$\cos\theta$	+	-	-	+
$\tan\theta$	+	-	+	
$\cot\theta$	+	-	+	-

فعالیت صفحه ۳۹

۱) فرض کنید نقطه P روی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد به طوری که $\cos\theta = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$. می‌دانیم θ در ربع سوم مثلثاتی قرار دارد. بنابراین $y = \sin\theta = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$.



الف) مختصات نقطه P را به دست آورید.

$$x^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow (-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow y^۲ = \frac{۱}{۲} \quad , \quad y = \pm\sqrt{\frac{۱}{۲}} = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

چون θ در ربع سوم است، پس $y < ۰$ است و در نتیجه $y = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$ و لذا $y = \sin\theta = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$

ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را به دست آورید.

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = ۱ \quad , \quad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = ۱$$

۲) اگر $\cos\alpha = \frac{-۲}{۵}$ آنگاه در مورد ناحیه‌ای که α در آن قرار می‌گیرد، بحث کنید.

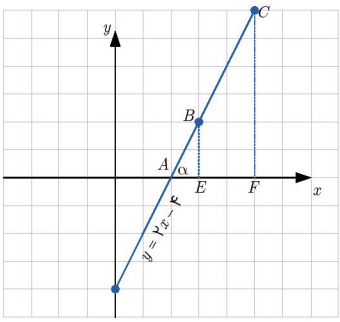
چون مقدار کسینوس منفی است، α می‌تواند در ناحیه دوم یا سوم قرار گیرد. چون در این دو ناحیه مقدار x منفی است.

۳) زاویه‌ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

چنین زاویه‌ای باید در ناحیه‌ای قرار می‌گیرد که در آن $\sin\theta = y < ۰$ و $\cos\theta = x > ۰$ است، یعنی در ربع چهارم واقع شود.پس کافی است مقدار این زاویه بین ۲۷۰° تا ۳۶۰° باشد. مثلاً زاویه‌ی ۳۲۰° یکی از جواب‌ها است.

فعالیت ..... صفحه ۴۰

نمودار خط $y = ۲x - ۴$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. دو نقطه‌ی B و C روی این خط را در نظر بگیرید و خطی از آنها به محور x ها عمود کنید. پای عمودها را به ترتیب، E و F بنامید.



الف) تانژانت زاویه‌ی α را به دست آورید.

$$\tan\alpha = \frac{CF}{AF} = \frac{۶}{۳} = ۲ \quad \text{یا} \quad \tan\alpha = \frac{BE}{AE} = \frac{۲}{۱} = ۲$$

ب) شیب این خط را پیدا کنید.

$$\text{شیب خط} = \frac{\text{اختلاف عرض ها}}{\text{اختلاف طول ها}} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{۶ - ۲}{۵ - ۳} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

پ) از مقایسه‌ی قسمت (الف) و(ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ توضیح دهید.

شیب خط راست با تانژانت زاویه‌ای که آن خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد، برابر است. شیب خط قائم برابر بی‌نهایت می شود و زاویه خط قائم هم برابر ۹۰ درجه است که تانژانت آن هم برابر بی‌نهایت است.

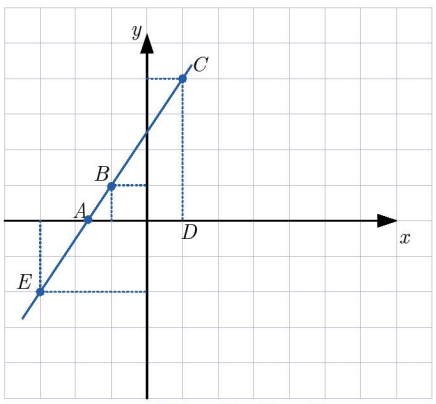
کار در کلاس ..... صفحه ۴۰

۱) فعالیت بالا را برای خط‌های زیر، تکرار کنید.

الف)

$۲y - ۳x = ۵$

x	-۱	-۳	۱
y	۱	-۲	۴



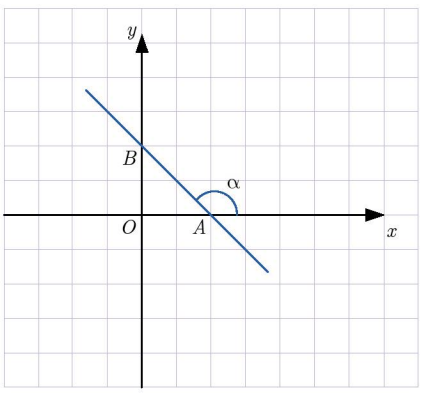
$$\tan\alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{۴}{\frac{۸}{۳}} = \frac{۱۲}{۸} = \frac{۳}{۲}$$

$$\text{شیب خط} = \frac{y_c - y_B}{x_C - x_B} = \frac{۴ - ۱}{۱ - (-۱)} = \frac{۳}{۲}$$

ب)

$x + y = ۲$

x	۰	۲
y	۲	۰



$$\tan\alpha = -\frac{OB}{OA} = -\frac{۲}{۲} = -۱$$

$$\text{شیب خط} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۲ - ۰}{۰ - ۲} = -۱$$

۲) معادله خطی را بنویسید که زاویه‌ی آن با محور xها ۳۰° است و از نقطه‌ی $(۱,۰)$ می‌گذرد.

شیب خط $\tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

$$y = ax + b \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x + b \Rightarrow ۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(۱) + b \Rightarrow b = \frac{-\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x - \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

تمرین درس دوم: دایره مثلثاتی
صفحه ۴۰

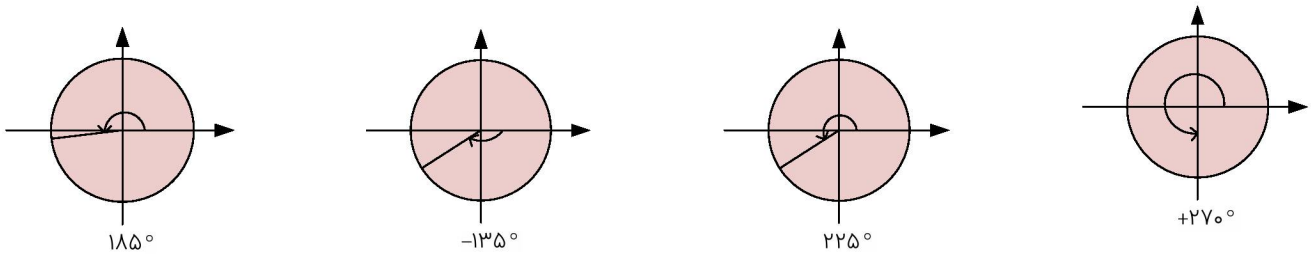
۱) هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره‌ی مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرند.

الف) $+۲۷۰^\circ$
روی مرز ربع سوم و چهارم

ب) ۲۲۵°
ربع سوم

پ) -۱۳۵°
ربع سوم

ت) ۱۸۵°
ربع سوم



۲) در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.

الف) $\cos\alpha = \frac{۳}{۷}$ (α در ربع چهارم)

$$\cos\alpha = x \Rightarrow x = \frac{۳}{۷} \Rightarrow (\frac{۳}{۷})^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow \frac{۹}{۴۹} + y^۲ = ۱ \Rightarrow y^۲ = \frac{۴۰}{۴۹} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{۴۰}{۴۹}} = \pm\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۷}$$

چون α در ربع چهارم است $y = \frac{-۲\sqrt{۱۰}}{۷}$ قابل قبول است. بنابراین:

$$\sin\alpha = y = \frac{-۲\sqrt{۱۰}}{۷} \quad , \quad \tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\frac{-۲\sqrt{۱۰}}{۷}}{\frac{۳}{۷}} = \frac{-۲\sqrt{۱۰}}{۳} \quad , \quad \cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{-۳}{۲\sqrt{۱۰}}$$

ب) $\sin\beta = \frac{-۱}{۲}$ (β در ربع سوم)

$$\sin\beta = y \Rightarrow y = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow x^۲ + (\frac{-۱}{۲})^۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ = \frac{۳}{۴} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

چون β در ربع سوم است پس x منفی است، یعنی $x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ بنابراین:

$$\cos\beta = x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \quad , \quad \tan\beta = \frac{-\frac{۱}{۲}}{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \quad , \quad \cot\beta = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{-\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$$

۳) اگر $\tan\theta$ و $\sin\theta$ هم علامت باشند، آنگاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

سینوس در ربع اول و دوم مثبت است و در ربع سوم و چهارم منفی. تانژانت در ربع اول و سوم مثبت است و در ربع دوم و چهارم منفی است. پس سنوس و تانژانت هر دو در ربع اول مثبت هستند و در ربع چهارم هر دو منفی. پس θ باید در ربع اول یا چهارم باشد.

٤) حدود زاویه‌ی θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

الف) $\sin\theta > ۰ \ , \ \cos\theta > ۰$

θ در ربع اول است، زیرا: $y > ۰, x > ۰$

ب) $\sin\theta < ۰ \ , \ \cos\theta > ۰$

θ در ربع چهارم است، زیرا: $y < ۰, x > ۰$

۵) اگر $\sin\alpha \times \cos\alpha < ۰$، آنگاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می‌تواند قرار بگیرد؟ چرا؟

سینوس و کسینوس باید علامت مخالف هم داشته باشند (یکی مثبت و دیگری منفی باشد). بنابراین α در ربع دوم یا چهارم قرار دارد.

٦) زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به طوری که $\tan\alpha > \cot\alpha$. اکنون زاویه‌ای مثل β پیدا کنید، به طوری که $\cot\beta > \tan\beta$. از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$\alpha = ۶۰^\circ \Rightarrow \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳} \ , \ \cot ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \tan ۶۰^\circ > \cot ۶۰^\circ$$

$$\beta = ۳۰^\circ \Rightarrow \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \ , \ \cot ۳۰^\circ = \sqrt{۳} \Rightarrow \cot ۳۰^\circ > \tan ۶۰^\circ$$

برای زاویه‌های حاده، اگر زاویه از ٤٥ درجه بیشتر شود، $\tan\alpha > \cot\alpha$

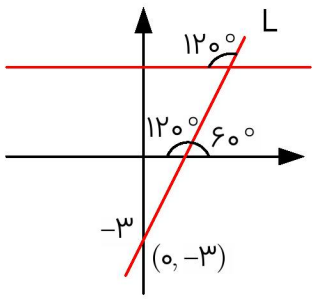
برای زاویه‌های حاده، اگر زاویه از ٤٥ درجه کمتر شود، $\cot\beta > \tan\beta$

۷) معادله خطی را بنویسید که زاویه‌ی آن با محور x ها ۴۵° است و نقطه‌ی $(۰,۲)$ روی آن قرار دارد.

شیب خط $= \tan ۴۵^\circ = ۱$

$$y = ax + b \Rightarrow y = ۱ \times x + b \Rightarrow ۲ = ۱ \times ۰ + b \Rightarrow b = ۲ \rightarrow y = x + ۲$$

۸) با توجه به شکل زیر، معادله‌ی خط L را به دست آورید.



شیب خط $= \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$

$$y = ax + b \Rightarrow y = \sqrt{۳}x + b$$

$$(۰, -۳) \Rightarrow -۳ = \sqrt{۳} \times ۰ + b \Rightarrow b = -۳$$

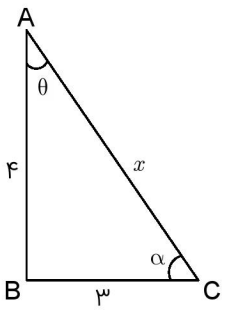
$$\Rightarrow y = \sqrt{۳}x - ۳$$

فصل ۲: مثلثات

درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

فعالیت ..... صفحه ۴۲

مثلث قائم‌الزاویه ABC را در نظر بگیرید.



الف) اندازه‌ی وتر یعنی x را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویه θ و α به دست آورید.

$$x^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ = ۱۶ + ۹ = ۲۵ \Rightarrow x^۲ = ۲۵ \Rightarrow x = ۵$$

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{۵} \qquad \sin\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{۴}{۵}$$

$$\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{۴}{۵} \qquad \cos\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{۵}$$

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{۳}{۵}}{\frac{۴}{۵}} = \frac{۳}{۴} \qquad \tan\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{\frac{AB}{AC}}{\frac{BC}{AC}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{۳}{۵}} = \frac{۴}{۳}$$

$$\cot\theta = \frac{۱}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{۴}{۳} \qquad \cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} = \frac{۳}{۴}$$

ب) با توجه به مقادیر حاصل در قسمت (الف) مقدار $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta$ و $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha$ را به دست آورید.

$$\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = (\frac{۳}{۵})^۲ + (\frac{۴}{۵})^۲ = \frac{۹}{۲۵} + \frac{۱۶}{۲۵} = ۱ \qquad \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = (\frac{۴}{۵})^۲ + (\frac{۳}{۵})^۲ = \frac{۱۶}{۲۵} + \frac{۹}{۲۵} = ۱$$

پ) درستی رابطه‌ی $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$ را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، بررسی کنید.

$$(\sin\theta)^۲ + (\cos\theta)^۲ = \sin^۲\theta + \cos^۲\theta = (\frac{BC}{AC})^۲ + (\frac{AB}{AC})^۲ = \frac{BC^۲ + AB^۲}{AC^۲} = \frac{AC^۲}{AC^۲} = ۱$$

ت) مشابه قسمت (ج) درستی رابطه‌ی $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$ را بررسی کنید.

$$(\sin\alpha)^۲ + (\cos\alpha)^۲ = \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = (\frac{AB}{AC})^۲ + (\frac{BC}{AC})^۲ = \frac{AB^۲ + BC^۲}{AC^۲} = \frac{AC^۲}{AC^۲} = ۱$$

کار در کلاس ..... صفحه ۴۳

با توجه به رابطه‌ی بالا، یعنی $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$ جاهای خالی را پر کنید:

الف) $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \sin^۲\alpha = ۱ - \cos^۲\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{۱ - \cos^۲\alpha}$

ب) $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{۱ - \sin^۲\alpha}$

کار در کلاس ..... صفحه ۴۳

رابطه‌های تانژانت بر حسب کسینوس و کتانژانت بر حسب سینوس

در این قسمت رابطه‌ای برای تانژانت بر حسب کسینوس یک زاویه و همچنین رابطه‌ای برای کتانژانت بر حسب سینوس به دست می‌آوریم:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\boxed{\Rightarrow\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\quad(\cos\alpha\neq 0)\qquad(1)}$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\Rightarrow 1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}\qquad(2)}$$

۳) اگر $90^\circ<\alpha<180^\circ$ و $\tan\alpha=\frac{-3}{4}$ ، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α را به دست آورید.

α زاویه‌ای در ربع دوم است و بنابراین کسینوس و کتانژانت آن منفی و سینوس ان مثبت است.

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+\left(\frac{-3}{4}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\frac{25}{16}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{16}{25}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{4}{5}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{-4}{5}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}=\frac{\sin\alpha}{\frac{-4}{5}}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{3}{5}$$

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{-\frac{3}{4}}=-\frac{4}{3}\Rightarrow\cot\alpha=-\frac{4}{3}$$

کار در کلاس ..... صفحه ۴۴

۱) با فرض با معنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $\sin^4\theta-\cos^4\theta=\sin^2\theta-\cos^2\theta$

طرف چپ $=\sin^4\theta-\cos^4\theta=(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\times(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=\sin^2\theta-\cos^2\theta$

ب) $\frac{1}{\cos\alpha}+\cot\alpha=\frac{\tan\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

طرف راست $=\frac{\tan\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sin\alpha}+\cot\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}+\cot\alpha=$ طرف چپ

۲) کدام یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

الف) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin\alpha\cos\alpha$

ب) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

الف) اتحاد نیست. زیرا برای مثال به ازای $\alpha = \frac{\pi}{۴}$ تساوی برقرار نیست.

$$\text{سمت چپ} = \sin^۴ \frac{\pi}{۴} + \cos^۴ \frac{\pi}{۴} = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۴ + (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۴ = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{سمت راست} = ۱ - ۲\sin\alpha\cos\alpha = ۱ - ۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = ۱ - ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱ - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} \neq ۰ \Rightarrow \text{اتحاد نیست}$$

ب) اتحاد است.

$$\sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha = \sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha + ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha - ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$$
$$= (\sin^۴\alpha + ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha + \cos^۴\alpha) - ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha = (\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha)^۲ - ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$$
$$= ۱ - ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$$

۳) با ضرب کردن طرفین اتحاد مثلثاتی $۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ در $\cot\alpha$ یک اتحاد مثلثاتی بسازید، سپس درستی آن را اثبات کنید.

$$\cot\alpha \times \left[۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \right] \Rightarrow \cot\alpha + (\tan^۲\alpha)(\cot\alpha) = \frac{\cot\alpha}{\cos^۲\alpha}$$

$$\Rightarrow \cot\alpha + \frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} \times \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow \cot\alpha + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{۱}{\sin\alpha.\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \cot\alpha + \tan\alpha = \frac{۱}{\sin\alpha.\cos\alpha}$$

اثبات این اتحاد به صورت زیر است:

$$\cot\alpha + \tan\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^۲\alpha + \sin^۲\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha} = \frac{۱}{\sin\alpha.\cos\alpha}$$

تمرین درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی
صفحه ۴۵

۱) فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیه‌ی دوم مثلثاتی باشد و $\cos\alpha = -\frac{۳}{۵}$. نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه‌ی α را به دست آورید.

در ربع دوم، سینوس مثبت، تانژانت منفی و کتانژانت منفی است.

$$\cos\alpha = -\frac{۳}{۵} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{۱ - \cos^۲\alpha} = \sqrt{۱ - (-\frac{۳}{۵})^۲} = \sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۴}{۵}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{۴}{۵}}{-\frac{۳}{۵}} = \frac{-۴}{۳}$$

$$\cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} = \frac{۱}{-\frac{۴}{۳}} = -\frac{۳}{۴}$$

۲) اگر $\tan\alpha = \frac{-۴}{۳}$ و α زاویه‌ای در ناحیه‌ی چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه‌ی α را به دست آورید.

در ربع چهارم، سینوس منفی، کسینوس مثبت و کتانژانت منفی است.

$$\tan^{۲}\alpha + ۱ = \frac{۱}{\cos^{۲}\alpha} \Rightarrow (-\frac{۴}{۳})^{۲} + ۱ = \frac{۱}{\cos^{۲}\alpha} \Rightarrow \frac{۱۶}{۹} + ۱ = \frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{۲۵}{۹} = \frac{۱}{\cos^{۲}\alpha} \Rightarrow \cos^{۲}\alpha = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{۳}{۵} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۳}{۵}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow -\frac{۴}{۳} = \frac{\sin\alpha}{\frac{۳}{۵}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{-۴}{۵}$$

$$\cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} = \frac{۱}{-\frac{۴}{۳}} = \frac{-۳}{۴} \Rightarrow \cot\alpha = -\frac{۳}{۴}$$

۳) اگر $\sin ۱۳۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتیِ زاویه‌ی ۱۳۵° را به دست آورید.

زاویه ۱۳۵ درجه در ربع دوم قرار دارد و در ربع دوم کسینوس، تانژانت و کتانژانت منفی است.

$$\cos\theta = \pm\sqrt{۱-\sin^{۲}\theta} \Rightarrow \cos ۱۳۵^\circ = -\sqrt{۱-\sin^{۲} ۱۳۵^\circ} = -\sqrt{۱-(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲}} = -\sqrt{\frac{۱}{۲}} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \cos ۱۳۵^\circ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = -۱ \Rightarrow \tan\theta = -۱$$

$$\cot\theta = \frac{۱}{\tan\theta} = \frac{۱}{-۱} \Rightarrow \cot\theta = -۱$$

٤) اگر $\tan ۲۴۰^\circ = \sqrt{۳}$ آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتیِ زاویه‌ی ۲۴۰° را به دست آورید.

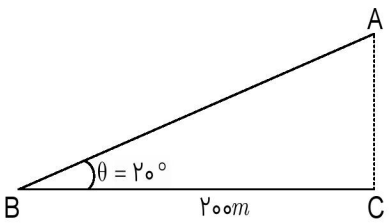
زاویه ۲٤۰ درجه در ربع سوم قرار دارد و در ربع سوم سینوس و کسینوس منفی و کتانژانت مثبت است.

$$۱+\tan^{۲}\theta = \frac{۱}{\cos^{۲}\theta} \Rightarrow ۱+(\sqrt{۳})^{۲} = \frac{۱}{\cos^{۲}\theta} \Rightarrow \cos^{۲}\theta = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos\theta = \frac{-۱}{۲}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{\sin\theta}{\frac{-۱}{۲}} \Rightarrow \sin\theta = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cot\theta = \frac{۱}{\tan\theta} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \cot\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۵) شخصی می‌خواهد عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه‌ای چون C و سپس نقطه‌ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می‌کند و به اندازه ۲۰۰ متر از C به صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطه‌ی B برسد. اگر زاویه‌ی دید این شخص (از نقطه‌ی B به نقطه‌ی A)، ۲۰ درجه باشد و $\sin ۲۰^\circ \simeq ۰/۳۴$، او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (پاسخ خود را تا دو رقم اعشار بر حسب متر بنویسید.)



برای اندازه‌گیری عرض رودخانه (ضلع AC) داریم:

$$۱+\cot^۲\theta=\frac{۱}{\sin^۲\theta}\Rightarrow ۱+\cot^۲\theta=\frac{۱}{(۰/۳۴)^۲}\Rightarrow \cot\theta=۲/۷۶$$

$$\Rightarrow \cot\theta=\frac{BC}{AC}\Rightarrow ۲/۷۶=\frac{۲۰۰}{AC}\Rightarrow AC=۷۲/۳۱m$$

۶) با فرض با معنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{۱}{\sin\theta}\times\tan\theta=\frac{۱}{\cos\theta}$

$$\frac{۱}{\sin\theta}\times\tan\theta=\frac{۱}{\cancel{\sin\theta}}\times\frac{\cancel{\sin\theta}}{\cos\theta}=\frac{۱}{\cos\theta}$$

ب) $\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}=\frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}\times\frac{۱-\sin\theta}{۱-\sin\theta}=\frac{\cos\theta(۱-\sin\theta)}{۱-\sin^۲\theta}=\frac{\cancel{\cos\theta}(۱-\sin\theta)}{\underset{\cos\theta}{\cancel{\cos^۲\theta}}}=\frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}$$

پ) $\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\cot\alpha}=\tan\alpha$

$$\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\cot\alpha}=\frac{۱+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{۱+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha\,\cancel{(\cos\alpha+\sin\alpha)}}{\cos\alpha\,\cancel{(\cos\alpha+\sin\alpha)}}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

ت) $۱-\frac{\cos^۲x}{۱+\sin x}=\sin x$

$$۱-\frac{\cos^۲x}{۱+\sin x}=۱-\frac{۱-\sin^۲x}{۱+\sin x}=۱-\frac{(۱-\sin x)\cancel{(۱+\sin x)}}{\cancel{(۱+\sin x)}}=۱-(۱-\sin x)=۱-۱+\sin x=\sin x$$

ث) $\frac{۱}{\cos x}-\tan x=\frac{\cos x}{۱+\sin x}$

$$\frac{۱}{\cos x}-\tan x=\frac{۱}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۱-\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x}{۱+\sin x}$$