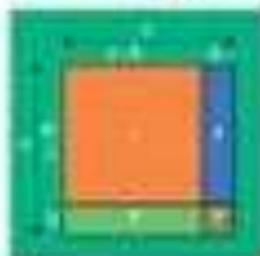


مکانات

سینا ایجاد  
میراث اسلامی

۱۰۷

## رواضی و آثار (۱)

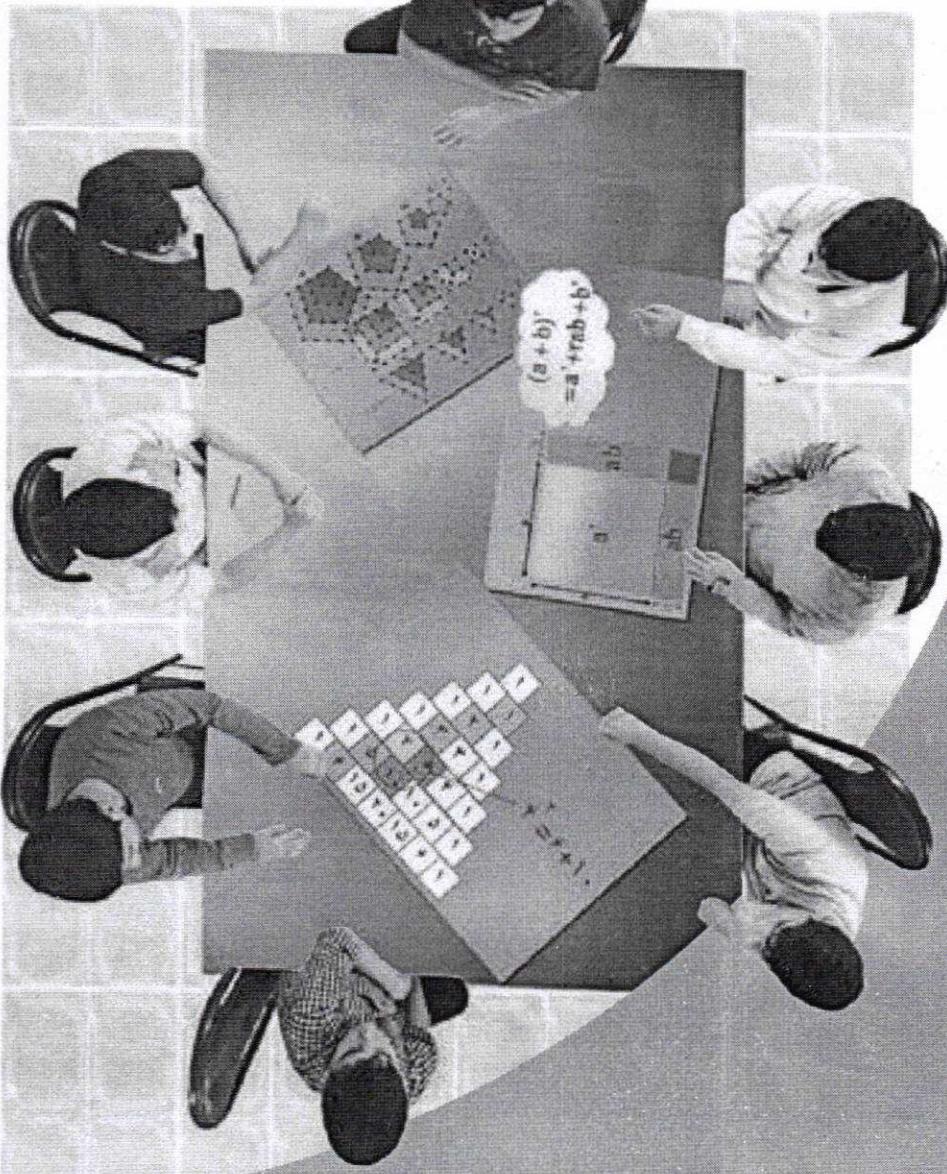


# فصل اول

## عبارت‌های جبری

درس ۱ چند اتحاد جبری و کاربردها

درس ۲ عبارت‌های گویا



# درس ۱

## چند اتحاد جبری و کاربردها

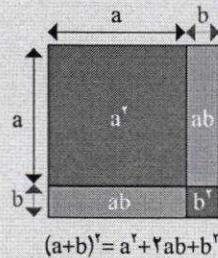
در سال قبل، با اتحادهای زیر آشنا شدید.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

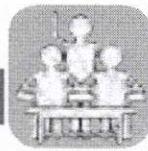
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

### کار در کلاس



با استفاده از اتحادهای بالا، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

(الف)  $(a+4)^2 = a^2 + \underline{8a} + 16$

(ب)  $(3a-1)^2 = \underline{9a^2} - 6a + 1$

(پ)  $(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}b)^2 = 2 + \underline{2b} + \frac{1}{2}b^2$

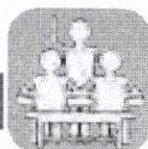
(ت)  $(\sqrt{3} + \underline{\sqrt{2}})(\sqrt{3} - \underline{\sqrt{2}}) = 3 - 2 = 1$

(ث)  $(x+4)(x+3) = x^2 + (\underline{7})x + 12$

(ج)  $(3x+2)(3x-5) = \underline{9x^2} + (2-5)(3x) + (2)(-5) = \underline{9x^2} - 9x - 10$

(ج)  $(x+1)(x+\underline{1}) = x^2 + 3x + 2$

### کار در کلاس



با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای، اتحاد مزدوج و اتحاد جمله مشترک، عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

(الف)  $9x^2 - 16 = (3x - \underline{4})(3x + \underline{4})$



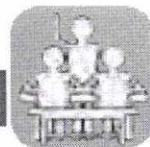
### مثلث خیام<sup>۱</sup>

در اینجا باید به رخداد مهمی که باشناسی کتاب جبر و مقابله خیام در اروپا صورت گرفت پردازم. می‌دانیم که صورت بسط یافته دوجمله‌ای به طراحی مثلثی عددی می‌انجامد که پیش از این مثلث نیوتون-پاسکال نامیده می‌شد.

در اواسط قرن بیستم دانشمندان اروپایی علاقه‌مند به بررسی تاریخ ریاضیات در سرزمین‌های اسلامی از خود پرسیدند: «ایا ممکن است این روش بسط دوجمله‌ای‌ها در سرزمین‌های اسلامی و به وسیله دانشمندان اسلامی نیز صورت گرفته باشد؟» نخستین بررسی‌ها به حضور این بسط در کتاب مفتاح الحساب غیاث الدین جمشید کاشانی رسید و در ادامه روشی شد این بسط به دانشمندی پیش از کاشانی یعنی خواجه نصیر الدین طوسی باز می‌گردد و در فصل اول از کتاب جامع الحساب طوسی دیده می‌شود. ادامه پژوهش‌ها نیز ردیابی این بسط را به کتاب جبر و مقابله خیام رساند و مشخص شد برای اولین بار در سرزمین‌های اسلامی و حدود شش قرن قبل از نیوتون، خیام این دو جمله‌ای را در کتاب خود بسط داده است.

۱. حکم، عمر خیام - علی اکبر ولایتی، انتشارات آفتاب، تهران، ۱۳۸۹.

## کار در کلاس



عبارت جبری  $(a+b)^3$  را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای و حاصل ضرب عبارت‌های جبری ساده کنید.

$$(a+b)^3 = (a+b)^2 \cdot (a+b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a+b) =$$

برای ساده کردن  $(a+b)^3$ ، چگونه عمل می‌کنید؟ آیا این برشش را می‌توان برای توان‌های بزرگ‌تر از ۴ نیز طرح کرد؟ آیا روشی وجود دارد که بتوان بدون ساده کردن عبارت‌های حاصل ضرب، جواب نهایی را بدست آورد؟

فعالیت زیر پاسخ مناسبی برای سؤال بالاست. **می‌توان برای توان‌های بیشتر حین عمل کرد ولی مرحله طولانی خواهد شد.**

## فعالیت



جدول زیر را در نظر بگیرید.

1	$(a+b)^0 = 1$
1 1	$(a+b)^1 = 1a + 1b$
1 2 1	$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
1 3 2 1	$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
1 4 6 4 1	$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$
1 5 10 10 5 1	$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1b^5$
⋮	⋮
⋮	⋮

۱. در جدول بالا سمت چپ (مثلث خیام)، چه ارتباطی بین سطر دوم و سطر سوم وجود دارد؟ چه ارتباطی بین سطر سوم و سطر چهارم وجود دارد؟ چه رابطه‌ای بین سطر چهارم و سطر پنجم وجود دارد؟

هر عدد سطر سوم از جمع دو عدد بالای آن در سطر دوم بدست می‌آید.

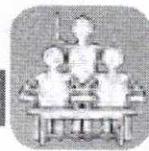
هر عدد سطر هجارت از جمع دو عدد بالای آن در سطر سوم بدست می‌آید.

هر عدد سطر چهارم از جمع دو عدد بالای آن در سطر هجارت بدست می‌آید.

آفینش، دفترش تاباز شد  
با «حساب» و «هندسه» آغاز شد  
دست حق تانقیش عالم می نگاشت  
در سیرشت «دانایره»، «بی» می گذاشت  
شکل های هندسی و «منظم»  
اونهاده در تهاد هر قلم  
با «مثلث»، «دانایره»، با «مستطیل»  
می شود اندام این عالم شکل!  
اسما، از اختران پر کرده است  
روز و شب را در «انتاظر» کرده است  
این همه مجموعه های بی نظیر  
که کشان های «شمارش نابذیر»!  
نظم این اعداد، در اوج کمال  
در تناسب گشته عالم، بی مثال  
زلفِ عالم تا پریشان می شود  
این ریاضی، شانه های آن می شود!  
با به استقراره و با «برهان خلف»  
می شود شانه، بر شانی زلف!  
باز، بین حفره ای بی حدود  
کوه های بر دشت ها گشته «عمود»!  
از حیات و از جناد و از نبات  
پر نمود این «دستگار مختصات»

ب)  $x^3 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = x^3 + 2\left(\frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = (x + \frac{1}{\sqrt[3]{3}})^3$   
پ)  $4x^3 - 4x + 1 = (\cancel{4}x^3 - 2(2x) + 1)^3 = (2x - 1)^3$   
ت)  $y^3 + 3y - 1 = y^3 + (5-2)y - (5)(2) = (y - 1)(y + 3)$   
ث)  $9x^3 + 18x + 8 = (3x)^3 + 6 \times (3x) + 8$   
 $= (3x)^3 + (1.2 + 4)(3x) + (2)(4)$   
 $= (3x + 1)(3x + 4)$

## کار در کلاس

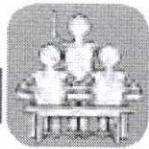


عبارت های جبری زیر را به صورت ساده ترین حالت، تجزیه کنید.

الف)  $12x^7(x^3+6)^3 - 8x^5(x^3+6)^3$   
 $= 4x^5(x^3+6)^3(3x^2 - 2(x^3+6))$   
 $= 4x^5(x^3+6)^3(\cancel{x^6} - 12)$   
 $= 4x^5(x^3+6)^3(x - \sqrt[3]{12})(x + \sqrt[3]{12})$

ب)  $x^8 - 64x^4 = x^4(x^4 - 64)$   
 $= x^4(\cancel{x^4} - 8)(\cancel{x^4} + 8)$   
 $= x^4(\cancel{x^4} - \sqrt{64})(x + \sqrt{8})(\cancel{x^4} + 8)$

## کار در کلاس



بعضی از محاسبات عددی را می توان با کمک اتحادها، بر احتی انجام داد. تساوی های زیر را کامل کنید.

الف)  $(999)^3 = (1000-1)^3 = \dots \cancel{(1000)}^2 - 2(1000)(1) + (1)^3 = 1000000 - 2000 + 1 = 998001$

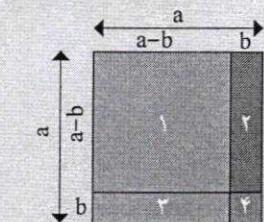
ب)  $96 \times 104 = (100-4)(100+4) = \cancel{100}^2 - \cancel{16}^4 = 10000 - 16 = 9984$

ب)  $\cancel{102}^2 = (100+2)^2 = \dots + \dots = \cancel{100}^2 + 2 \cancel{100} \cancel{2} + \cancel{4}^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404$

ت) خودتان نیز یک مثال عددی بزنید که برای محاسبه آن از اتحادها، کمک گرفته اید.

ث) آیا کاربرد دیگری از اتحادها، به ذهن شما می رسد؟ لطفاً توضیح دهید.

ث)  $500 \times \cancel{99}^2 = (500+V)(\cancel{500}-V) = \cancel{500}^2 - V^2$   
 $= 250000 - 49 = 249951$



مساحت مربع:  $s = (a-b)^2 \quad (1)$

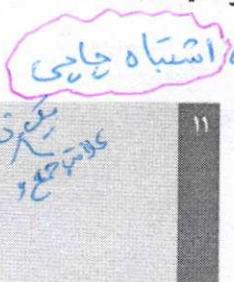
$s = s - s_1 - s_2 - s_3 \quad (2)$

$= a^2 - b(a-b) - b(a-b) - b^2 \quad (2)$

$= a^2 - 2ab + b^2$

(2)  $\Rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (1)$

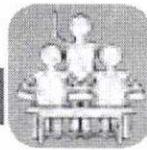
کمک نظریه های افراز و میم



ث) در حساب کردن مساحت مربع

$$* 2^1 = 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 1024$$

## کار در کلاس



در تساوی های زیر، به جای علامت سؤال، عدد مناسب قرار دهید:

$$\begin{aligned} 1 &= 2^0 \\ 1+1 &= 2^1 \\ 1+2+1 &= 2^2 \rightarrow 2 \\ 1+3+2+1 &= 2^3 \rightarrow 3 \\ 1+4+6+4+1 &= 2^4 \end{aligned}$$

- چه ارتباطی بین توان های عدد ۲ و سطرهای واقع در مثلث خیام وجود دارد؟ **توان عدد ۲، یکی کمتر از سه راه سطر است.**
- آیا می توانند الگوی برای توان های عدد ۲، بر حسب سطرهای واقع در مثلث خیام حدس بزنید؟ **اگر ۲ سطر باشد ۳-۱-۲-۱**
- بر اساس این الگو مقدار  $2^{10}$  را به دست آورید.

**آیا می توانند الگوی بالا، الگوهای دیگری از مثلث خیام حدس بزنید؟ **توان ۱۱ ام عدد ۲ برابر است با جمع اعداد سطر (۷+۱) ام مثلث خیام****

## کار در کلاس



توان های مختلف ۱۱ را، به دست آورید.

$$11^0 = 1$$

$$11^1 = 11$$

$$11^2 = (1+1)^2 = 1+2 \times 1 + 1^2 = 1+2+1 = 121$$

$$11^3 = (1+1)^3 = \dots + \dots + \dots = 1+3+ \dots + 100 = 1331$$

$$11^4 = (1+1)^4 = 1+4 \times 1 + \dots + 1^4 = 14641$$

- چه ارتباطی بین توان به دست آمده در  $11^2$  و اعداد واقع در سطر سوم مثلث خیام وجود دارد؟

**توان ۲ کمتر از ۱۱ از کنارهم قرار گرفتن اعداد سطر سوم مثلث خیام بروست من آید.**

- چه ارتباطی بین توان به دست آمده در  $11^3$  و اعداد واقع در سطر چهارم مثلث خیام وجود دارد؟

**توان ۳ کمتر از ۱۱ از کنارهم قرار گرفتن اعداد سطر چهارم مثلث خیام بروست من آید.**

- چه ارتباطی بین توان به دست آمده در  $11^4$  و اعداد واقع در سطر پنجم مثلث خیام وجود دارد؟

**توان ۴ کمتر از ۱۱ از کنارهم قرار گرفتن اعداد سطر پنجم مثلث خیام بروست من آید.**

- آیا می توانند بدون هیچ گونه محاسبه ای  $11^5$  را بر حسب اعداد واقع در سطر ششم مثلث خیام به دست آورید؟

**چه نتیجه ای می توانند برای توان های مختلف ۱۱، بگیرید؟**

$11^0 = 1$	$11^1 = 11$	$11^2 = 121$
$11^3 = 1331$	$11^4 = 14641$	$11^5 = 161051$

۱۴

\* **توان ۱۱ ام عدد ۱۱ برابر است با**

**عددی که از کنارهم قرار گرفتن اعداد سطر (۷+۱) ام مثلث خیام**

**نتیجه: اگر عدد از **۷** بیشتر باشد ماتندا و احتماً می تواند محاسبه می شود و بر حسب قبلي این تابع می شود**

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ \text{سطر ۷} & ۱ & ۴ & ۱ & ۵ & ۲ & ۱ & ۵ & ۱ \\ & ۱ & ۷ & ۲ & ۱ & ۳ & ۳ & ۲ & ۱ \end{array}$$

۲. آیا می‌توانید سطرهای هفتم و هشتم را کامل کنید؟

۳. چه ارتباطی بین سطرهای واقع در مثلث خیام و ضرایب عبارت‌های جبری سطرهای جدول بالا در

سمت راست وجود دارد؟ **به ترتیب از حی به راست باهم برابرند**

۴. آیا می‌توانید ضرایب  $(a+b)^n$  را در جدول سمت راست، کامل کنید؟

۵. آیا می‌توانید توان‌های  $a$  و  $b$  در عبارت  $(a+b)^5$  در جدول سمت راست را کامل کنید؟

۶. آیا توانسته‌اید حدس بزنید که چه ارتباطی بین اعداد سطرهای واقع در مثلث خیام و ضرایب توان‌های

$(a+b)$  وجود دارد؟ **ضرایب همان  $(a+b)^n$  برابر اعداد سطر  $(n+1)$ م سطرهای واقع در مثلث خیام است.**

۷. با توجه به اینکه  $(a-b)$ ، حاصل عبارت  $(a-b)^3$  را براساس اتحاد  $a-b=a+(-b)$  بدست آورید.

$$(a-b)^3 = (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 \\ = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

با توجه به مثلث خیام، اتحادهای زیر را خواهیم داشت:

$$(a+b)^r = a^r + 3a^2b + 3ab^2 + b^r$$

$$(a-b)^r = a^r - 3a^2b + 3ab^2 - b^r$$

## کار در کلاس

با استفاده از اتحادهای بالا، تساوی‌های زیر را کامل کنید:

$$(2a+1)^3 = 8a^3 + 12a^2 + 6a + 1 \quad (\text{الف})$$

$$(\frac{1}{3}a - 2)^3 = \frac{1}{27}a^3 - 3(\frac{1}{3}a)^2(2) + \frac{1}{3}a - 8 \quad (\text{ب})$$

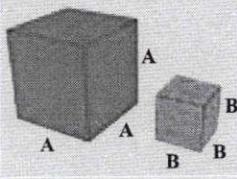
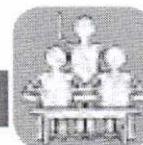
$$(4a - 2b)^3 = 64a^3 - 96a^2b + \dots - 8b^3 \quad (\text{پ})$$

$$(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b)^3 = 27a^3 + \dots + \dots + \frac{1}{8}b^3 \quad (\text{ت})$$

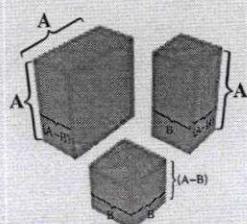
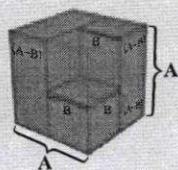
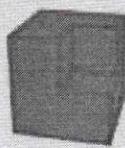
$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

مکعب  $-$  مکعب = ( مربع  $+$  حمله  $-$  حمله )  $\times$  ( جمله  $+$  جمله )

## کار در کلاس



$$A^3 - B^3$$



$$(A-B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$$

با توجه به اتحادهایی که تاکنون آموخته‌اید، اتحادهای زیر را با استفاده از حاصل ضرب عبارت‌های جبری بررسی کنید و تساوی دوطرف را نشان دهید. سپس عبارت کلامی این اتحادها را بنویسید.



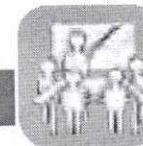
$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای

## فعالیت



با استفاده از اتحادهای بالا، عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

$$\lambda y^3 - 1 = (2y)^3 - 1^3 = (2y-1)((2y)^2 + (2y) + 1)$$

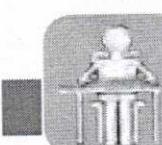
$$= (2y-1)(\cancel{4y^2} + \cancel{4y} + 1)$$

$$\lambda a^3 + 1 = (2a)^3 + 1^3 = (\cancel{2a} + 1)((2a)^2 - \cancel{2a} + 1) =$$

$$\lambda a^3 + b^3 = (2a)^3 + b^3 = (2a + b)(\cancel{4a^2} - 2ab + \cancel{b^2})$$

$$t^6 - \frac{1}{\lambda} = (t^2)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = (\cancel{t^6} - \cancel{\frac{1}{8}})(\cancel{t^6} + \cancel{\frac{1}{8}} + \cancel{\frac{1}{64}})$$

## تمرین



۱. با استفاده از اتحادها، حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$(x-1)^3, (y+\frac{1}{4})^3, (2-\frac{a}{3})^3, (2z-\frac{1}{2})^3, (\frac{1}{4}+\frac{b}{3})^3$$



۲. با استفاده از اتحادها، در قسمت‌های نقطه‌چین، عبارت مناسب بگذارید.

$$(a + \sqrt{2})^n = a^n + \dots + 2$$

$$(1 - 4x)^n = 1 - 4x + \dots$$

$$(\sqrt{3} + x)^n = 3\sqrt{3} + \dots + 3\sqrt{3}x^n + \dots$$

۳. به کمک اتحادها، عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^6 - 1, 1 + z^2, 8 - t^6$$

$$9x^2 - 6x + 1$$

$$25x^2 + 25x + 6$$

$$4x^2 + 14x + 12$$

۴. کدام یک از عبارت‌های زیر، نشان‌دهنده اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای یا اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای است؟

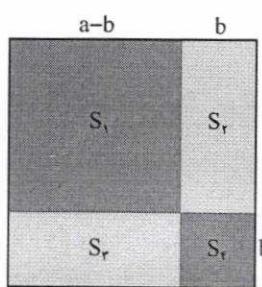
$$(3x + 5)(9x^2 - 20x + 15), (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$(4x + y)(16x^2 + 4xy + y^2), (7x - 2)(49x^2 + 14x + 4)$$

۵. عبارت‌های جبری زیر را به ساده‌ترین عبارت‌ها تجزیه کنید.

$$12x^6(x^2 + 5)^3 - 10x^4(x^2 + 5)^2 \quad (\text{الف})$$

$$x^8 - 625x^4 \quad (\text{ب})$$



۶. مربع رو به رو را که اندازه، ضلع آن  $a$  است، در نظر بگیرید و فرض کنید مساحت آن برابر با  $S$  است. ضلع آن را به دو پاره خط تقسیم کنید و طول یکی را  $b$  در نظر بگیرید.

(الف) مساحت‌های  $S_1, S_2, S_3$  و  $S_4$  را به دست آورید.

(ب) مساحت  $S$  را بر حسب مساحت‌های  $S_1, S_2, S_3$  و  $S_4$  به دست آورید.

(پ) اتحاد مربع دو جمله‌ای را از قسمت (ب) نتیجه بگیرید.

۷. با استفاده از اتحادهایی که آموختید، عبارت‌های عددی زیر را به دست آورید.

$$(1001)^3 = \dots$$

$$(99)^3 = (100 - 1)^3 = \dots$$



تمرین های صفحه ۱۴

$$(x-1)^r = (x)^r - r(n)(1) + (-1)^r = x^r - rx + 1 \quad (1)$$

$$(y + \frac{1}{x})^r = (y)^r + r(y)(\frac{1}{x}) + (\frac{1}{x})^r = y^r + \frac{1}{r}y + \frac{1}{r}$$

$$(y - \frac{a}{x})^r = (y)^r - r(y)(\frac{a}{x}) + (\frac{a}{x})^r = y^r - \frac{r}{x}a + \frac{a^r}{x}$$

$$(yz - \frac{1}{z})^r = (yz)^r - r(yz)(\frac{1}{z}) + r(yz)(\frac{1}{z})^r - (\frac{1}{z})^r = yz^r - rz^r + \frac{r}{z}z - \frac{1}{z}$$

$$(\frac{1}{x} + \frac{b}{x})^r = (\frac{1}{x})^r + r(\frac{1}{x})(\frac{b}{x}) + r(\frac{1}{x})(\frac{b}{x})^r + (\frac{b}{x})^r = \frac{1}{x^r} + \frac{1}{r}bx + \frac{1}{r}b^r + \frac{b^r}{x^r}$$

$$(a + \sqrt{r})^r = a^r + r\sqrt{r}a + r$$

$$(1 - rx)^r = 1 - rx + rrx^r$$

$$(\sqrt{r} + x)^r = r\sqrt{r} + rx + r\sqrt{r}x^r + x^r$$

$$x^q - 1 = (x^r + 1)(x^r - 1) = (x + 1)(x^r - x + 1)(x + 1)(x^r + x + 1) \quad (1)$$

$$1 + z^r = (1+z)(1-z+z^r)$$

$$1 - t^q = (1 - t^r)(1 + rt^r + t^{2r}) = (\sqrt{r} - t)(\sqrt{r} + t)(1 + rt^r + t^{2r})$$

$$rx^r - rx + 1 = (rx - 1)^r$$

$$rx^r + rx^r + rx^r = (rx + r)(rx + r)$$

$$rx^r + rx^r + rx^r = (rx + r)(rx + r)$$

$$\times (x^r + a)(x^r - \cancel{x^r} + 1a) \rightarrow -1ax^r$$

$$\checkmark (x+2)(x^r - 2x + \epsilon)$$

$$\times (\epsilon x + y)(19x^r + \cancel{\epsilon xy} + y^r) \rightarrow -\epsilon xy$$

$$\checkmark (x^r - 2)(\epsilon x^r + 1 \epsilon x + \epsilon)$$

$$(ا) S_1 = (a-b)^r = a^r - \cancel{ab} + b^r$$

$$S_r = b(a-b) = ab - b^r$$

$$S_r = (a-b)b = ab - b^r$$

$$S_\epsilon = (b)^r = b^r$$

$$\Rightarrow S = S_1 + S_r + S_r + S_\epsilon = (a^r - \cancel{ab} + b^r) + (\cancel{ab} - \cancel{b^r}) + (\cancel{ab} - \cancel{b^r}) + (b^r) = a^r$$

$$\Rightarrow (a-b)^r + r(a-b)(b) + b^r = a^r \Rightarrow$$

$$(a-b)^r = a^r - b^r - r(a-b)(b) \Rightarrow (a-b)^r = a^r - b^r - rab + rb^r$$

$$\Rightarrow (a-b)^r = a^r - \cancel{rab} + b^r$$

$$(ا) 12x^r(x^r + a)^4 - 10x^r(x^r + a)^4 = 2x^r(x^r + a)^4 [4x^r - a(x^r + a)] \\ = 2x^r(x^r + a)^4 (x^r - ra) = 2x^r(x^r + a)^4 (x - a)(x + a)$$

$$\Rightarrow x^r - 4rax^r = x^r (x^r - 4ra) = x^r (x^r + ra)(x^r - ra) \\ = x^r (x^r + ra)(x + a)(x - a)$$

$$\textcircled{1} (1001)^{100} = (1000+1)^{100} = (1000)^{100} + 10(1000)^{99}(1) + 45(1000)^{98}(1) + \dots = 100^{100} + 100000 + \dots$$

$$(99)^{100} = (100 - 1)^{100} = (100)^{100} - 10(100)^{99}(1) + 45(100)^{98}(1) - \dots = 100000000 - 10000000 + 450000 - 1 = 900000000$$

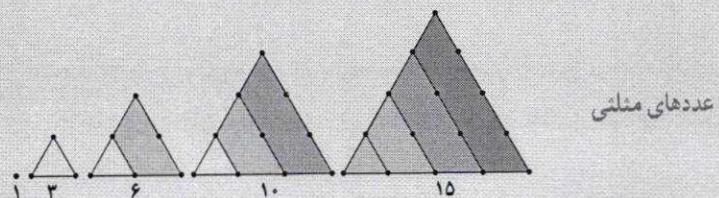
## خواندنی

ابوعلی‌سینا، دانشمند مسلمان ایرانی که در قرن سوم و چهارم هجری قمری زندگی می‌کرده است، در کتاب شفا، از اعداد مثلثی، اعداد مربعی، اعداد مخمسی و ... سخن گفته است و درباره خواص آنها، نکاتی را ذکر کرده است.

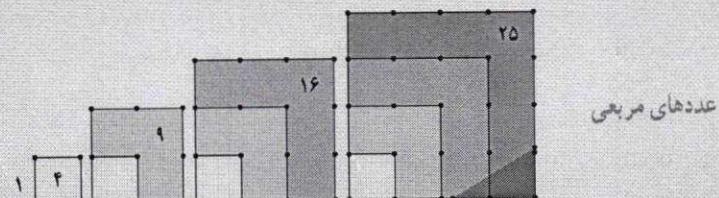
در زیر اعداد مثلثی و اعداد مربعی، به همراه جمله‌ای به زبان خود ابوعلی‌سینا در مورد رابطه بین این اعداد آمده است.

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید  $1, 3, 6, 10, \dots$  اعداد مثلثی و  $1, 4, 9, 16, \dots$  اعداد مربعی اند.

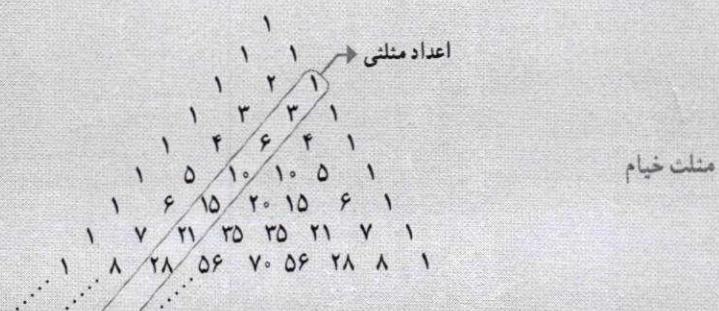
حال مثلث خیام را یک بار دیگر نگاه کنید.



این اعداد در این مثلث قابل مشاهده‌اند و می‌توان یک الگو براساس اعداد واقع در مثلث خیام برای سایر اعداد بدست آورد.



فَيَكُونُ كُلُّ مُرَبَّعٍ مِنْ مُثَلَّثٍ فِي ذَرْجَتِهِ وَ مُثَلَّثٌ أَنْقَصٌ مِنْ ذَرْجَتِهِ بِوَاحِدٍ  
مجموع هر عدد مثلث و عدد مثلث ماقبل آن مساوی است با عدد مربع همان مرتبه



چگونه می‌توانید ارتباط بین اعداد مثلثی، اعداد مربعی و اعداد مخمسی از طریق مثلث خیام به دست آورید؟

# درس ۲

## عبارت‌های گویا

در سال گذشته با عبارت‌های گویا و ساده کردن آنها، همچنین با جمع و تفریق این عبارت‌ها آشنا شدید. از آنجا که امسال، چند اتحاد دیگر را آموختید، در ادامه به یادآوری و تکمیل این مطالب می‌پردازیم. کسرهایی را که صورت و مخرج آنها چندجمله‌ای باشند، عبارت‌های گویا می‌نامند. اگر صورت یا مخرج کسری، پس از ساده شدن، چندجمله‌ای نباشد، در این صورت آن عبارت گویا نیست.

### فعالیت



عبارت‌های گویا را با  و عبارت‌های غیرگویا را با  مشخص کنید.

$\sqrt{x^2} + 1 \quad \boxed{\times}$

$\frac{1}{x^4 - \sqrt{2}} \quad \boxed{\checkmark}$

$\frac{x-3}{2x^2 - 3x + 5} \quad \boxed{\checkmark}$

$\frac{x+y}{3\sqrt{z}} \quad \boxed{\times}$

$\frac{\sqrt{5}x}{x} \quad \boxed{\checkmark}$

$x^2 + 3x - 4 \quad \boxed{\checkmark}$

$\frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad \boxed{\checkmark}$

$\sqrt{x} \quad \boxed{\times}$

$\frac{|x|}{x^2 + 2} \quad \boxed{\times}$

مقدار یک عبارت گویا وقتی با معنا است که مخرجش صفر نباشد؛ یعنی در حالتی که مخرج یک عبارت گویا صفر شود، آنگاه مقدار عبارت گویا تعریف نشده است. برای مثال عبارت  $\frac{x+2}{x-5}$  به ازای  $x=5$  تعریف نشده است؛ زیرا با قراردادن  $x=5$  در آن، مخرج کسر برابر با صفر می‌شود و در این حالت کسر تعریف نشده است.

ب) ازای  $Z = \frac{2}{3}$  تعریف نشده است. (الف)

$$3Z - a = 0 \quad 3Z = a \quad Z = \frac{a}{3}$$

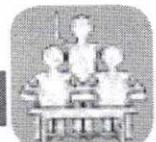
ب) ازای  $\sqrt{12} \neq 0$  اعدام تعریف نشده است. (ج)

ب) ازای  $a = 2$  و  $a = -2$  تعریف نشده است. (ت)

$$a^2 - 4 = 0 \quad (a-2)(a+2) = 0$$

ب) از این هم اعداد تعریف نشده است. (ج)

کار در کلاس



کدام یک از عبارت‌های زیر گویا و کدام یک غیر گویا هستند؟ عبارت‌های گویا به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند؟

$$\frac{3z+5}{3z-5} \quad \text{(الف)}$$

$$\frac{x+9}{\sqrt{x}-3} \quad \text{(ب)}$$

$$\frac{4x^2-5x+1}{\sqrt[3]{2}} \quad \text{(پ)}$$

$$\frac{a^2+3}{a^2-4} \quad \text{(ت)}$$

$$\frac{x\sqrt{x}+1}{3-x} \quad \text{(ث)}$$

$$\frac{5x^2+1}{x^2+1} \quad \text{(ج)}$$

### ساده کردن عبارت‌های گویا

اگر  $a$  و  $b$  و  $k$  عددهای حقیقی باشند؛ به طوری که  $k \neq 0$ ،  $b$  در این صورت داریم:

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b} \quad (k, b \neq 0)$$

زیرا با تقسیم صورت و مخرج کسر بر  $k \neq 0$ ، کسر را ساده کرده‌ایم:

$$\frac{ka}{kb} = \frac{\cancel{k}a}{\cancel{k}b} = \frac{a}{b}$$

برای ساده کردن یک عبارت گویا، ابتدا باید صورت و مخرج آن را تجزیه کنیم، سپس با خط کشیدن روی عوامل مشترک از صورت و مخرج کسر، عبارت گویا ساده می‌شود. (یادآوری می‌کنیم، عامل مشترکی که از صورت و مخرج کسر خط می‌زنیم باید مخالف صفر باشد).

کار در کلاس



۱. مانند نمونه‌های حل شده، کسرهای زیر را ساده کنید.

$$\frac{x^2+6x+9}{x^2-9} \quad \text{(الف)}$$

صورت کسر را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای و مخرج کسر را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کرده‌ایم.

$$\begin{aligned} &= \frac{(x+3)(x+3)}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{(x+3)}{(x-3)} \quad (\text{ساده شده کسر}) \end{aligned}$$

با شرط  $x+3 \neq 0$  از صورت و مخرج کسر عامل  $(x+3)$  را خط زده‌ایم. توجه کنید که برای بامعنی بودن کسر باید  $x-3 \neq 0$  باشد.

$$\text{ب) } \frac{x^r - 1}{x^r - 1} = \frac{(x-1)(x^r+1+\dots)}{(x-1)(x+1)}$$

صورت کسر را به کمک اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای و مخرج کسر را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کنید.

$$\begin{aligned} &= \frac{(x-1)(x^r+x^{r-1}+\dots)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x^r + x^{r-1}}{x+1} \quad (\text{ساده شده کسر}) \end{aligned}$$

با شرط  $x \neq -1$  از صورت و مخرج کسر عامل  $(x-1)$  را خطر بزنید. توجه کنید که برای بامعنی بودن کسر باید  $x+1 \neq 0$  باشد.

$$\begin{aligned} \text{پ) } \frac{4x^r - 9}{4x^r + 1 + x + 6} &= \frac{(2x-3)(2x+3)}{(2x+1)(2x+3)} = \frac{2x-3}{2x+2} \\ \text{ت) } \frac{x^4 - 8x}{2x^4 - 8x + 8} &= \frac{x(x^3 - 8)}{2(x^3 - 4x + 4)} = \frac{x(n-2)(x^2 + 2x + 4)}{2(n-2)(n-2)} = \frac{x(x^2 + 2x + 4)}{2(n-2)} \\ \text{ث) } \frac{6x^5(x^2 + 4)^2 - 4x^3(x^2 + 4)^3}{x^8 - 16x^4} \end{aligned}$$

۲. کسر زیر به صورت نادرست ساده شده است. ایراد آن را پیدا کنید و درباره آن توضیح دهید.

**فقط اگرین عوامل صورت و مخرج ضرب باشد من توان چلوات را ساده کرد.**

۳. فرض کنیم  $x=1$  است، دانش آموزی با توجه به این فرض، ثابت کرده است که  $2=1$  است استدلال زیر را دنبال کنید و بگویید اشتباه در کجا اتفاق افتاده است.

$$x=1$$

$$x^r=x$$

$$x^r-1=x-1$$

چون بر عامل صفر تقسیم نمی‌رود است.

$$\frac{x^r - 1}{x - 1} = \frac{x-1}{x-1}$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 1$$

$$x+1=1 \xrightarrow{x=1} 2=1$$

$$\begin{aligned} \text{ث) } \frac{4x^6(n^2+4)^2 - n^3(x^2+4)^3}{x^8 - 16x^4} &= \frac{2x^3(n^2+4)^2(3n^2 - 2(n^2+4))}{x^4(n^2-16)} \\ &= \frac{2x^3(n^2+4)^2(x^2-8)}{x^4(n^2-16)} \\ &= \frac{2x^3(n^2+4)^2(x^2-8)}{x^4(n^2-16)} = \frac{2(n^2+4)(n^2-8)}{x(n^2-16)} \end{aligned}$$

$$1) P(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

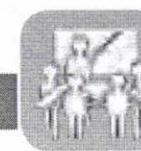
$$Q(x) = x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x+6)$$

$$2) \frac{A(x)}{P(x)} = \frac{(x-1)^2(x+6)}{(x-1)^2} = (x+6) , \quad \frac{A(x)}{Q(x)} = \frac{(x-1)^2(x+6)}{(x-1)(x+6)} = (x-1)$$

## جمع و تفریق عبارت‌های گویا

برای جمع و تفریق عبارت‌های گویا باید «مخرج مشترک» گیری کنیم. برای این منظور ابتدا با انجام فعالیت زیر مفهوم مخرج مشترک را درک می‌کنید؛ سپس در ادامه جمع و تفریق عبارت‌های گویا می‌آید.

### فعالیت



چندجمله‌ای‌های  $1$   $P(x) = x^2 - 2x + 1$  و  $Q(x) = x^2 + 5x - 6$  را در نظر بگیرید.

**۱.** چندجمله‌ای‌های بالا را تجزیه کنید.

**۲.** عبارت‌های مشترک در تجزیه این دو چندجمله‌ای را مشخص کنید.

**۳.** عبارت‌های غیرمشترک در تجزیه این دو چندجمله‌ای را مشخص کنید.

**۴.** حاصل ضرب عبارت‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان را در عبارت‌های غیرمشترک پیدا کنید و آن را بنامید.

$$A(x) = (x-1)^2(x+6)$$

**۵.** عبارت‌های  $\frac{A(x)}{Q(x)}$ ،  $\frac{A(x)}{P(x)}$  را ساده کنید.

**۶.** با توجه به قسمت قبل آیا  $A(x)$  مضرب مشترک دو عبارت  $P(x)$  و  $Q(x)$  است؟ **بله**

**۷.** آیا می‌توانید مضرب‌های مشترک دیگری برای  $P(x)$  و  $Q(x)$  پیدا کنید؟ **بله \***

**۸.** از بین مضرب‌های مشترکی که برای  $P(x)$  و  $Q(x)$  یافتید، کدام یک نسبت به متغیر  $x$  درجه کوچک‌تری دارد؟  **$A(x)$**

مضرب مشترک دو عبارت  
 $(x+1)$ ،  $(x-1)$   
چندجمله‌ای  $(x^2-1)$   
است. از طرفی  $(x^2-1)$   
با  $(x^2-1)$  یا  $(x^2-1)$  با  
مضرب‌های مشترک این دو  
عبارت هستند، اما  $(x^2-1)$   
مضرب مشترکی است که  
نسبت به متغیر  $x$  از درجه  
کوچک‌تر است.

برای پیدا کردن مضرب مشترک دو چندجمله‌ای  $P(x)$  و  $Q(x)$  به طوری  
که نسبت به  $x$  از کوچک‌ترین درجه باشد، ابتدا هر یک از چندجمله‌ای‌ها  
را تجزیه می‌کنیم؛ سپس حاصل ضرب عبارت‌های مشترک با بزرگ‌ترین  
توان در عبارت‌های غیرمشترک را بدست می‌آوریم و آن را  $A(x)$  و  
می‌نامیم. برای جمع یا تفریق دو عبارت گویا که مخرج‌های آنها  $P(x)$  و  
 $Q(x)$  باشند؛ عبارت  $(x)$   $A$  را مخرج مشترک دو کسر تعریف می‌کنیم.

۱)  $(x-1)^2(x+6)$  ص ۱۰

۲)  $(x-1)^4(x+6)^4$  ص ۱۰

۳)  $7(x-1)^2(x+6)$  ص ۱۰

۴)  $(x-1)^4(x+6)(x+3)$  ص ۱۰

\* (V)

## کار در کلاس



۱. در هر قسمت مضرب مشترکی از چندجمله‌ای‌ها را به دست آورید؛ به طوری که نسبت به متغیر  $a$  آن کوچک‌ترین توان را داشته باشد.

الف)  $P(x) = a^r + 6a + 9 = (a+3)^r$   
 $Q(x) = a^r - 9 = (a-3)(a+3)$

$$P \cdot Q = (a+3)^r (a-3)^r$$

ب)  $P(x) = a^r - b^r = (a^r + b^r)(a^r - b^r) = (a^r + b^r)(a-b)(a+b)$   
 $Q(x) = a^r - b^r = (a-b)(a^r + ab + b^r) \quad P \cdot Q = (a-b)(a+b)(a^r + b^r)(a^r + ab + b^r)$

پ)  $P(x) = a^r + 2a^r - 3a^r = a^r(a^r + 2a^r - 3) = a^r(a-1)(a+3)$   
 $Q(x) = a^r + 8a^r + 15a = a(a^r + 8a^r + 15) = a(a+5)(a+3)$

جواب  $= a^r(a+3) \times a(a-1)(a+3)$

حاصل ضرب عبارت‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان

۲. برای جمع و تفیق عبارت‌های گویا، ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم. مخرج مشترک همان مضرب مشترک بین مخرج‌ها با کوچک‌ترین توان نسبت به  $x$  است. در زیر مخرج مشترک کسرهای را مانند نمونه پیدا کنید.

الف)  $\frac{4}{x^r + x} + \frac{1}{(x^r - 1)(x + 1)}$

مخرج کسر اول  $A(x) = x^r + x = x(x+1)$

مخرج کسر دوم  $B(x) = (x^r - 1)(x+1) = (x-1)(x+1)^r$

مخرج مشترک  $= x(x-1)(x+1)^r$

ب)  $\frac{x-2}{x-3} - \frac{x+1}{x+2} \quad P \cdot Q = (n-3)(n+2)$

مخرج کسر اول  $= n-3$

مخرج کسر دوم  $= n+2$

پ)  $\frac{1}{x^r - 8x} - \frac{1+x}{x^r} + \frac{x+2}{x-2}$

مخرج کسر اول  $= x^r - 8x = x(x^r - 8) = x(n-2)(n^r + 2x + 8)$

مخرج کسر دوم  $= x^r$

مخرج کسر سوم  $= x-2$

## فعالیت



عبارت  $P(x) = \frac{4}{x^2+x} + \frac{x}{x^2-1}$  را در نظر بگیرید. با توجه به «کار در کلاس» قبل، مخرج مشترک این دو کسر برابر است با:

$$\text{مخرج مشترک} = x(x-1)(x+1)$$

$$P(x) = \frac{4}{x(x+1)} + \frac{x}{(x-1)(x+1)} \quad \text{زیرا :}$$

۱. مخرج کسر اول را با مخرج مشترک مقایسه کنید. برای اینکه مخرج کسر اول مانند مخرج مشترک شود، باید صورت و مخرج کسر اول را در چه عبارتی ضرب کرد؟ این کار را انجام دهید.

$$\frac{4}{x(x+1)} = \frac{4(x-1)}{x(x+1)(x-1)}$$

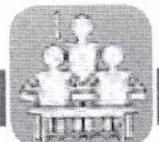
۲. برای اینکه مخرج کسر دوم مانند مخرج مشترک شود، باید صورت و مخرج کسر دوم را در کدام عبارت ضرب کرد؟ این کار را انجام دهید.

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(x)}{(x-1)(x+1)(x)}$$

۳. همان طور که می بینید، مخرج کسرهای اول و دوم یکسان شده اند. در زیر این دو کسر را با هم جمع کرده ایم، جای خالی را پُر کنید.

$$P(x) = \frac{4(x-1)+x^2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{4x-4+x^2}{x(x-1)(x+1)}$$

## کار در کلاس



حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$(الف) \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

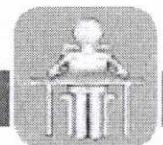
می دانیم مخرج مشترک این دو کسر برابر است با:  $(x-1)(x+1)$  است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1+x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$$

$$x^2 - 1 = ?$$

$$\begin{aligned}
 * \text{c}) & \frac{x^n + 1}{x^n - 1} - \frac{\omega}{x^{n-1}} - \frac{x^n - 1}{x^n + 1} = \frac{x^n + 1}{x(n-1)} - \frac{\omega}{(n-1)(n+1)} - \frac{x^n - 1}{x(n+1)} \\
 & = \frac{(x^n + 1)(n+1) - \omega(n) - (x^n - 1)(n-1)}{x(n-1)(n+1)} = \frac{x^n + x^n + n - 1 - x^n + x^n + n - 1}{x(n-1)(n+1)} \\
 & = \frac{10x - 10}{x(n-1)(n+1)} = \frac{\cancel{x}(x(n-1))}{\cancel{x}(n-1)(n+1)} = \frac{\cancel{x}}{n+1} \\
 \text{b) } & \frac{y+\lambda}{y^2+y-2} + \frac{y-\gamma}{y^2+2y} = \frac{y+\lambda}{(y+2)(y-1)} + \frac{y-\gamma}{y(y+2)} \\
 & = \frac{(y+\lambda)(y)}{y(y+2)(y-1)} + \frac{(y-\gamma)(y-1)}{y(y+2)(y-1)} = \frac{y^2 + \lambda y + y - \gamma y + \gamma}{y(y+2)(y-1)} = \frac{y^2 + (\lambda + 1)y + \gamma}{y(y+2)(y-1)} \\
 \text{c) } & \frac{e+x^2-x}{x+x} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{e+x^2-x + (-x-2)(x+2)}{x+x} = \frac{e+x^2-x - x^2 - 2x - e - 2x}{x+x} \\
 & = \frac{-4x}{x+x} = \frac{-4x}{2x} = \frac{-2x}{x}
 \end{aligned}$$

تمرین



۱. عبارت‌های گویای زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند؟

(الف)  $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

(ب)  $\frac{2x^2 + 1}{x^2 + 4}$

(ج)  $\frac{5}{x^2 + x}$

(د)  $\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x(x+1)(x^2 - 4)}$

(ه)  $\frac{3x^2 y + 6xy^2}{x^2}$

(ز)  $\frac{42a^3 - 30a^2 m}{am^2 - 25a}$

(س)  $\frac{b^2 x^2 - ab^2 x^2}{a^2 b^2 x^2 - a^2 b^2 x}$

(ع)  $\frac{x^6 - a^6}{ax^3 - a^3 x}$

۲. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(الف)  $\frac{4}{9x} - \frac{5x}{6y^2} + 1$

(ب)  $\frac{x+1}{x-1} - 1$

(ج)  $\frac{1}{m+1}$

(د)  $\frac{2x}{x^2 - y^2} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}$

(ه)  $\frac{x+3}{x^2 - 6x + 9} - \frac{x+2}{x^2 - 9} - \frac{5}{3-x}$

(ز)  $\frac{y-3}{y^2 - 4} - \frac{y+2}{y^2 - 4y + 4} - \frac{2}{2-y}$

تمرین های صفحه ۲۴

$$1) x^r - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

(1)

پس از این  $x=-1, x=1$  تعریف نشده است.

۲)  $x^r + 1 \neq 0$ . پس از این تمام اعداد غیر نشده است.

$$3) x^r + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

پس از این  $x=-1, x=0$  تعریف نشده است.

$$4) x(x+1)(x-r)(x+r) = 0$$

$x=0$ ,  $x=-1, x=0$  پس از این

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$ ,  $x=r, x=-r$  تعریف نشده است

$x-r=0 \Rightarrow x=r$ ,  $x+r=0 \Rightarrow x=-r$  پس از این  $x=0$  تعریف نشده است

$$5) x^r = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$6) am^r - a\omega a = 0 \quad a(m^r - \omega a) = 0 \quad a(m-a)(m+a) = 0$$

$a=0$ ,  $m=\omega$ ,  $a=0$  پس از این  
 $m-\omega=0 \Rightarrow m=\omega$  تعریف نشده است

$m+\omega=0 \Rightarrow m=-\omega$

$$7) a^r b^r x^r - a^r b^r x = 0 \quad a^r b^r x (x-a) = 0 \quad \begin{cases} a^r = 0 \Rightarrow a = 0 \\ b^r = 0 \Rightarrow b = 0 \\ x = 0 \\ x-a = 0 \Rightarrow x = a \end{cases}$$

پس از این  $x=a, x=-a, b=-a, a=0$  تعریف نشده است

$$8) ax^r - a^r x = 0 \Rightarrow ax(x^r - a^r) = 0 \quad ax(x-a)(x+a) = 0$$

$a=0$ ,  $x=0$ ,  $a=0$  پس از این  
 $x=a$  تعریف نشده است

$x-a=0 \Rightarrow x=a$   
 $x+a=0 \Rightarrow x=-a$

$$\text{انواع } \frac{\epsilon}{x^n} - \frac{ax}{y^r} + 1 = \frac{f(2y^r)}{y^r(x^r)y^r} - \frac{ay(2^n)}{y^r(2^n)} + \frac{1(1^n y^r)}{1(1^n y^r)} = \frac{1y^r - 2ax + 1^n y^r}{1^n y^r}$$

$$\rightarrow) \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{1} = \frac{x+1}{x-1} - \frac{1(n-1)}{1(n-1)} = \frac{x+1-n+1}{x-1} = \frac{2}{x-1}$$

$$\rightarrow) \frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{1}}{m+1} = \frac{\frac{1}{m} + \frac{1(m)}{1(m)}}{m+1} = \frac{\frac{1+m}{m}}{\frac{m+1}{1}} = \frac{1(1+m)}{m(1+m)} = \frac{1}{m}$$

$$\rightarrow) \frac{y_n}{n-y} + \frac{1}{n+y} - \frac{1}{n-y} = \frac{y_n}{(n-y)(n+y)} + \frac{1(n-y)}{(n+y)} - \frac{1(n+y)}{(n-y)}$$

$$= \frac{y_n + n-y - n-y}{(n-y)(n+y)} = \frac{y_n - 2y}{(n-y)(n+y)} = \frac{y(n-y)}{(n-y)(n+y)} = \frac{y}{n+y}$$

$$\leftarrow) \frac{x+r}{x^r - q_{n+q}} - \frac{x+r}{x^r - q} - \frac{\omega}{r-n} = \frac{(x+r)(x+r)}{(x-r)^r (n+r)} - \frac{(n+r)(n-r)}{(x-r)^r (n+r)} \\ - \frac{\omega(n-r)(n+r)}{-(x-r)^r (n-r)(n+r)} = \frac{x^r + q_{n+q} - x^r + n+q + \omega x^r - \omega r}{(x-r)^r (n+r)} = \frac{\omega x^r + \omega x^r - \omega r}{(x-r)^r (x+r)}$$

$$\leftarrow) \frac{y-r}{y^r - e} - \frac{y+r}{y^r - ey + e} - \frac{r}{r-y} = \frac{(y-r)(y-r)}{(y-r)(y+r)(y-r)} - \frac{(y+r)(y+r)}{(y-r)(y+r)} - \frac{r(y-r)(y+r)}{-(y-r)(y+r)} \\ (y+r)$$

$$= \frac{y^r - \omega y + y - y^r - ey + e + ry^r - r}{(y-r)^r (y+r)} = \frac{ry^r - qy - q}{(y-r)^r (y+r)}$$

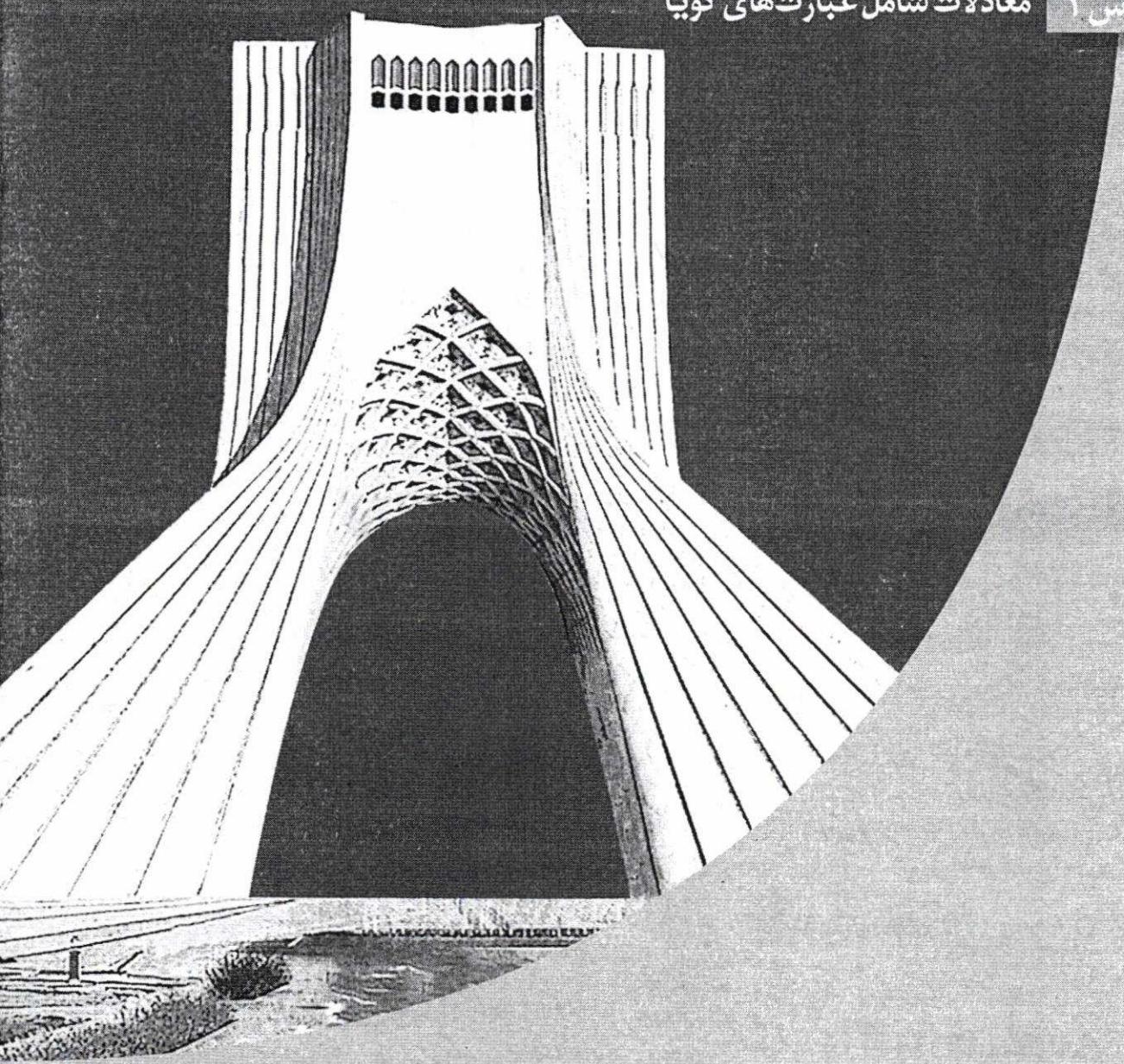
## فصل دوم

# معادله درجه دوم

درس ۱ معادله و مسائل توصیفی

درس ۲ حل معادله درجه ۲ و کاربردها

درس ۳ معادلات شامل عبارت‌های گویا

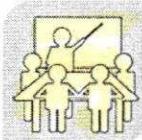


# درس ۱

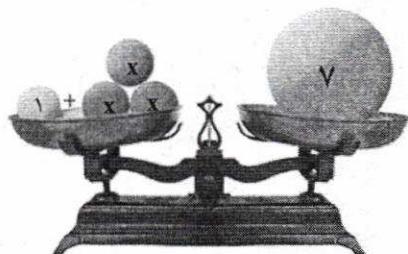
## معادله و مسائل توصیفی

معادله  $4x + 2 = 1$  را در نظر می‌گیریم. این معادله به ازای  $x = 2$  به یک تساوی عددی تبدیل می‌شود.  
 $x = 2$  را جواب معادله یا ریشه معادله می‌نامند.

### فعالیت



با توجه به شکل زیر یک معادله طرح کنید و ریشه آن را بباید.



$$1 + 3x = 7$$

$$3x = 7 - 1 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \Rightarrow x = 2$$

### فعالیت



عددی را بباید که دو برابر آن به علاوه عدد یک، برابر با پنج برابر همان عدد منهای چهار باشد.

جواب: عدد مورد نظر را  $x$  در نظر می‌گیریم. با توجه به فرض:

دو برابر آن عدد به علاوه عدد یک معادل  $2x + 1$  و پنج برابر همان عدد منهای عدد چهار، معادل  $5x$  است که باید با یکدیگر برابر باشند، یعنی:

$$2x + 1 = 5x - 4$$

با بردن جملات شامل  $x$  به یک طرف تساوی و بردن اعداد ثابت به طرف دیگر تساوی:

$$5x - 2x = 1 + 4 \Rightarrow 3x = 5$$

ضریب معکول  $x$

و با تقسیم هر طرف تساوی بر عدد سه، جواب معادله به دست می‌آید:

$$x = \frac{5}{3}$$

هر معادله به صورت  $ax+b=0$  را که در آن  $a$  و  $b$  اعداد

حقیقی و  $a \neq 0$  مخالف صفر است، یک معادله درجه اول می‌نامند.

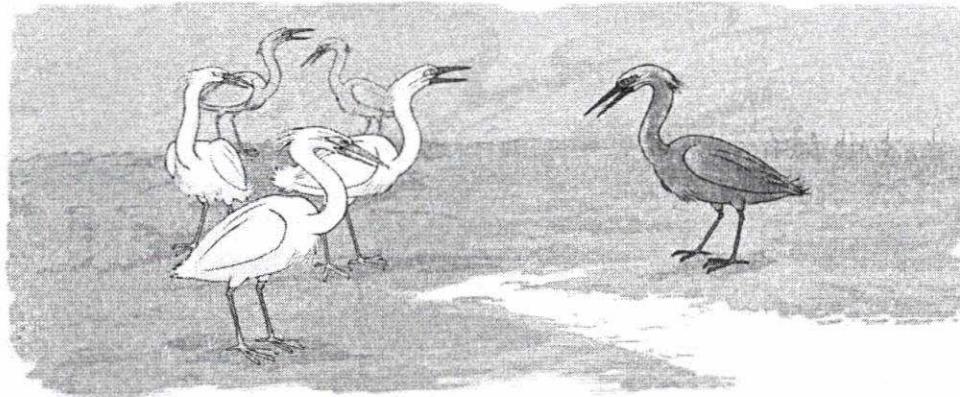
جواب این معادله از  $x = -\frac{b}{a}$  بدست می‌آید. (چرا؟)

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$(a \neq 0)$

### کار در کلاس

یک حواصیل خاکستری دسته‌ای از حواصیل‌های سفید را در جنگل حرا\* در جزیره قشم دید. به یکی از آنها گفت: اجازه می‌دهید من هم در گروه شما باشم و با شما پرواز کنم؟



یکی از آنها پاسخ داد: اگر معماز زیر را حل کنی، تو هم در گروه ما خواهی بود و ادامه داد:

«ما و نصف ما و نصفه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی صد می‌شویم».

لطفاً به پرندگان کمک کنید تا عدد پرندگان گروه را تعیین کند و عضوی از گروه آنها باشد.

نصف ای از نصف ما:

اگر «ما» را  $x$  فرض کنیم:

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x$$

نصف نصف ما + نصف ما + ما + ما

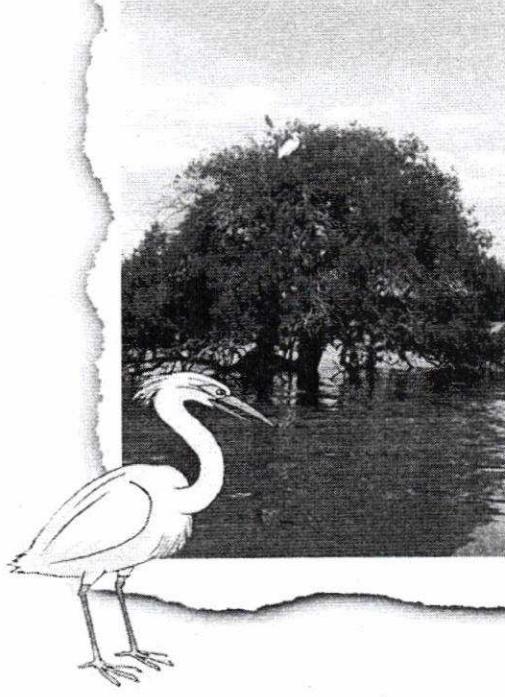
$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x + 1 = 100 \quad \Rightarrow \quad \frac{4+2+2+1}{4}x - 99 = 0 \Rightarrow \frac{11}{4}x - 99 = 0 *$$

$$x = \frac{99}{\frac{11}{4}} \Rightarrow x = \frac{99 \times 4}{11} \Rightarrow x = 36$$

ایا معادله بدست آمده، درجه اول است؟ چرا؟ جون بزرگ‌ترین توان (درجه) صاعقه‌کن (\*) برابر ۱ است.

$$\frac{11}{4}x - 99 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -99$$

\* شرحی از موقعیت و شرایط این جنگل در صفحه بعد آمده است.



### \* جنگل حرا، جزیره قشم

حرا درختی است که بیشتر در آب‌های جنوبی ایران می‌روید. در این میان جنگل‌های همیشه سبز دریاچی حرا از این درختان زیبا تشکیل شده است. این جنگل‌ها در حاشیه شمال غربی قشم از زیباترین گردشگاه‌هایی است که همچون نگینی در پنهان نیلگون خلیج فارس چشم‌ها رامی نوازد و دوستداران طبیعت را به تماشای خویش فرا می‌خواند. این جنگل‌های سبز مأمون بیش از ۲۰ پرنده بومی و مهاجر است. حواصیل سفید و خاکستری دو گونه زیبا از این پرندگان‌اند.

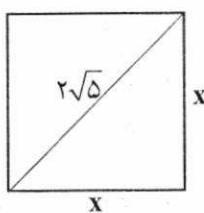


### یادی از گذشته



#### فعالیت کتاب نهم صفحه ۷۳

- محیط مربعی را به دست آورید که قطر آن  $2\sqrt{5}$  باشد.



$$\dots x^2 + \dots x^2 = (2\sqrt{5})^2$$

به کمک رابطه فیثاغورث داریم:

بنابراین:

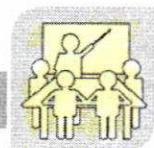
$$4x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm \sqrt{5}.$$

پس اندازه هر ضلع مربع با درنظر گرفتن این که اندازه ضلع مثبت است، برابر  $\sqrt{5}$  است و محیط مربع فوق برابر است با:

$$p = 4x \Rightarrow p = 4\sqrt{5}.$$

معادله  $2x^2 = 20$  را یک معادله درجه دوم می‌نامیم.

## فعالیت



۱. عددی را باید که مربع آن، ۳ برابر خود همان عدد باشد.

اگر عدد مورد نظر  $x$  فرض شود، مربع همان عدد برابر  $x^2$  و سه برابر همان عدد برابر  $3x$  است که باید دو عبارت با یکدیگر برابر باشند. یعنی:

$$\dots = 3x \quad *$$

۳

جواب‌های این معادله را می‌توانید حدس بزنید؟ آیا این معادله بیش از یک جواب دارد؟ بله  
از میان مقادیر زیر کدام یک می‌تواند جواب معادله باشد؟ چرا؟ **چون معادله \* را به ساده‌سازی درست عددی تبدیل نشوند.**

$$x=3, \quad x=4, \quad x=-3, \quad x=1, \quad x=0$$

**توجه:** به جز روش حدس، برای حل معادله فوق از روش تجزیه نیز می‌توانیم استفاده کنیم:

$$x^2 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x = 0, \quad x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{یا} \quad x = 3 \dots$$

$$x = 0 \quad \text{یا} \quad x - 3 = 0$$

یادآوری:

اگر  $a \times b = 0$  باشد

نتیجه می‌گیریم :

$b = 0$  یا  $a = 0$

معادله درجه دوم، معادله‌ای به شکل

است که در آن  $a \neq 0$  ضرب  $x^2$ .

$b$  ضرب  $x$  و  $c$  عدد ثابت است.

$$3x^2 - \sqrt{7}x + \frac{1}{\alpha} = 0$$

$$a = 3$$

$$b = -\sqrt{7}$$

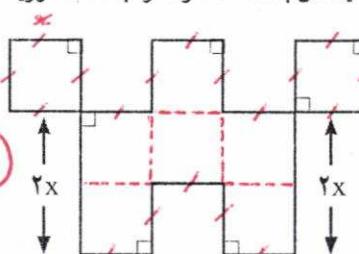
$$c = \frac{1}{\alpha}$$

عددی پرول راحد (جون رانیم حیومت هست  
و خصیط برترین هسته تو ز چون  
هم واحد نیستند)

۲. در شکل زیر طول تمام پاره خط‌ها به جز دو پاره خط مشخص شده در شکل برابر  $x$  است. اگر اندازه

مساحت شکل برابر با اندازه محیط آن باشد، مقدار  $x$  را بدست اورید.

$$(مساحت کل) = (مساحت کل) = 1x^2$$



$$= 18x + 2x + 2x = 22x$$

$$\text{مجموع اضلاع} = \text{محیط شکل}$$

$$1x^2 = 22x \Rightarrow \text{اندازه محیط شکل} = \text{اندازه مساحت شکل}$$

$$1x^2 - 22x = 0$$

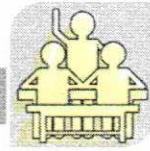
$$x(4x - 11) = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\text{یا} \quad 4x - 11 = 0$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{11}{4} \quad \text{لطفاً} \quad \text{موزون نمایند و دو} \quad x = \frac{11}{4}$$

$$x = \frac{11}{4}$$

کار در کلاس



نیما از پسرعمویش کیان سه سال بزرگ تر است. اگر حاصل ضرب سن این دو  $40^{\circ}$  باشد، پسرعموی کوچک تر چند سال دارد؟

اگر سن نیما برابر  $x$  باشد، طبق فرض مسئله، سن کیان برابر  $\dots - 3 - x$ . است. بنابراین:

$$\begin{array}{l} \text{ا) } x - 3 = 5 \\ x \times (-x - 3) = 40 \\ \text{ب) } -x - 3 = -8 \end{array}$$

آیا می‌توانید جواب‌های معادله فوق را حدس بزنید؟ این معادله از درجه چند است؟ از درجه‌ی ۲

این معادله چند جواب دارد؟ آیا عدد منفی هم در معادله صدق می کند؟ این جواب در این سؤال معنی دارد؟ خبر ۵-  $x^2 - 4x + 3 = 0$  عبارت  $x_1 = 1$  و  $x_2 = 3$  را که از عدد حقیقی باشد.

$$x - 3 = 1 - 3 \Rightarrow x = 1$$

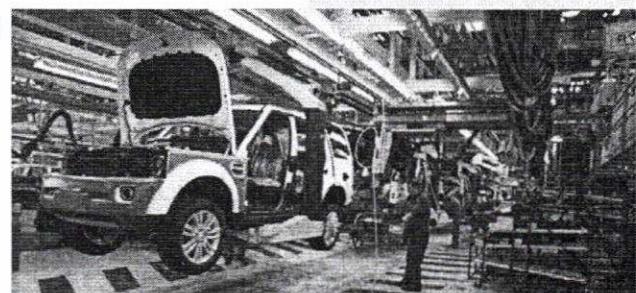
شیخ بن

۱. هر کدام از عبارت‌های زیر را به یک معادله تبدیل کنید.

الف) عددی را باید که پنج برابر آن به علاوه دو برابر با سه برابر آن عدد منهاي دو باشد.

ب) مربع عددی برابر با همان عدد به علاوه عدد یک است.

۲۰ در یک کارخانه حقوق یک مهندس دو برابر یک فن ورز (تکنسین) و  $\frac{2}{3}$  مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه ۳ مدیر بخش، ۸ مهندس و ۱۲ فن ورز دارد. مدیر عامل کارخانه برای این قسمت ماهیانه ۵۵ میلیون تومن حقوق پرداخت می‌کند. حقوق یک فن ورز در این کارخانه ماهیانه ~~خواهد~~ خواهد است؟



با توجه به پیش‌بینی درخواست بازار آهن، کارخانه ذوب آهن اصفهان، از روز شنبه هر روز تولید خود را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به سقف ۶۴ هزار تن رسیده است. مجموع تولید فولاد در این پنج روز چقدر بوده است؟

۱۱) اختلاف تولید فولاد در پایان روز شنبه با تولید فولاد در پایان روز چهارشنبه چقدر است؟

$$x=4 \Rightarrow 4x = 4 \times 4 = 16$$

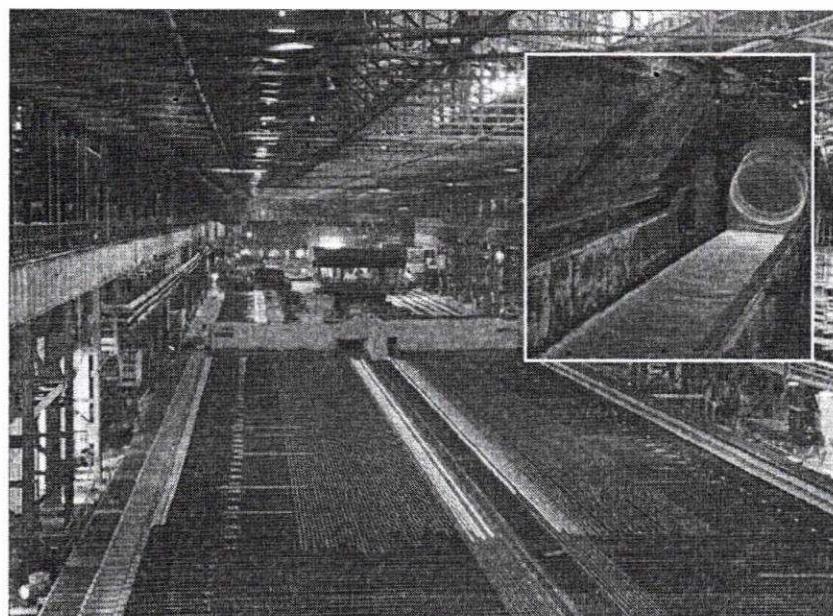
$$14x - x = 15x \Rightarrow x = 4 \Rightarrow 15 \times 4 = 60$$

$$47x = 55, 5 \Rightarrow x = \frac{55,5}{47} \Rightarrow x = 1,5$$

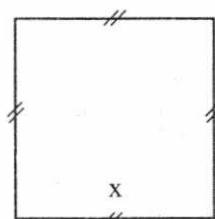
مليون و خمسين و خمسة و خمسين قرش

## کارخانه ذوب آهن اصفهان

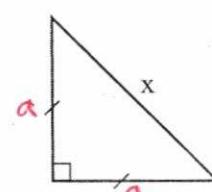
ذوب آهن اصفهان به عنوان یک صنعت مهم و مادر، در سال ۱۳۴۶ در دشت طبس، واقع در ۴۵ کیلومتری جنوب غربی شهر اصفهان، تأسیس و در سال ۱۳۵۰ با ظرفیت محصولات فولادی ۵۵ هزار تن در سال، به بهره برداری رسید. این کارخانه هم‌اکنون با تلاش شبانه‌روزی مسئولان و کارمندان آن به ظرفیت تولید پیش از ۲ میلیون تن محصولات فولادی و محصولات متنوع دیگر رسیده است این کارخانه کمکی شایان به ساختن زیربنای کشور عزیزمان، ایران اسلامی دارد.



۴. اگر مجموع مساحت‌های سه شکل زیر برابر ۷ باشد، طول ضلع مربع چقدر است؟

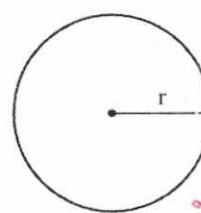


$$\text{شکل (۱)} \quad \text{مساحت مربع} = x^2$$



$$\text{شکل (۲)} \quad \text{مساحت غیر مثلث} = a^2 + x^2$$

$$\frac{a^2}{2} + x^2 = 7 \Rightarrow a^2 = \frac{7 - x^2}{2} \Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{x^2 - 7}{2}}$$



$$r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2 = \pi \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x \right)^2$$

شکل (۳)

$$= \pi \times \frac{1}{2\pi} x^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} x a = \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4}$$

$$\text{مجموع مساحت‌ها} = V \Rightarrow \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^2 = V \Rightarrow \frac{V x^2}{2} = V \Rightarrow x^2 = \frac{V}{\frac{V}{2}} \Rightarrow x^2 = \frac{V \times 2}{1 \times 2} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

۱	الف
۲	ب
۳	پ
۴	ت
۵	ث
۶	ج
۷	چ
۸	ح
۹	خ
۱۰	د
۱۱	ذ
۱۲	ر
۱۳	ز
۱۴	ز
۱۵	س
۱۶	ص
۱۷	ص
۱۸	ص
۱۹	ط
۲۰	ظ
۲۱	ع
۲۲	غ
۲۳	ف
۲۴	ق
۲۵	ک
۲۶	گ
۲۷	ل
۲۸	م
۲۹	ن
۳۰	و
۳۱	هـ
۳۲	ی

## ● بازی با حروف الفباء که ک مدل سازی ریاضی (رمزگاری)

۵. حروف الفباء فارسی از «الف» تا «ی» را به ترتیب از ۱ تا ۳۲ شماره گذاری کرده‌ایم. هر حرف بدون نقطه با شماره آن حرف از ۱ تا ۳۲ مشخص می‌شود. حروف نقطه دار به صورت  $ax^n$  مشخص شده‌اند که در آن  $a$  شماره حرف الفباء و  $n$  تعداد نقاط حرف مورد نظر است. به عنوان مثال حرف «ح» با عدد ۸ مشخص می‌شود؛ زیرا هشتین حرف الفباء فارسی است و حرف «ت» با عبارت  $4x^7$  با عدد ۴ مشخص می‌شود؛ زیرا چهارمین حرف الفباءست ( $a=4$ ) و دارای دو نقطه است ( $n=2$ ).

در این روش برای نوشتند کلمات از علامت جمع به صورت زیر استفاده می‌کنیم.  
مثلاً برای معادل ریاضی کلمه «غنجه»:

$$\text{غنجه}: \quad \begin{matrix} \text{غ} & + & \text{ن} & + & \text{ج} & + & \text{ه} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ ۲۱ & + & ۷x^۳ & + & ۲۹x & + & ۲۲x \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\text{معادل ریاضی}} ۲۱ + ۷x^۳ + ۲۹x + ۷x^۳ + ۲۱$$

حال با توجه به توضیح فوق:

- جدول زیر را کامل کنید:

الگوی ریاضی معادل آن	
کلمه به زبان فارسی	الگوی ریاضی معادل آن
الف + ب = آب	$2x^۱ + 1x^۱$
آب	$2x^۳ + 1$
ذرت	$2x^۳ + 12 + 11x$

۲- الگوی ریاضی معادل کلمه «پامبر رحمت» را مشخص کنید.

۳- آیا می‌توانید با این روش نام خود را با رمز ریاضی بیان کنید؟

۴- با الگوی فوق یک پیام کوتاه برای دوست خود بنویسید.

سلام

$28 + 3x^۳ + 15 + 31 + 30 + 4x^۳ + 4x^۳ + 15 + 30 + 10 + 29x^۱ + 21$  من دوست حَوْسَمَ.

الف) مساحت قالی

$$\frac{\text{مساحت قالی}}{7 \times 7} = \frac{280 \times 210}{7 \times 7} = 1200$$

مساحت کمترین ضلع

$$= \frac{5,880,000}{1200} = 4900$$

عدد اگر گویی موجو در دریک  
مربع ۷x۷

$$= \sqrt{4900} = 70$$

مساحت قالی، مساحت کمترین ضلع  $\Rightarrow 7 \times 7$  = مساحت کمترین ضلع

اگر در یک قالی با ابعاد  $2/10 \text{ m} \times 2/10 \text{ m}$  (که عموماً  $2 \times 3$  نامیده می‌شود) تعداد گره‌های قالی عدد باشد:

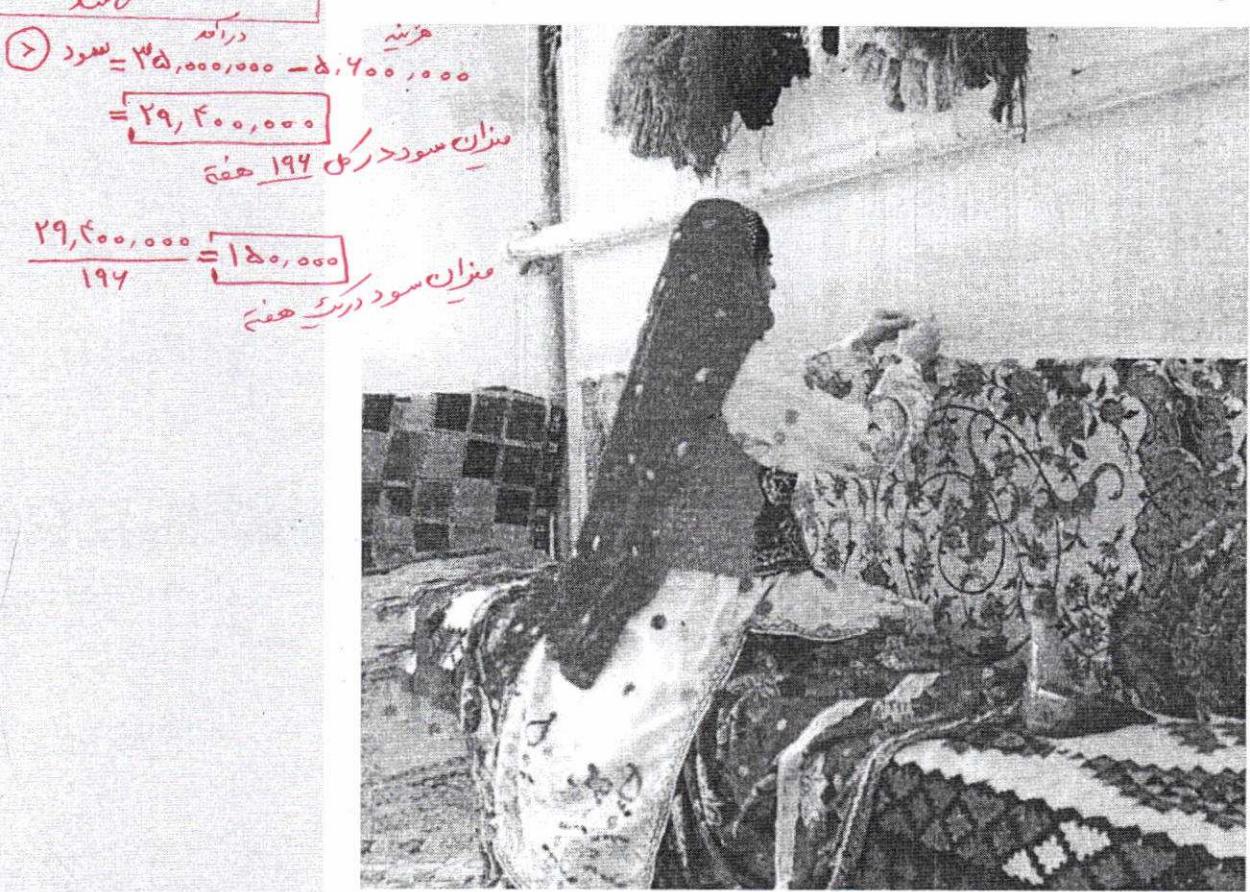
ستادطن بیج ۷x۷ چیزی؟

الف) این قالی چند رج است؟

ب) اگر برای هر گره  $1 \text{ cm}$  نخ قالی یا همان خامه قالی استفاده شود، در این قالی چند متربخ قالی استفاده شده است؟

ج) یک قالی باف حرفه‌ای در یک روز می‌تواند  $6000$  گره قالی بیافد. اگر این قالی باف ۵ روز در هفته کار کند، برای اتمام این قالی چند هفته باید کار کند؟

د) اگر این قالی باف برای خرید مواد اولیه قالی شامل تار و پود، نخ قالی و ... پنج میلیون و ششصد هزار تومان هزینه کرده باشد و بتواند در پایان بافت قالی، آنرا به قیمت  $25$  میلیون تومان بفروشد، این قالی باف برای هر هفته کار خود چه دستمزدی دریافت کرده است؟

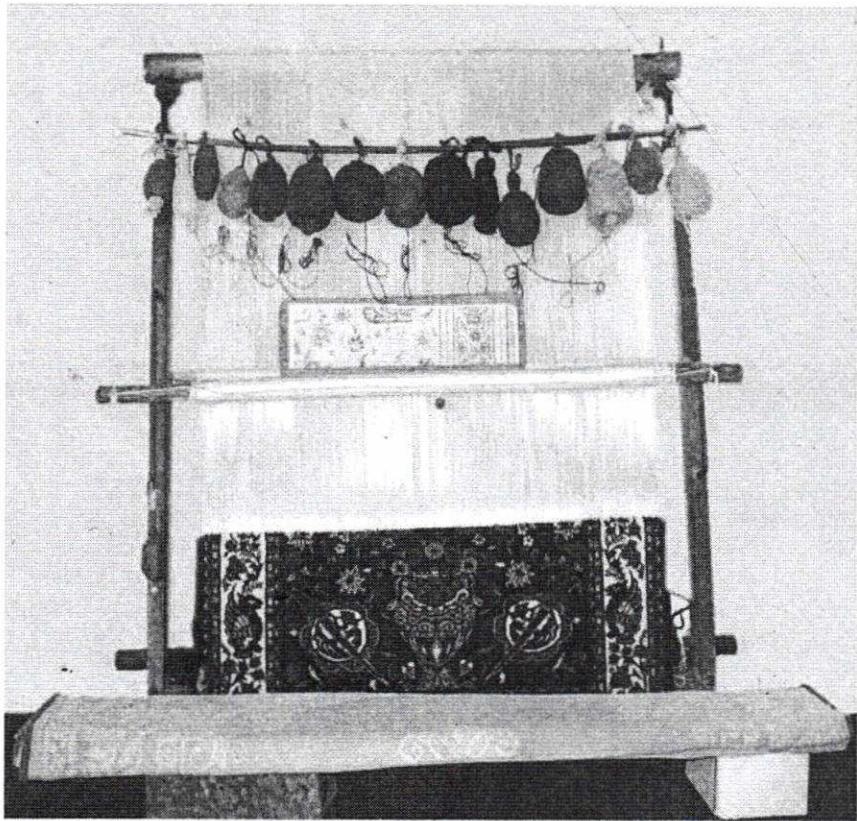


۱. «زج قالی» عبارت است از تعداد گره‌های قالی در  $7 \text{ cm}$  طول با عرض قالی. به عنوان مثال منظور از یک زج وجود  $5$  گره در یک ضلع مربع  $7 \times 7$  است.

زج قالی = تعداد گره‌های قالی در  $7 \text{ cm}$  طول با عرض قالی

## صنعت قالی بافی

یکی از قدیمی‌ترین و زیباترین هنرهای دستی مردم ایران، هنر قالی‌بافی است. در این حرفه به نخی که قالی‌با آن بافته می‌شود خامه قالی (خومه) می‌گویند. این نخ‌ها بر روی رشته‌های نخ افقی و قائمی بافته می‌شوند که به این رشته‌ها تارو بود قالی می‌گویند. عموماً ارزش یک قالی به اصالت نقشه آن، قدامت قالی، بافندۀ قالی و تعداد گره‌های قالی و جنس تارو بود قالی است.



# درس ۲

## حل معادله درجه ۲ و کاربردها

بر خلاف آنچه در «کار در کلاس‌های درس اول» دیدیم، در حالت کلی ممکن است نتوان جواب‌های معادله درجه ۲ را حدس بزنیم.  
در این درس با سه روش برای حل معادله درجه ۲ آشنا می‌شویم.

### دروس اول: تجزیه عبارت‌های جبری

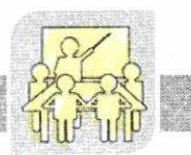
در سال قبل و در فصل اول این کتاب با مفهوم اتحاد و نیز با چند اتحاد جبری آشنا شدید و استفاده از این اتحادها را در تجزیه عبارت‌های جبری آموختید. تعدادی از این اتحادها را برای حل معادلات درجه دو به کار خواهیم برد. برای یادآوری این اتحادها را مرور می‌کیم:

$$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 & \text{اتحاد مربع مجموع در جمله‌ای} \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 & \text{اتحاد مربع تناصی در جمله‌ای} \end{cases}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \quad \text{اتحاد مزدوج:}$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \quad \text{اتحاد جمله مشترک:}$$

### فعالیت



طرف دوم تساوی‌های زیر را به کمک اتحادهای خوانده شده کامل کنید:

(الف) اتحاد مربع ۲ جمله‌ای  

$$(2x + \frac{1}{2})^2 = 4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$$

(ب) اتحاد مربع ۲ جمله‌ای  

$$(2+3xy)^2 = \dots + 12xy + 9x^2y^2$$

(پ) اتحاد مزدوج  

$$(x-2y)(\dots + xy) = x^2 - 4y^2$$

(ت) اتحاد جمله مشترک  

$$x^2 - 8x + 12 = (x-6)(x-2)$$

(ث) اتحاد مربع ۲ جمله‌ای  

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \dots + \frac{9}{4}$$

چله مشترک مجموع غیر مشترک  

$$(-4-2) \times x = -6x$$

اسطلاح نیز

نکره:

صورت

محل عبارتی درجه دوم:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

## فعالیت



مطابق نمونه، اتحاد جبری پیشنهادی در ستون اول را که مناسب برای حل معادله درجه دوم در ستون بعدی است، با یک خط به یکدیگر وصل کنید. سپس معادله فوق را در ستون آخر حل کنید.

ستون اول

ستون دوم

ستون سوم

اتحاد مریع تفاضل دو جمله	$c=0$ $x^2 + 6x = 0$	$x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x+6) = 0$ $\Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = -6$ پس معادله دوریشه حقیقی متمایز دارد.
عاملیابی (فاکتورگیری)	$x^2 + 6x + 9 = 0$	$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 = 0$ $(x+3)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ یا } x = -3$ روشی مضاعف
اتحاد جمله مشترک	$b=0$ $x^2 - 16 = 0$	$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+4) = 0$ $\Rightarrow x = 4 \text{ یا } x = -4$ $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \pm 4 \Rightarrow x = \pm 4$ روشی مضاعف
اتحاد مریع مجموع دو جمله	$x^2 + 5x + 6 = 0$	$x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2) = 0$ $\Rightarrow x = -3 \text{ یا } x = -2$ روشی مضاعف
اتحاد مزدوج و روشن ریشه‌گیری	$x^2 - 1 \cdot x + 25 = 0$	$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2 = 0$ $(x-5)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ یا } x = 5$ روشی مضاعف

در یک معادله درجه ۲، اگر  
دوریشه، باهم برابر باشند،  
اصطلاح‌آمیگوییم، معادله  
روشی مضاعف دارد.

$$x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$(x)^2 + 2(x)\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$$

۱. با توجه به معادلات فوق در حالت کلی در معادله درجه دوم:  $ax^2 + bx + c = 0$

الف) اگر  $c = 0$  از کدام روش بالا استفاده می‌کنید؟ فالترسی

ب) در چه صورتی از اتحاد مریع دو جمله‌ای استفاده می‌کنید؟ هرگاه توانست جذب ساری را بسازد

پ) برای حل معادله درجه دو به کمک اتحاد مزدوج یا ریشه‌گیری،  $b$  در چه شرطی صدق می‌کند؟  $b = 0$

آیا علامات  $a$  و  $c$  مهم است؟ بله - باشد مختلف العلامت باشد.

ت) در کدام یک از اتحادهای فوق جواب معادله، ریشه مضاعف محاسب می‌شود؟ اتحاد مریع دو جمله‌ای

۲. آیا می‌توانید معادله درجه دومی بنویسید که جواب نداشته باشد؟ دو نمونه آن را مشخص کنید.

$$x^2 + 9 = 0 \quad \text{و} \quad -x^2 - 5 = 0$$

**جواب ۱**  $2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = +\sqrt{\frac{1}{2}} \text{ یا } x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

(روش دوم: فاکتوریسی)

**(ب)**  $(x+2)(x-3) = (x-3) \Rightarrow (x+2)(x-3) - (x-3) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2-1) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -1$

بروشن

**(پ)**  $x^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = \pm\sqrt{2}$

**(س)**  $x^2 = x - \frac{1}{4}$

$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$  اعداد جملی

$(x - \frac{1}{2})^2 = 0$

$(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = 0$

$x = \frac{1}{2} \text{ یا } x = \frac{1}{2}$  رسمی عضایع

(روش دوم: جزب طرفین در عدد ۴ و بعد استفاده از اندیاد جمله مشترک)

**(ش)**  $2x^2 - 1x = 0$

$2x(x - \frac{1}{2}) = 0$

$x = 0 \text{ یا } x = \frac{1}{2}$

**(ز)**  $x^2 - 5x + 4 = 0$  اعداد جمله مشترک

$(x - 4)(x - 1) = 0$

$x = 4 \text{ یا } x = 1$

**(ه)**  $\frac{x^2}{3} = x \Rightarrow x^2 = 3x$

$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0$

$x = 0 \text{ یا } x = 3$

**(و)**  $x^2 = 5 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 5$

$x^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \text{ یا } x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

**(خ)**  $x^2 + 4x + 4 = 0$  اعداد جمله مشترک

$(x+2)^2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+2) = 0$

$x = -2 \text{ یا } x = -2$  رسمی عضایع

**(ر)**  $9x^2 + 3x - 2 = 0$

$(3x)^2 + 1(3x) - 2 = 0$  ایده جمله مشترک

$(3x+2)(3x-1) = 0$

$x = -\frac{2}{3} \text{ یا } x = \frac{1}{3}$

**(س)**  $(x-3)^2 = 4 \Rightarrow$

$x-3 = +2 \text{ یا } x-3 = -2$

## کار در کلاس



با استفاده از اتحادهای بالا معادلات زیر را حل کنید:

$$\begin{aligned} 1) x^2 + 3x - 4 &= 0 & a+b & ab \\ -4 \otimes +1 &= -4\checkmark & +4 \otimes -1 &= -4\checkmark \\ -4 \oplus +1 &= -3 & +4 \oplus -1 &= +3\checkmark \\ && +4 \oplus -2 &= -4\checkmark \\ && +4 \oplus -2 &= 0 \end{aligned}$$

از اتحاد یک جمله مشترک، تساوی را تجزیه کنید:

$\Rightarrow (x-1)(x+4) = 0$

$\Rightarrow (x-1) \dots = 0 \text{ یا } (x+4) = 0 \Rightarrow x = 1 \dots \text{ یا } x = -4\dots$

**۲)**  $4x^2 - (2-x)^2 = 0$

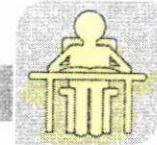
$(2x)^2$

با استفاده از اتحاد **مربوط** عبارت جبری سمت چپ تساوی را تجزیه می کنیم:

$$(2x - (2-x))(2x + (2-x)) = 0 \Rightarrow (4x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{4} \text{ یا } x = -2$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 $4x - 2 = 0 \quad x + 2 = 0$   
 $\frac{4x}{4} = \frac{2}{4}$

## تمرین



## ۱) معادلات زیر را حل کنید.

**پ)**  $x^2 - 2x^2 = 0$

**ب)**  $(x+2)(x-3) = x-3$

**الف)**  $2x^2 - 8 = 0$

**ج)**  $x^2 - 5x + 6 = 0$

**د)**  $2x^2 - 8x = 0$

**ت)**  $x^2 = x - \frac{1}{4}$

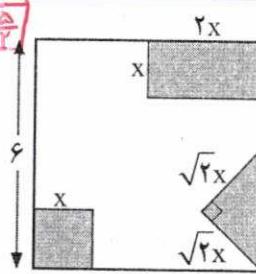
**خ)**  $x^2 + 4x + 4 = 0$

**ح)**  $x^2 = 5 - x^2$

**ج)**  $\frac{x^2}{3} = x$

**ذ)**  $(x-3)^2 = 4$

**ز)**  $4x^2 + 3x - 2 = 0$



۲) از مربعی به ضلع ۶cm سه شکل روبه رو بریده شده است. مساحت باقی مانده  $24 \text{ cm}^2$  است. طول ضلع کوچک بریده شده چقدر

است. طول ضلع کوچک بریده شده چقدر است؟  $x = ?$

$$x^2 + 2x^2 + 2x^2 = 4x^2$$

مساحت باقی باید  $= x \times 2x = 2x^2$  باشد  
مساحت زیر مربع زیر است  
 $36 - 4x^2 = 24 \Rightarrow 4x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$$=\frac{1}{4}x^2x^2=x^2$$

۳) معادله درجه دومی بنویسید که  $x = 2$  و  $x = -3$  جواب های آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

$$\begin{aligned} x &= 2 \quad x = -3 \\ x-2 &= 0 \quad x+3 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow x^2 + (-2+3)x + (-2)(3) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \\ &\text{از این جمله مشترک} \\ &\text{بروشن} \end{aligned}$$

$$x^2 + 3x - 2x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$x-3 = +2 \text{ یا } x-3 = -2$

$|x| = 5$

$|x| = 1$

جواب ④ مسئله (الف)

$$x=1 \quad | \quad x=1 \\ x-1=0 \quad | \quad x-1=0 \Rightarrow (x-1)(x-1)=0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$1) \quad k=2 \rightarrow (x-1)^2=2 \quad | \quad x-1=+\sqrt{2} \quad | \quad x-1=-\sqrt{2} \\ x=1+\sqrt{2} \quad | \quad x=1-\sqrt{2}$$

برای برابری

۴) معادله درجه دومی بنویسید که  $x=1$  ریشه مضاعف آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟ نه

۵) در معادله  $K=(x-1)^2=0$

(الف) جواب این معادله را در صورت وجود به ازای  $K=4$ ,  $K=2$ ,  $K=0$  و  $K=-4$  بدست آورید.

(ب) به ازای چه مقادیری از  $k$  معادله ریشه مضاعف دارد؟  $k=0$

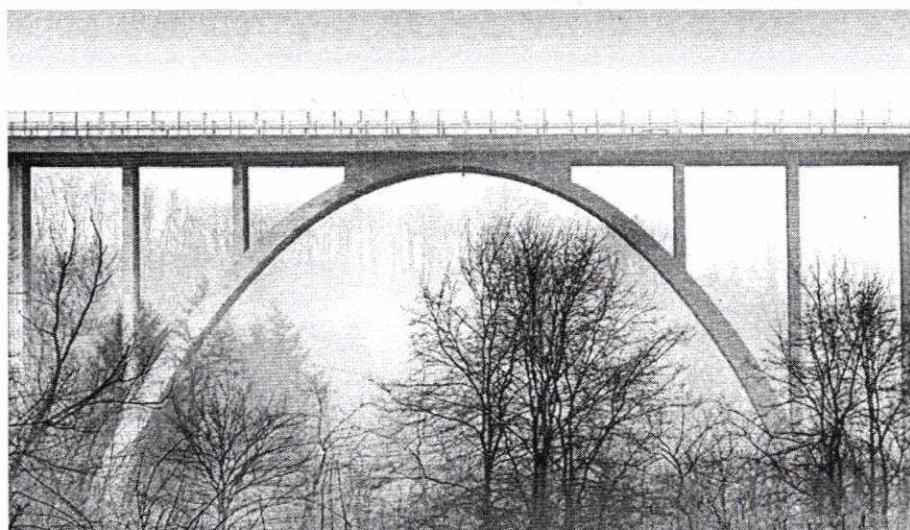
(پ) به ازای چه مقادیری از  $k$  معادله دو ریشه حقیقی دارد؟  $k > 0$  (عکادیریشت  $k$ )

(ت) به ازای چه مقادیری از  $k$  معادله ریشه حقیقی ندارد؟  $k < 0$  (عکادیریصی  $k$ )

۶) برای ساخت تابلوی راهنمایی «یک طرفه» روی یک پل، مطابق شکل زیر از برچسب‌های آبی و سفید

استفاده می‌شود. هزینه  $1\text{cm}^2$  برچسب سفید  $30$  تومان و هزینه  $1\text{cm}^2$  برچسب آبی  $10$  تومان است.

مجموع هزینه برچسب‌های سفید و آبی  $27000$  تومان شده است.



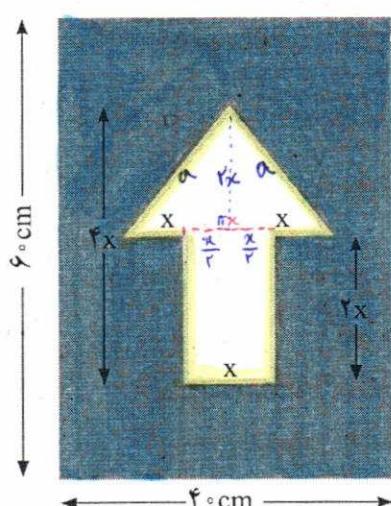
(الف) اندازه  $x$  چقدر است؟

(ب) اگر در این تابلوی راهنمایی، مطابق شکل رویه را  
از خطوط برچسب شبرنگ زرد استفاده کنیم که هزینه  
 $1\text{cm}^2$  آن  $100$  تومان است، هزینه رنگ آمیزی تابلو  
 $34800$  تومان می‌شود. در این حالت اندازه  $x$

چقدر است؟

$$\text{مساحت سفید} + \text{مساحت ملک} = \text{مساحت ملک}$$

$$=\frac{1}{2}x \cdot 3x \cdot 2x + x \cdot 2x = 5x^2 \quad \xrightarrow{\text{مساحت سفید}} 5x^2 \cdot 30 = 150x^2$$



$$\text{هزینه برچسب} = 24000 - 5x^2 \quad \xrightarrow{\text{آبی}}$$

$$(24000 - 5x^2) \cdot 10 = 24000 - 50x^2$$

$$24000 - 50x^2 = 24000 - 50x^2 \quad \xrightarrow{\text{محاسبه هزینه}}$$

$$100x^2 = 30000 \rightarrow x^2 = 300 \rightarrow x = \pm \sqrt{30} \rightarrow x = +\sqrt{30}$$

$$12x \times 100 = 1200x$$

$$12x \times 100 = 1200x \quad \xrightarrow{\text{محاسبه نزدیکی}} 1200x = 1200x$$

$$100x^2 + 1200x - 10800 = 0 \rightarrow x^2 + 12x - 108 = 0 \rightarrow (x+18)(x-4) = 0 \quad \xrightarrow{x=-18 \text{ و } x=4}$$

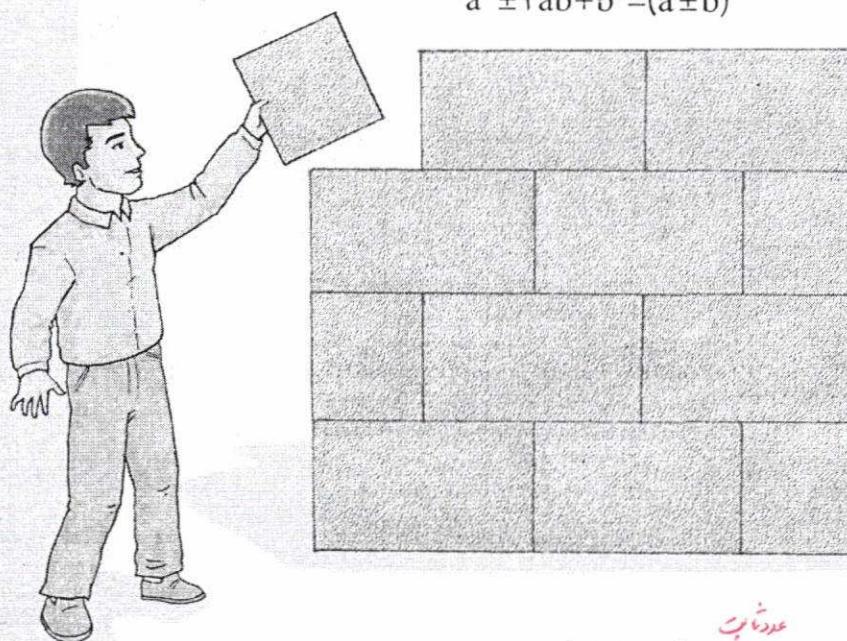
$$a^2 = (x + \frac{a}{2})^2 + (\frac{c}{4})^2$$

$$a^2 = \frac{4a}{4}x^2 + \frac{c}{4} \rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{a}}{2}x$$

$$a = \frac{a}{2}x$$

## درسیم هشتم: مربع کامل

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$



عدد ثابت

مثال: معادله درجه دوم  $2x^2 + 3x - 5 = 0$  را حل کنید.

حصه جلاعت نهادم به دریز محمد  
ساوی باشند

۱ ابتدا قرینه عدد ثابت معادله: یعنی  $+5$  را به دو طرف معادله اضافه می کنیم:

$$2x^2 + 3x = 5 \quad (1) \quad \leftarrow 2x^2 + 3x - 5 + 5 = 0 + 5$$

اگر ضریب  $x^2$  مخالف ۱ باشد، دو طرف معادله را به ضریب  $x^2$  تقسیم می کنیم. بنابراین، در معادله

بالا دو طرف تساوی را برابر عدد  $\frac{5}{2}$ ... تقسیم می کنیم:

$$\frac{2x^2 + 3x}{2} = \frac{5}{2} \quad (2)$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2}$$

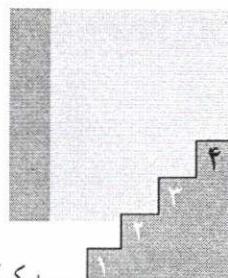
در عبارت  $x^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$  با در نظر گرفتن اتحاد مربع دوجمله‌ای  $x^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

برای ایجاد جمله  $2ab$ ,  $x^2 + \frac{3}{2}x$  را در عدد ۲ ضرب و تقسیم می کنیم:

$$\frac{3}{2}x = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}x = 2 \times \left( \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}x \right) = 2 \times \frac{3}{4}x$$

- سپس مربع عدد  $\frac{3}{4}$  را به دو طرف تساوی (۲) اضافه می کنیم:

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \left( \frac{3}{4} \right)^2 = \frac{5}{2} + \left( \frac{3}{4} \right)^2 \quad (3)$$



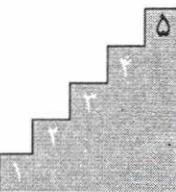
به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای سمت چپ تساوی (۳) را به  $(a+b)^2$  تبدیل می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + 2 \times \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = (x + \frac{3}{4})^2$$

$a^2$        $b \times a$        $b^2$        $(a+b)^2$

بنابراین:

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{16} \rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \quad (4)$$



با استفاده از ریشه‌گیری از ۲ طرف تساوی، مقدار  $x$  بدست می‌آید:

$$x + \frac{3}{4} = \pm \frac{\sqrt{49}}{4} \Rightarrow x = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{49}}{4} = \boxed{1} \quad \text{یا} \quad x = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{49}}{4} = -\frac{10}{4} = \boxed{-\frac{5}{2}}$$

پس جواب‌های معادله  $x^2 + 3x - 5 = 0$  یا همان ریشه‌های معادله، دو عدد حقیقی

$$x = \boxed{\frac{5}{2}} \quad \text{و} \quad x = \boxed{-1}$$

هستند.

مراحل حل معادله ذکر شده را از پله دوم به بعد به کمک تعبیر هندسی  
زیر نیز می‌توان بیان کرد:

## خواندنی

- اگر  $x^2$  را مساحت مربعی به ضلع  $x$  و  $\frac{3}{2}x$  را مساحت مستطیلی به طول  $\frac{3}{2}$  و عرض  $x$  در نظر بگیریم:

$$x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2}$$

$\frac{3}{2} \div 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

- با نصف کردن مستطیل به طول  $\frac{3}{2}$  در تساوی (۱) و تبدیل آن به دو مستطیل به طول  $\frac{3}{4}$ . در تساوی (۲):

$$x^2 + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right)x = x^2 + x \cdot \frac{3}{4} + x \cdot \frac{3}{4}$$

و قرار دادن ۲ مستطیل فوق در کنار مربع  $x^2$ ، تساوی بالا به صورت زیر در می آید:

$$x^2 + x \left( \frac{3}{4} \right) + x \left( \frac{3}{4} \right) = \frac{5}{2}$$

- شکل سمت چپ برای آنکه به یک مربع کامل تبدیل شود نیاز به مربعی به ضلع  $\frac{3}{4}$  دارد.

$$x^2 + x \left( \frac{3}{4} \right) + x \left( \frac{3}{4} \right)$$

$$x + \frac{3}{4}$$

$$x^2 + x \left( \frac{3}{4} \right) + x \left( \frac{3}{4} \right) = \frac{5}{2} + \frac{3}{4}$$

جزء مرفون

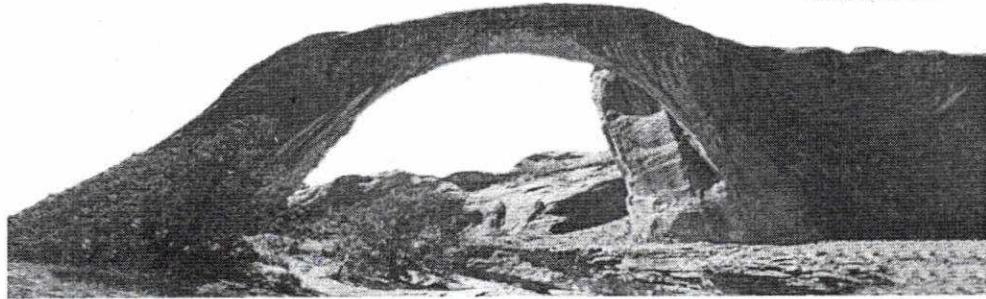
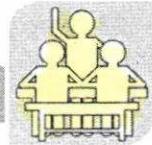
به اضافه کردن آن به ۲ طرف تساوی:

$$(x + \frac{3}{4})^2 = \frac{49}{16}$$

که مطابق حل صفحه قبل معادله دارای ۲ جواب  $x = 1$  و  $x = -\frac{5}{2}$  است. البته در روش هندسی فوق چون  $x$  طول ضلع است، جواب  $x = -\frac{5}{2}$  معنی پیدا نمی کند.

شیوه حل معادله درجه دو به روش هندسی ذکر شده اولین بار توسط ریاضیدان، منجم، مورخ و جغرافیدان ایرانی و مسلمان «ابو عبدالله محمد بن موسی خوارزمی» در کتاب جبر و مقابله در بخش اول کتاب در اواخر قرن دوم هجری مطرح شد. سؤال قبل که صورت کلی آن  $x^2 + px = q$  و با فرض  $p, q > 0$  است، یکی از شش حالت خاصی است که خوارزمی برای حل معادله درجه دو در این کتاب مطرح و حل کرده است. هر چند همه معادلات درجه دوم را نمی توان با این شش روش حل کرد؛ اما بیان مسائل هندسی در قالب جمله های جبری در این کتاب بنای اصلی توسعه نظریه جبری معادلات است. کتاب جبر و مقابله خوارزمی قرن ها مرجع و مأخذ اروپاییان و تاقرقن شاتزدهم میلادی مبنای مطالعات علمی آنان بوده است. این کتاب که به زبان عربی نوشته شده است، در قرن ۱۲ میلادی دوباره توسط «جرارد کرمونی» و «رابرت چستری» به زبان لاتین ترجمه شده است. این ترجمه هارا می توان آغاز علم جبر در اروپا دانست. همچنین در سال ۱۸۳۱ میلادی نیز «فردریک رزن» این کتاب را بار دیگر از زبان عربی به زبان انگلیسی ترجمه کرده است. گفتنی است که یک نسخه خطی این کتاب در دانشگاه آکسفورد و نسخه خطی دیگر آن در قاهره موجود است.

## کار در کلاس



با محاسبه مجموع زمان طی کردن پله‌های زیر برای مراحل حل معادله درجه دو در چند ثانیه می‌توانید به بالای پله برسید؟ بهترین نتیجه بدست آمده در کلاس چند ثانیه با عملکرد شما اختلاف دارد؟

## تمرین قبل از مسابقه

$$1) 2x^2 - 6x - 1 = 0 \quad \text{مخفی کردیم!}$$

$$2x^2 - 4x - x + 1 = 0 + 1$$



$$\frac{2x^2 - 6x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 3x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 3x &= \frac{1}{2} \\ x^2 - 2x - \frac{3}{2}x &= \frac{1}{2} \\ \downarrow \\ \left(\frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4} \\ x^2 - 2\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{9}{4} &= \frac{1}{2} + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$(x - \frac{3}{2})^2 = \frac{11}{4}$$

$$\begin{cases} x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{11}}{2} \\ x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2} \\ x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2} \end{cases}$$

$$2) 2x^2 - 2 = 6x$$

$$\frac{2x^2 - 6x}{2} = \frac{2}{2}$$

$$x^2 - 3x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - \frac{3}{2}x &= \frac{1}{2} \\ \downarrow \\ \left(\frac{3}{2}\right)^2 &= (1)^2 = 1 \\ x^2 - 2x + 1 &= \frac{1}{2} + 1 \end{aligned}$$

$$(x-1)^2 = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x = \dots\dots \\ x = \dots\dots \end{cases}$$

## مسابقه



جزء

$$x - 1 = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \\ x = 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$x^2 - \Delta x + 4 = 0 \rightarrow x^2 - \Delta x + 4 - 4 = 0 - 4$$

اضافه کردن مرتبتی  
در رابطه با عبارت مرتبتی

$$x^2 - 2\left(\frac{\Delta}{4}x\right) = -4 \rightarrow x^2 - 2\left(\frac{\Delta}{4}x\right) + \frac{\Delta}{4} = \frac{-4 + \Delta}{4}$$

به ازای اینجا  $\frac{\Delta}{4}$

$$\left(\frac{\Delta}{4}\right)^2 = \frac{\Delta}{4}$$

$$\left(x - \frac{\Delta}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x - \frac{\Delta}{4} = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\Delta}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\Delta+2}{4} = ① \\ x = \frac{\Delta}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\Delta-2}{4} = ② \end{cases}$$

$$(x^2 + 2\left(\frac{1}{4}x\right) - 2 = 0 \rightarrow 4x^2 + 4x - 8 = 0 + 2 \rightarrow x^2 + \frac{1}{4}x = 2$$

اضافه کردن مرتبتی  
در رابطه با عبارت مرتبتی

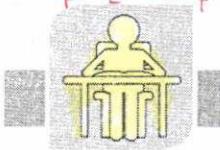
$$x^2 + 2\left(\frac{1}{4}x\right) = 2 \rightarrow x^2 + 2\left(\frac{1}{4}x\right) + \frac{1}{4} = \frac{2 + 1}{4}$$

به ازای اینجا  $\frac{1}{4}$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \rightarrow x + \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

رسیه مصائب  
است

تمرین



معادلات درجه دو زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل نماید.

$$x^2 + 2\left(\frac{4}{9}x\right) + 9 = -9 + 9$$

$$\left(\frac{4}{9}x\right)^2 = 9$$

$$9x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$(x+3)^2 = 0 \rightarrow (x+3) = 0 \rightarrow x = -3$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{4} = -x$$

$$(x+3)(x+3) = 0 \rightarrow x = -3 \quad \text{رسیه مصائب است}$$

روش سوم: روش کلی حل معادله درجه دو

با استفاده از روش مربع کامل برای حل معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  روش کلی برای حل معادله

به دست می آید. با مرور پله های گفته شده در بخش قبل:

۱- فرینه عدد ثابت معادله را به دو طرف معادله اضافه می کنیم:

$$ax^2 + bx = -c \quad (1)$$

$$\frac{ax^2 + bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad (2)$$

دو طرف معادله را به ضریب  $x^2$  یعنی  $a$  تقسیم می کنیم:

ضریب  $\frac{b}{a}$  را در عدد ۲ ضرب و تقسیم می کنیم و مربع عدد به دست آمده؛ یعنی  $\frac{b^2}{4a}$  را به دو طرف تساوی (۲) اضافه می کنیم:

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \quad (3)$$

عبارت سمت چپ تساوی (۳) را به مربع کامل تبدیل می کنیم:

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \cancel{\times \frac{4a}{4a}} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

با شرط  $b^2 - 4ac > 0$  و با استفاده از رشته گیری از ۲ طرف تساوی:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## دلایل

عبارت  $b^2 - 4ac$  را می‌بین معادله درجه دوم می‌نامند و آن را با  $\Delta$  نشان می‌دهند.

براساس علامت  $\Delta$  می‌توان در وجود و تعداد ریشه‌های معادله درجه دوم اظهار نظر کرد:

الف) اگر  $\Delta > 0$  باشد، معادله دارای ۲ جواب است که عبارت اند از:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ب) اگر  $\Delta = 0$  باشد، معادله دارای یک جواب است. (در این حالت این ریشه را ریشه مضاعف می‌نامند).

$$x = -\frac{b}{2a}$$

پ) اگر  $\Delta < 0$  باشد معادله جواب ندارد. (جراحتی از اعداد حقیقی، ریشه‌ی درم ندارند).

## فعالیت



۱. جواب‌های معادله  $x^2 - 3x + 2 = 0$  را در صورت وجود به دست آورید.

حل: با توجه به ضرایب معادله، به ترتیب:  $c = 2$  و  $b = -3$  و  $a = 1$  است.

بنابراین:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

$\Delta > 0$  پس معادله دارای ۲ جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = 1$$

۲. جواب‌های معادله  $4x^2 + 7x - 2 = 0$  را در صورت وجود به دست آورید.

حل: با در نظر گرفتن:  $a = 4$ ,  $b = 7$ ,  $c = -2$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 49 - 4 \times 4 \times (-2) = 81$$

$\Delta > 0$  و معادله دارای دو جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2 \times 4} = \frac{-7 \pm 9}{8} \Rightarrow x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad x = \frac{-16}{8} = -2$$

۳.  $\Delta$  جهارمین حرف الفبای یونانی است که آن را «دلایل» می‌خوانند. در الفبای یونانی، دلایل بزرگ را با علامت  $\Delta$  و دلایل کوچک را با علامت  $\delta$  نشان می‌دهند.

ضرایب  
فعالیتی از معادله  
نستند و دارای  $\Delta$  (مقدار)  
حل نمود. اینها جزو اول نیزند.  
عین مثل برای  $\Delta = 0$   
کش ریشه مضاعف می‌گردند.



$$(الف) 3x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(3)(-2) = 49 \Rightarrow \Delta = 49 > 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2(3)} \Rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

$$x_1 + x_2 = -2 + \frac{1}{3} = \frac{-6 + 1}{3} = \frac{-5}{3} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{5}{3}$$

معارله ریشه دارد.

$$(ب) 4x^2 + 3x - 7 = 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4(4)(-7) = 121 > 0$$

معارله ۲ ریشه دارد.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{8}$$

$$x_1 = \frac{-7}{4} \quad x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-7}{4} + 1 = \frac{-3}{4}$$

نتیجه:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

۳. جواب‌های معادله  $3x^2 + x - 7 = 0$  را در صورت وجود به دست آوردید.

حل: با در نظر گرفتن  $a=3$   $b=1$   $c=-7$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(3)(-7) = 1 - (-84) = 85$$

$\Delta$  بنابراین معادله ریشه حقیقی ندارد.



### کار در کلاس

معادلات زیر را حل کنید و با به دست آوردن ریشه‌های معادله،  $x_1$  و  $x_2$  حاصل  $x_1 + x_2$  را به دست آوردید.

آیا ارتباطی میان مجموع ریشه‌ها و ضرایب  $a$ ,  $b$  و  $c$  در معادله درجه دو گفته شده وجود دارد؟

$$3x^2 + 5x - 2 = 0 \quad 4x^2 + 3x - 7 = 0 \quad (\text{الف})$$

### طرح و حل چند مسئله کاربردی از معادله درجه دو

#### مسئله اول:

مقدمه: در هر مسئله اقتصادی اگر  $x$  مقدار یا تعداد محصول باشد، سهتابع مهم زیر تعریف می‌شوند:

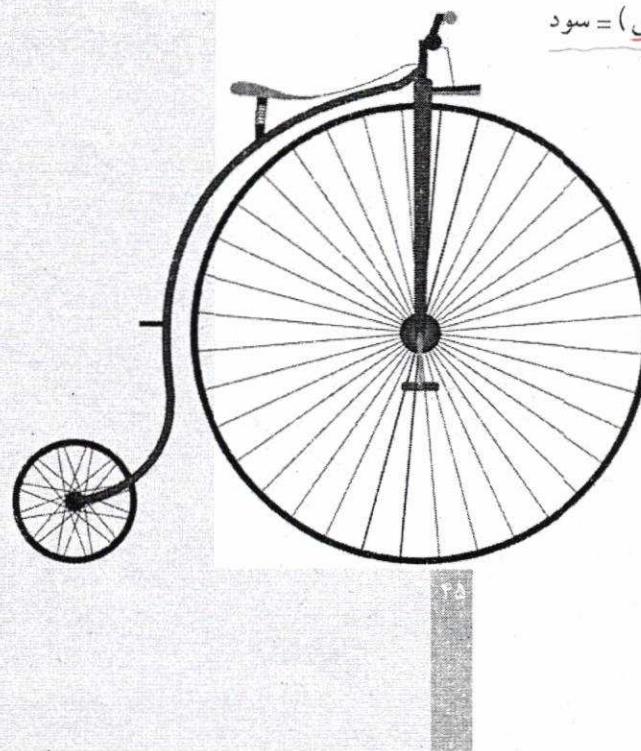
تابع هزینه (cost) یا  $C(x)$ : هزینه تولید  $x$  واحد کالا

تابع سود (profit) یا  $P(x)$ : سود حاصل از فروش  $x$  واحد کالا

تابع درآمد (Revenue) یا  $R(x)$ : درآمد حاصل از فروش  $x$  واحد کالا

رابطه میان ۳ تابع فوق به صورت زیر است:

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow \text{هزینه} - \text{درآمد}(\text{فروش}) = \text{سود}$$



فرض کنید، شما یک دوچرخه جدید طراحی کرده‌اید و پس از آزمایش‌ها و تأییدهای اولیه می‌خواهید آن را به صورت انبوه تولید کنید. هزینه‌های شما شامل ۲ بخش‌اند:

۱. هزینه اولیه شامل ۷ میلیون تومان برای خرید دستگاه‌های کارخانه و تبلیغات.

۲. هزینه تولید که عبارت است از ۱۱۰ هزار تومان برای ساخت هر دوچرخه.

هزینه اولیه سرب و ساری ۷ میلیون سران

هزینه تولید هر دوچرخه ۱۱۰ هزار تومان

اگر  $V$  قیمت یک دوچرخه باشد و تعداد فروش دوچرخه از رابطه  $70000 - 200V$  به دست آید:

(الف) تابع سود کارخانه را به دست آورید.

(ب) سود کارخانه پس از تولید چند دوچرخه حاصل می‌شود؟

حل :

$$R(x) = \text{قیمت هر دوچرخه} \times \text{تعداد فروش دوچرخه} = (70000 - 200V) \times V = 70000V - 200V^2$$

$$C(x) = \text{هزینه اولیه} + 110(70000 - 200V) = 110 \cdot 70000 - 22000V$$

$$\text{سود } P(x) = \dots$$

مسئله دوم :

در یک کارگاه تولید چتر، سود حاصل از فروش  $x$  چتر از رابطه

به دست می‌آید.

$$P(x) = -0.00405x^2 + 8.15x - 100$$

(الف) اگر این کارگاه چتری نفروشد،  
چقدر از دست می‌دهد؟ واحد



(ب) نقطه سر به سر (break-even)

میزانی از تولید یک بنگاه

اقتصادی را نشان می‌دهد که در

آن میزان هزینه‌ها با میزان درآمدات

برابر می‌شود و بنگاه در این سطح

از تولید نه سود می‌کند و نه ضرر.

اگر تولید بیشتر از نقطه سر به سر

باشد، بنگاه سود خواهد برد و اگر

کمتر باشد، زیان خواهد دید.

در مثال بالا به ازای چه تعداد فروش چتر، کارگاه به نقطه سر به سر خود می‌رسد؟ چندین تولید چتر

$$P(x) = \text{درآمد} - \text{هزینه} = 200x - 0.00405x^2$$
$$0 = 200x - 0.00405x^2 + 8.15x - 100$$

$$\Delta = (8.15)^2 - 4(-0.00405)(-100) = 44,8025$$

$$x = \frac{-8.15 \pm \sqrt{44,8025}}{2(-0.00405)}$$

عادل دارد

بر دارد

غیر

$$x = 200$$

حل

$$(1) x^2 - x + 5 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(5) = -19 < 0 \rightarrow \text{معادله ریشه ندارد.}$$

$$(2) 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(4)(1) = 0 \rightarrow \text{معادله ریشه مطابق دارد.}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$(3) 3x^2 - x + 4 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(4) = -47 < 0 \rightarrow \text{معادله ریشه ندارد.}$$

$$(4) x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$$

$$\Delta = \sqrt{3}^2 - 4(+1)(-1) = 7$$

$$x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2} \quad x_2 = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-5) = 49 \rightarrow 2x^2 - 2x - 5 = 0 \text{ را به روش } \Delta \text{ حل کنید. با محاسبه ریشه های } x_1 \text{ و } x_2 \text{ حاصل ضرب آنها را}$$

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{49}}{2} \rightarrow x_1 = \frac{5}{2} \quad x_2 = -1 \Rightarrow x_1 \times x_2 = \frac{5}{2} \times (-1) = \frac{-5}{2} \rightarrow \text{بدست آورید.}$$

$$x = -4 \rightarrow 2(-4)^2 - a(-4) + 28 = 0 \text{ برابر } 2x^2 - ax + 28 = 0 \text{ باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟}$$

$$a = -10$$

$$2x^2 + 10x + 28 = 0$$

$$\Delta = 1 > 0 \rightarrow \text{معادله ریشه دارد.}$$

$$x = \frac{-10 \pm 10}{4} \rightarrow x_1 = -4 \quad x_2 = -2$$

$$\text{رسانیده بود} \quad x_1 = -4 \quad x_2 = -2$$

$$4. \text{ مساحت مثلث و مستطیل در شکل زیر مساوی اند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟}$$

$$3x^2 + 5x + 2 = 3x^2 + 4x \Rightarrow 3x^2 + 5x + 2 - 3x^2 - 4x = 0 \Rightarrow -x = -2 \Rightarrow x = 2$$

$$\begin{aligned} x+1 &= (3x+2)(x+1) \\ &= 3x^2 + 3x + 2x + 2 \\ &= 3x^2 + 5x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{مساحت} &= \text{طول} \times \text{عرض} \\ &= 3x+2 \times x+1 \Rightarrow 2+1 = 3 \\ &= \frac{1}{2} (3x+2)(x+1) \\ &= 3x^2 + 4x \end{aligned}$$

$$5. \text{ کدام پک از معادلات زیر به ازای هر مقدار } a \text{ همواره دارای جواب های حقیقی است؟}$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(a) = 1 - 4a \quad \begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = a^2 - 4(1)(-1) \\ \Delta = a^2 + 4 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - 4a \geq 0 \rightarrow 4a \leq 1 \\ 1 - 4a \leq 0 \rightarrow 4a \geq 1 \\ 1 - 4a = 0 \rightarrow a = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - x + a = 0 \\ x^2 + ax - 1 = 0 \\ x^2 + 4x + 4 > 0 \end{cases}$$

$$6. \text{ نشان دهید در معادله درجه دوم } ax^2 + bx + c = 0 \text{ اگر } a+c=b \text{ باشد، یکی از ریشه های معادله}$$

$$\text{برابر } -1 \text{ و دیگری } x = -\frac{c}{a} \text{ است.}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{با تعیین ریشه های معادله نشان دهید حاصل ضرب ریشه های معادله درجه دوم } ax^2 + bx + c = 0 \text{ مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد.}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\text{دوم برابر } \frac{c}{a} \text{ است.}$$

$$7. \text{ اگر مجموع ضرایب معادله درجه دوم } ax^2 + bx + c = 0 \text{ برابر صفر باشد.}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-a-c)^2 - 4ac = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac = (a-c)^2 \quad \text{یکی از ریشه های معادله } x = \frac{c}{a} \text{ و دیگری } x = \frac{a-c}{a} \text{ است.}$$

$$\Delta = (a-c)^2 > 0 \rightarrow x_1 = \frac{a-c}{a} \quad x_2 = \frac{a-c-a-c}{a} = \frac{-2c}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{a-c-a-c}{a} = \frac{-2c}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = -2c/a$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(a-c) \pm \sqrt{(a-c)^2}}{2a} \quad \text{حل تمرین های ستاره دار اجباری نیست.}$$

در حل تمرین ۳، من توان سیداره ماقن صدر  
از مجموع یا حاصل ضرب ریشه ها، برای  
محصول  $a \cdot c$ ، از مجموع  $a + c$  درست  
ماقن ریشه های دم استفاده نمود.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (a+c)^2 - 4ac = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2 \quad 4)$$

$$\Delta = (a-c)^2 > 0 \rightarrow x_1 = \frac{-a-c+a-c}{2a} = \frac{-2c}{2a} = \frac{c}{a} \quad x_2 = \frac{-a-c-a+c}{2a} = \frac{-2a}{2a} = -1$$

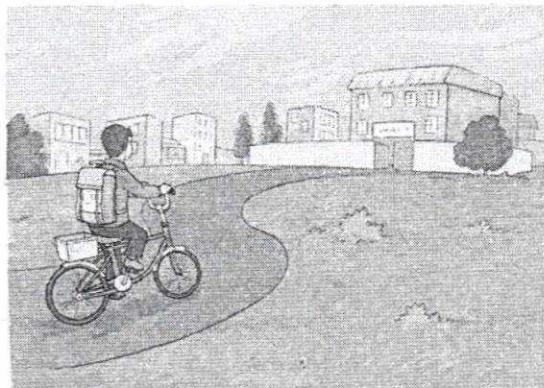
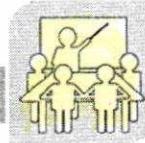
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-a-c+a-c}{2a} = \frac{-2c}{2a} = \frac{c}{a} \\ x_2 = \frac{-a-c-a+c}{2a} = \frac{-2a}{2a} = -1 \end{cases}$$

$$x = \frac{-c}{a} \quad x = -1$$

## درس ۳

### معادلات شامل عبارت‌های گویا

#### فعالیت



علی هر روز صبح با دوچرخه به مدرسه می‌رود. او از در منزل تا سر خیابان اصلی را ۴ دقیقه رکاب می‌زند و از آنجا تا مدرسه مسافت ۲۵۰۰ متری را از مسیر ویژه دوچرخه‌سواری با سرعت متوسط ۱۵ کیلومتر بر ساعت طی می‌کند.

می‌خواهیم با انجام فعالیت زیر مدت زمانی را که طول می‌کشد علی از منزل به مدرسه برسد، محاسبه کنیم.

۲۵۰۰ = ۱۰۰۰ + ۲۵۰

۱. دستور محاسبه سرعت متوسط  $\frac{x}{t} = v$  است که در آن  $x$  مسافت طی شده و  $t$  مدت زمان طی مسیر است.

$$15 = \frac{250}{t}$$

داده‌های مسئله را در این دستور جایگزین کنید.

۲. برابری  $15 = \frac{250}{t}$  یک معادله شامل عبارت گویا است. از آنجاکه  $t \neq 0$ , پس معادله با معناست،

$$\frac{250}{t} - 15 = 0 \Rightarrow \frac{250}{t} = 15 \Rightarrow t = \frac{250}{15} = 16\frac{2}{3}$$

۳. با مخرج مشترک گیری سمت چپ معادله را به صورت یک کسر بنویسید.

**توجه:** ۴. کسری که مخرج آن مخالف صفر است، فقط وقتی برابر با صفر می‌شود که صورت آن صفر شود، بنابراین صورت کسر بالا را برابر با صفر قرار دهید.

$$250 - 15t = 0 \Rightarrow 15t = 250 \Rightarrow t = \frac{250}{15} = 16\frac{2}{3}$$

۵. از اینجا به بعد یک معادله یک مجهولی درجه اول به دست می‌آید. آن را حل و مقدار  $t$  را محاسبه کنید.

۶. مدت زمان رسیدن علی از منزل تا مدرسه چقدر است؟

$$16\frac{2}{3} \times 40 = 667\frac{1}{3}$$

$$\text{تصویر} = 16\frac{2}{3} + 4 = 17\frac{2}{3}$$

زمان این روز می‌گذرد (از منزل تا مدرسه) ۱۷ ساعت خیابان اصلی (از خیابان اصلی تا مدرسه) ۴ ساعت



برای حل معادله های شامل عبارت های گویا، ابتدا با توجه به خاصیت های معادله و مخرج مشترک گیری، معادله ای نظیر  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  به دست می آید. با شرط اینکه  $P(x) \neq Q(x)$ ، وقتی معادله جواب دارد که  $P(x) = 0$  است، سپس ریشه های این معادله را بدست می آوریم. از بین ریشه های بدست آمده، آنها را قبول می کنیم که مخرج کسر را صفر نکنند. (چرا؟) **چون تسمی عد دیر اعتراف نشده است.**

$$\text{مثال: معادله } 2 - \frac{5(x-1)}{x-3} = 0 \text{ را حل کنید.}$$

حل: با اضافه کردن  $-2$  به دو طرف معادله خواهیم داشت:

$$\frac{1}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - 2 = 0$$

اکنون با مخرج مشترک گیری از سمت چپ تساوی آن را به صورت یک کسر بنویسید.

$$\frac{1}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - \frac{2(x-3)}{x-3} = 0 \Rightarrow \frac{1 - 5x + 5 - 2x + 6}{x-3} = 0 \Rightarrow \frac{21 - 7x}{x-3} = 0$$

مشاهده می کنیم که به معادله ای نظیر  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  رسیدیم. بنابراین با شرط  $x \neq 3$  و با حل معادله  $P(x) = 0$ ، ریشه های معادله را در صورت وجود پیدا می کنیم.

$$21 - 7x = 0 \Rightarrow x = 3$$

چون  $x=3$  مخرج کسرها را صفر می کند، این ریشه قابل قبول نیست و معادله ریشه ندارد.

$$\text{مثال: معادله } \frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - x - 20} \text{ را حل کنید.}$$

$$\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} - \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(x+4)}{(x-5)(x+4)} + \frac{(x-1)(x-5)}{(x+4)(x-5)} - \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 8 + x^2 - 4x + 5 - x^2 + 6x - 5}{(x-5)(x+4)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 1}{(x-5)(x+4)} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$$

مثال: به ازای چه مقدار  $a$  معادله  $\frac{a}{x} = \frac{x+1}{x+a}$  دارای جواب  $x=1$  است.

**مخرج کسر را اعتراف ننمود**

$$1 + \frac{1}{x^2} = \frac{4}{x} \Rightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{4x^2 - 4x^2 - 4x}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 4x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 4x^2 - 4x^2 - 4x = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

$$\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3} \Rightarrow \frac{(x-2)(x+3)}{(x-4)(x+3)} - \frac{(x+1)(x-4)}{(x+3)(x-4)} = 0$$

$$\frac{x^2 + x - 4 - x^2 - 3x + 4}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{4x - 4}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{1}$$

$$\text{جواب (ب)} \quad \frac{4f}{10+m} + 1 = \frac{4f}{10-m}$$

$$\frac{4f(10+m)}{(10+m)(10+m)} + \frac{1(10-m)(10+m)}{(10-m)(10+m)} = \frac{4f(10+m) + 1(10-m)(10+m)}{(10-m)(10+m)} = 0$$

$$\frac{4f0 - 4fm + 100 - m^2 - 4f0 - 4fm}{(10-m)(10+m)} = 0$$

$$\frac{-m^2 - 4fm + 100}{(10-m)(10+m)} = 0$$

$$-m^2 - 4fm + 100 = 0$$

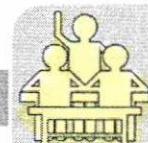
$$\Delta = (-4f)^2 - 4(-1)(100) = 16f^2$$

$$\Delta = 16f^2 > 0$$

$$m = \frac{+4f \pm \sqrt{16f^2}}{-4} = \frac{4f \pm 4f}{-4}$$

$$m = -\Delta \quad m = \Delta$$

## کار در کلاس



معادله‌های زیر را حل کنید.

$$1 + \frac{1}{x^2} = \frac{4}{x} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m} \quad (\text{پ})$$

$$\frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y} \quad (\text{ت})$$

$$\text{ث) بازای چه مقدار } a, \text{ معادله } \frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x} \text{ دارای جواب } x=2 \text{ است؟}$$

## چند مسئله کاربردی از معادلاتی عبارت‌های گویا دارند



۱) گلدانی تقره داریم که نسبت وزن تقره خالص به وزن

مس خالص آن، برابر با ۸ است. استاد قلمکار آن را

ذوب و ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کرد و گلدان جدیدی

ساخت. می‌دانیم  $\frac{4}{5}$  وزن گلدان جدید، تقره است. این

گلدان قبل از ذوب شدن چه وزنی داشته است؟

حل:  $\frac{\text{وزن تقره}}{\text{وزن مس}} = 8$ ، اگر وزن مس را برابر با  $x$

در نظر بگیریم، آنگاه وزن تقره  $8x$  و وزن گلدان

قبل از ذوب شدن برابر با  $8x+x = 9x$  است.

اکنون اگر بعد از ذوب شدن ۱۰۰ گرم مس به

آن اضافه کنیم، وزن گلدان جدید  $9x+100$  است.

$$\frac{2}{a-2} - \frac{1(x-a)}{1 \times (a-2)} = 0$$

$$\text{جواب (ث)} \quad \frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\frac{2}{a-2} + \frac{a-2-a}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2-a+2}{(a-2)} = 0 \Rightarrow 2-a = 0 \Rightarrow a = 2$$

از آنجا که  $\frac{4}{5}$  وزن گلدان جدید نقره است؛ یعنی  $\frac{4}{5} = \frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن گلدان جدید}}$ ، پس داریم:

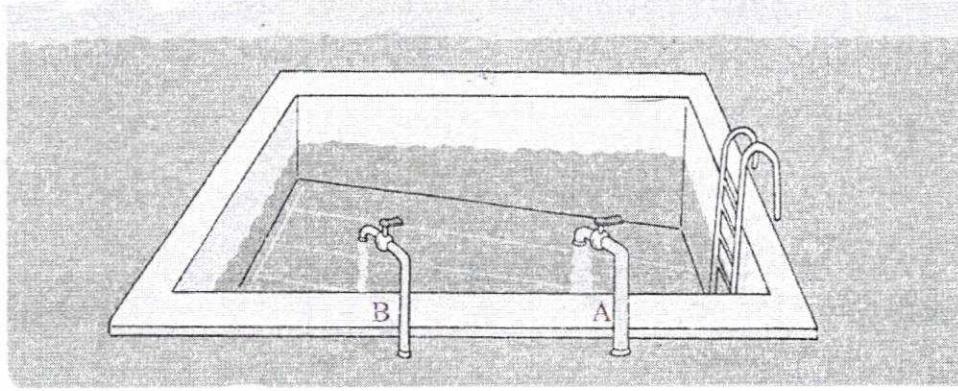
$$\frac{8x}{9x+100} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{8x}{9x+100} - \frac{4}{5} = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{8x \times 5}{(9x+100) \times 5} - \frac{4(9x+100)}{5(9x+100)} = 0 \Rightarrow \frac{40x - 36x - 400}{5(9x+100)} = 0 \quad (\text{با شرط } 9x+100 \neq 0)$$

$$4x - 400 = 0 \Rightarrow x = 100.$$

از آنجا که وزن گلدان قبل از ذوب شدن  $9x$  است، درنتیجه وزن گلدان قبل از ذوب شدن برابر با ۹۰۰ گرم است.

۲. دو شیر آب A و B به یک استخر متصل‌اند. شیر A استخر را  $10^\circ$  ساعت زودتر از شیر B پُر می‌کند. چنان‌چه دو شیر را با هم باز کنیم، آنگاه استخر در  $12$  ساعت پُر می‌شود. اگر شیر B بدنهای باز باشد، استخر در چند ساعت پُر می‌شود.



حل: فرض کنیم شیر B استخر را در  $x$  ساعت پُر کند. اگر حجم استخر را  $V$  در نظر بگیریم، پس از یک ساعت  $\frac{V}{x}$  استخر پُر می‌شود و به همین ترتیب اگر شیر A باز باشد، پس از یک ساعت  $\frac{V}{x-10}$  استخر پُر می‌شود. حال اگر دو شیر را با هم باز کنیم، خواهیم داشت:

(منفی نستیم پر  $(V \neq 0)$ )

$$\frac{V}{x} + \frac{V}{x-10} = \frac{V}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} - \frac{1}{12} = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{1 \times 12(x-10)}{x \times 12(x-10)} + \frac{1 \times 12x}{x \times 12(x-10)} - \frac{x(x-10)}{12x(x-10)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 34x - 120}{12x(x-10)} = 0 \Rightarrow -x^2 + 34x - 120 = 0$$

$$\frac{12x - 120 + 12x - x^2 + 10x}{12x(x-10)} = 0$$

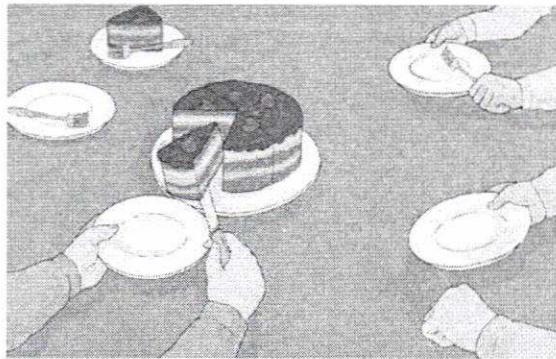
$$\begin{aligned} & -x^2 + 34x - 120 = 0 \\ & (x-30)(x-4) = 0 \\ & x = 30 \quad \text{ل} \quad x = 4 \end{aligned}$$

$$\Delta = 34^2 - (-1)(-120) = 4756$$

$$\Delta = 4756 \rightarrow \text{معادله ۲ ریشه دارد}$$

$$x = \frac{-34 \pm \sqrt{4756}}{-2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 30 \\ x = 4 \end{array} \right.$$

(معنی سر B استخر را در  $30$  ساعت سر A در  $10 = 20$  ساعت و دوسریاهم در  $12$  ساعت پُر می‌کند)



۳: یک کیک را بین چند نفر تقسیم

کردیم و به هر یک مقدار مساوی رسید. سپس یک نفر دیگر به جمع آن اضافه شد و دوباره کیک را بین آنها تقسیم کردیم. در این مرحله به هر یک به اندازه  $\frac{1}{6}$  کمتر رسید. مشخص کنید در ابتدا چند نفر بوده‌اند؟<sup>۱</sup>

حل: فرض کنید در ابتدا  $n$  نفر بوده‌اند؛ بنابراین به هر یک  $\frac{1}{n}$  کیک رسید، در مرحله بعد به هر یک  $\frac{1}{n+1}$  کیک رسید. از آنجا که در این مرحله به هر یک  $\frac{1}{6}$  کمتر رسیده است، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{4} = 0$$

$\Delta = (-1)^2 - 4(-1)(-1) = -3$

$n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$n = 2$

با حل این معادله  $n=2$  بدست می‌آید.

$n+3(n-2) = 0 \rightarrow n+3n-6 = 0 \rightarrow 4n-6 = 0 \rightarrow n = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$n = -3$

حکم:  $n=2$

شماره از زیر مرتبه تصریف

معادله‌های زیر را حل کنید.

$$① \frac{3x-5}{x+3} = 1$$

$$② \frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$$

$$③ \frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3$$

$$④ \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$⑤ \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$$

$$⑥ \frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2}$$

۷. مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متالی برای  $\frac{5}{12}$  است. آن دو عدد را پیدا کنید.

۸. هنگامی که دو چاپگر باهم کار می‌کنند، فیش حقوق کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می‌شود.

اگر چاپگر قدیمی تر به تنهایی برای این کار، ۳ ساعت زمان بیشتری نسبت به چاپگر جدیدتر نیاز داشته باشد، در این صورت هر کدام از چاپگرهای تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می‌کنند؟

جواب ۸

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{\frac{5}{12}}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{\frac{5}{12}} = 0$$

$$\frac{12x+12}{x(x+3)} - \frac{5}{5} = 0$$

$$12x+12-5x=0$$

$$7x+12=0$$

$$x=-\frac{12}{7}$$

۹. به ازای چه مقدار  $k$ ، معادله  $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-6t}$  دارای جواب  $t=-3$  است.

۱۰. این مسئله اقتباس از کتاب چیر و مقایله خوارزمی است که در آن کتاب به جای (یک)، کلمه درهم آمده است.

$$\frac{v}{\lambda} = \frac{4v+k}{\lambda v} \Rightarrow \frac{(4v+k)x^4}{\lambda^2 v^2} - \frac{v}{\lambda x^4} = 0 \Rightarrow \frac{4v+k-\lambda}{\lambda^2 v^2} = 0 \Rightarrow k-\lambda=0 \Rightarrow k=1$$

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+r} = \frac{\Delta}{12} \Rightarrow \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+r)x^{12}k} - \frac{\Delta}{12x^{12}k} = 0 \Rightarrow \frac{12k+12r+12k-\Delta k^2-12k}{12k(k+r)} = 0$$

$$-12k^2+12k+12r=0 \Rightarrow \Delta = 12^2 - 4(-12)(24) = 768 > 0$$

$$k = \frac{-12 \pm \sqrt{768}}{-24} \Rightarrow k=4 \quad \text{و} \quad k=-4$$

$$-x^2 + 5x + 12 = 0$$

$$\Delta = 25 + 48 = 73$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{2}$$

: ۵۲ میرن مخفی

$$\textcircled{1} \quad \frac{rx - \Delta}{x + r} = 1$$

$$\frac{(rx + \Delta)x(1)}{(x+r)x(1)} - \frac{1x(x+r)}{1x(x+r)} = 0 \Rightarrow \frac{rx + \Delta - x - r}{x+r} = 0 \Rightarrow \frac{rx + \Delta - rx - r}{x+r} = 0 \Rightarrow rx + \Delta - r = 0 \Rightarrow rx = r \Rightarrow x = -1$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{rx - r}{x} + \frac{rx + \Delta}{x+r} = \Delta$$

$$\frac{(rx - r)x(x+r)}{x(x+r)} + \frac{(rx + \Delta)xx}{(x+r)xx} - \frac{\Delta xx(x+r)}{1x x(x+r)} = 0 \Rightarrow \frac{rx^2 + rx - rx - r + rx + \Delta x - \Delta x^2 - \Delta x}{x(x+r)} = 0$$

$$\frac{-rx - r}{x(x+r)} = 0 \Rightarrow -rx - r = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{r}{x+r} + \frac{x}{x+r} = x+r$$

$$\frac{r+x}{x+r} = x+r \Rightarrow \frac{(x+r)x1}{(x+r)x1} - \frac{(x+r)x(x+r)}{1x(x+r)} = 0 \Rightarrow \frac{x+r - x - rx - r}{(x+r)} = 0 \Rightarrow \frac{-rx - r}{(x+r)} = 0$$

$$-rx - r = 0 \quad \therefore x^2 + rx + r^2 = 0 \Rightarrow (x+r)^2 = 0 \xrightarrow{\text{جزر}} x+r = 0 \Rightarrow x = -r$$

جواب ندارد جون مخرج سودا صفر نه

$$\frac{r+x}{x+r} = x+r \rightarrow x = -r \quad \text{جزر} \rightarrow \text{ساده جواب ندارد} \quad \text{جون مخرج سودا صفر نه}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{x^2 - rx + r}{x^2 - rx} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-r}$$

$$\frac{(x^2 - rx + r)x1}{x(x-r)x1} - \frac{(1+x)x(x-r)}{x x(x-r)} - \frac{(x-1)xx}{(x-r)xx} = 0$$

$$\frac{x^2 - rx + r - x^2 + rx - x^2 - rx + x}{x(x-r)} = 0 \rightarrow \frac{-x^2 + r}{x(x-r)} = 0 \Rightarrow -x^2 + r = 0 \Rightarrow x^2 = r \rightarrow x = \pm\sqrt{r}$$

$$\boxed{x = -\sqrt{r}} \quad \text{و} \quad x = +\sqrt{r}$$

جزر - جون مخرج سودا صفر نه

$$\textcircled{5} \quad \frac{r}{x-1} - \frac{r}{x+r} = \frac{r}{x-r}$$

$$\frac{rx(x+r)(x-r)}{(x-1)x(x+r)} - \frac{rx(x-r)(x-1)}{(x+r)x(x-1)(x+r)} = 0$$

$$\frac{rx^2 - rx - rx^2 - rx^2 + rx - r^2 - rx^2 + rx + r^2}{(x+r)(x-1)(x-r)} = 0 \Rightarrow \frac{-rx^2 - rx - r^2}{(x+r)(x-1)(x-r)} = 0$$

$$-rx^2 - rx - r^2 = 0 \quad \therefore rx^2 + rx + r^2 = 0 \quad \Delta = \Delta - r^2 (r)(1) = r^2 - r^2 = 0$$

$$\Delta = -r^2 < 0$$

معادله ریشه ندارد

$$\textcircled{4} \quad \frac{11}{x^2 - 4} + \frac{x+4}{x^2 - 4} = \frac{2x-4}{x+2}$$

$$\frac{11}{(x-2)(x+2)} - \frac{(x+4)(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{(2x-4)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = 0$$

$$\frac{11 - 4x - 8 - 4x^2 + 4x + 8x - 16}{(x-2)(x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{-4x^2 + 4x - 1}{(x-2)(x+2)} = 0$$

$$-4x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4(-4)(-1) = 16 - 16 = -8 \Rightarrow \Delta = -8 < 0 \quad \text{ليس معادلة جواب مقارب.}$$

**سوالات تكميلی رياضي و آمار دهم انساني**  
**(فصل دوم: معادله‌ي درجه‌ي دوم)**

۱- معادله‌های درجه‌ی دوم زیر را به روش خواسته شده حل کنید:

$$4x^2 - 12x + 9 = 0 \quad (\text{الف})$$

(روش تجزيه)

$$x^2 + 10x - 11 = 0 \quad (\text{ب})$$

(روش مربع كامل)

$$5x^2 - 3x + 7 = 0 \quad (\text{ج})$$

(روش کلی)

۲- اتحاد جبری پيشنهادي در ستون اول را كه مناسب برای حل معادله‌ي درجه‌ی دوم در ستون بعدی است، با يك خط به يكديگر وصل کنيد. سپس معادله‌ها را در ستون آخر حل کنيد.

ستون اول

ستون دوم

ستون سوم

عامل يابي(فاكتور گيري)

$$9x^2 - 25 = 0$$

اتحاد مربع دوجمله‌اي

$$3x^2 + 9x = 0$$

اتحاد مزدوج(روش ريشه گيري)

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

اتحاد جمله مشترک

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

۳- معادله‌ي  $(x+4)^2 = a$  ، به ازاء چه مقاديری از  $a$  :

ج) ريشه‌ي حقيقي ندارد

ب) دو ريشه‌ي حقيقي دارد

الف) ريشه‌ي مضاعف دارد

۴- معادله‌ی درجه دومی بنویسید که  $x = -3$  ریشه‌ی مضاعف آن باشد.

۵- اگر  $x^2$ ,  $x$ ,  $1$  ریشه‌های معادله‌ی  $5x^2 - 7x + 4 = 0$  باشند، بدون حل معادله، مجموع و حاصلضرب ریشه‌ها را به کمک فرمول به دست آورید.

۶- معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که:

الف) ریشه‌ی مضاعف دارد      ب) دو ریشه‌ی حقیقی دارد      ج) ریشه‌ی حقیقی ندارد

۷- به کمک اتحادها، جاهای خالی را با جمله‌ی مناسب کامل کنید:

$$(2x + \dots)^3 = 25y^3 + 4x^3 + 20xy$$

$$(xy - 3)(xy + 8) = x^3y^3 + \dots - 24$$

$$\left(5x - \frac{1}{4}\right)^3 = \dots + \dots + \frac{1}{16}$$

$$(2x + y)(\dots - \dots) = 4x^3 - \dots$$

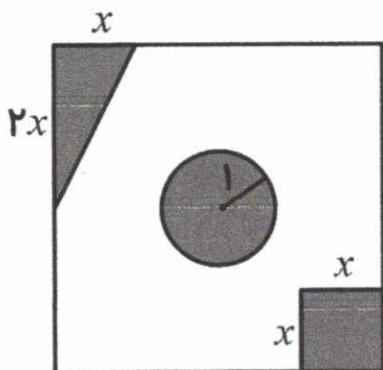
$$(3 - \dots)^3 = \dots - 12xy + \dots$$

$$(x + 4)(x - \dots) = x^3 + \dots - 12$$

۹۶×۱۰۴ (ز)

۸- در زمینی مربعی شکل به ضلع  $10m$  سه باغچه‌ی کوچک به شکل زیر ساخته شده شده است. مساحت زمین

باقیمانده  $85m^2$  است. طول  $x$  را حساب کنید. (عدد  $\pi$  را  $3$  در نظر بگیرید)



۹- محیط مربعی را به دست آورید که قطر آن  $4\sqrt{2}$  است.

۱۰- مجموع معکوس دو عدد فرد طبیعی متولای  $\frac{12}{35}$  است. آن دو عدد را پیدا کنید.

۱۱- معادله های کسری زیر را حل کنید.

$$(الف) \frac{x-3}{x+2} = \frac{x+1}{x-1}$$

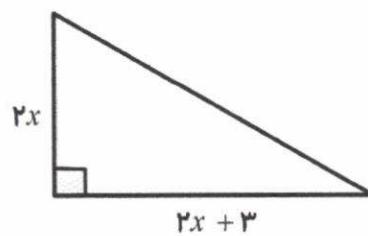
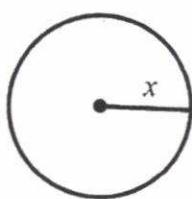
$$(ب) \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{x-2}{x+1}$$

$$(ج) \frac{x^2+4}{x} = 5$$

$$(د) 2x-1 = \frac{3x}{1-x} + 2$$

۱۲- به ازای چه مقدار  $m$  معادله  $\frac{1}{x-2} + \frac{8}{m} = \frac{3x}{x+2}$  دارای جواب  $x=1$  است؟

۱۳- مساحت دایره و مثلث با هم برابر است. قاعده و ارتفاع مثلث و شعاع دایره را حساب کنید. (عدد  $\pi$  را ۳ در نظر بگیرید)



۱۴- تعداد جواب های معادله های زیر را فقط تعیین کنید.

$$(الف) -x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(ب) 2x^2 + 4x + 7 = 0$$

$$(ج) x^2 + 1 = 0$$

$$(د) 9x^2 - 6x + 1 = 0$$

۱۵- نام اتحادهای زیر را نوشته و سمت راست آن ها را بنویسید.

$$(الف) (x-5)(x+5) = \dots$$

$$(ب) (2x+x^2)^2 = \dots$$

$$(ج) (3x-2)(3x+7) = \dots$$

$$(د) (a-7)^2 = \dots$$

۱۶- سود حاصل از فروش  $x$  پیراهن در یک تولیدی، از رابطه  $P(x) = x^2 + x - 12$  به دست می آید.

(الف) اگر این تولیدی، هیچ پیراهنی نفروشد، چقدر از دست می دهد؟

(ب) به ازاء چه تعداد فروش پیراهن، تولیدی به نقطه‌ی سربه سر خود می رسد؟

(ج) چندمین تولید پیراهن، برای این تولیدی سودآور است؟

۱۷- یک پیتزا را بین چند نفر تقسیم کرده ایم و به هر کدام مقداری مساوی رسید . سپس یک نفر به آنها اضافه شد و دوباره پیتزا را بین آنها تقسیم کردیم . در این مرحله به هر کدام  $\frac{1}{6}$  کمتر رسد . مشخص کنید در ابتدا چند نفر بوده اند ؟

۱۸- تابع درآمد و تابع هزینه هفتگی یک کارخانه به صورت زیر است :

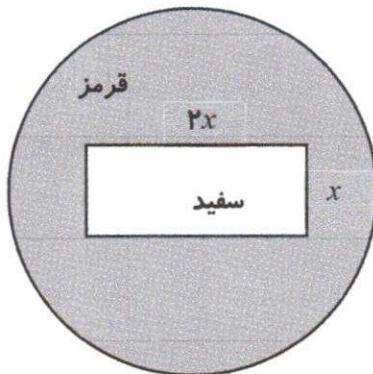
$$R(x) = 21x - x^2 \quad , \quad C(x) = 100 + x$$

(الف) معادله‌ی سود این کارخانه را بنویسید .

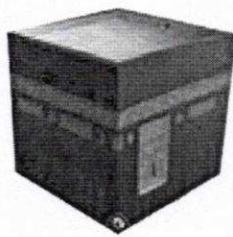
(ب) سود کارخانه پس از تولید چند کالا حاصل می‌شود ؟

۱۹- برای ساخت یک تابلو مانند شکل زیر، از برچسب‌های قرمز و سفید استفاده می‌شود . هزینه‌ی  $cm^2$  ۱ برچسب سفید ۲۰ تومان و هزینه‌ی  $cm^2$  ۱ برچسب قرمز ۰ تومان است . (مساحت دایره  $240$  سانتی متر مربع است) . مجموع هزینه‌های برچسب‌های سفید و قرمز ۳۴۴۰۰ تومان شده است .

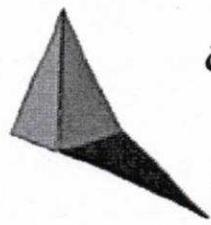
اندازه‌ی  $x$  چقدر است ؟



## فصل سوم



# تابع



مفهوم تابع

درس ۱

ضابطه جبری تابع

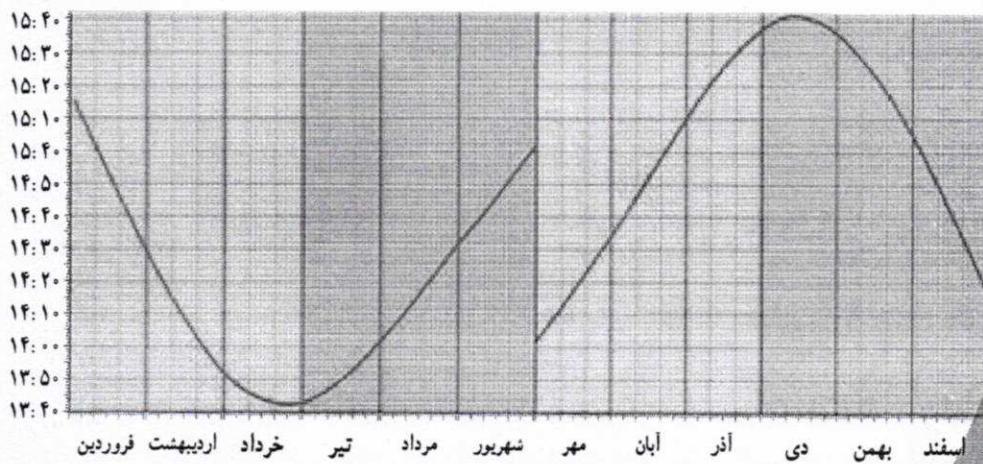
درس ۲

نمودار تابع خطی

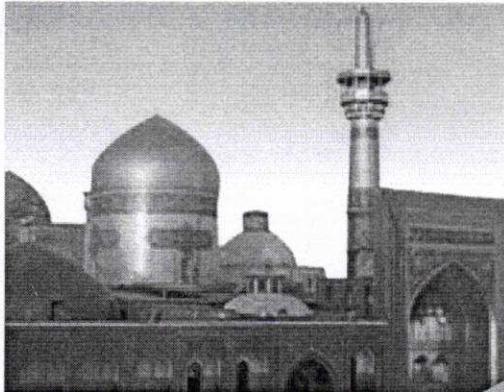
درس ۳

نمودار تابع درجه ۲

درس ۴



نمودار ساعتی که خورشید نسبت به مشهد در جهت قبله قرار می‌گیرد.



یکی از شیوه‌های جهت‌یابی قبله استفاده از سایه ها ساخت، هنگام قرار گرفتن خورشید در راستای قبله است. در هر منطقه با تعیین ساعت دقیقی که خورشید در جهت قبله قرار می‌گیرد می‌توان با دقت بسیار بالایی جهت قبله در آن منطقه را تعیین کرد.



# درس ۱

## مفهوم تابع

سال گذشته در فصل خط و معادله‌های خطی با مثال دوچرخه‌سوار، رابطه‌ای را بین زمان و مسافت طی شده تعریف کردیم.

در مثال مذکور، دوچرخه‌سوار با سرعت ثابت ۲ متر در ثانیه در حال حرکت است؛ یعنی در هر ثانیه ۲ متر را طی می‌کند. جدول زیر رابطه بین زمان (t) و مسافت طی شده (d) را نشان می‌دهد: (جدول را کامل کنید)

زمان بر حسب ثانیه (t)	۰	۱	۲	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	۵
مسافت طی شده بر حسب متر (d)	۰	۲	$\frac{4}{5}$	۵	۸	۱۰

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، در این مثال متغیر زمان (t) به صورت مستقل تغییر کرده و متغیر مسافت (d) براساس تغییرات t تغییر می‌کند و در واقع تغییرات متغیر d تابعی از تغییرات متغیر t است. این رابطه که می‌توان آن را به صورت جبری و به شکل  $d=2t$  نمایش داد، رابطه‌ای خطی نامیده شد. در حالت کلی رابطه‌هایی به صورت  $y=ax+b$ ، را رابطه‌های خطی نامیدیم.

این رابطه‌ها که نمودار آنها یک خط است، در واقع ارتباط مشخصی بین x و y نداشتند است که روی این خط قرار دارند. به عنوان مثال اگر فرض کنیم  $y=2x+1$  معادله یا ضابطه یک خط باشد، مختصات هر نقطه که در این معادله صدق کند به این معنایست که آن نقطه روی این خط واقع است و بالعکس اگر نقطه‌ای روی این خط واقع باشد، باید مختصات آن نقطه در معادله  $y=2x+1$  صدق کند. همان‌طور که مشاهده می‌کنید عرض هر نقطه روی این خط یعنی y، مساوی است با دو برابر طول همان نقطه به علاوه ۱ یعنی  $(2x+1)$ ؛ بنابراین رابطه بین x و y کاملاً معنی است در جدول‌های زیر مختصات چند نقطه و رابطه بین x و y آنها براساس ضابطه داده شده، آمده است: (جاهای خالی را پر کنید)

x	۱	۵	۲	۰	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{3}{2}$
y	۱	-۷	-۴	۲	$\frac{1}{2}$	۳	۰

$$y = -2x + 3$$

$$y = -2(3) + 3 = -6 + 3 = -3$$

$$-2x + 3 = 3 \Rightarrow -2x = 0 \quad x = \frac{0}{-2} \Rightarrow x = 0$$

$$y = -2\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = -1 + 3 = 2$$

$$y = -2(0) + 3 = 0 + 3 = 3$$

$$-2x + 3 = 0 \Rightarrow -2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{-2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$-2x + 3 = 0 \Rightarrow -2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{-2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

او که مبنای جهان، «زوج» آفرید  
خود به مازدیکتر شد از ورید  
«تابعی» را از زمین نآسمان  
کرده در دل‌های انسان‌ها، نهان  
تابع منظور ما، «پیوسته» است  
«حد»، به امیال دل‌ما بسته است  
دل به بالا تا عنایت می‌کند  
حد تابع، «بی‌نهایت» می‌کند  
هر کسی تابی‌نهایت را شناخت  
چون «مجانب» سوی آن بالا شناخت



طول قد و نمای سوب متغیرهایی هستند که وزن مطلوب، متغیری است که وابسته به این دو متغیر است.

آیا می توانید با توجه به جدول اگر فردی در گروه سنی ۴۵-۵۴ قرار داشته باشد و طول قد این فرد

۱۸۹ سانتی متر باشد، وزن مطلوب برای این شخص را تعیین کنید؟

۲۵ = ناخوب

$$25 \times (1/189) = 89,3025$$

$$\text{کیلو بی سنتی} \rightarrow \text{متر} = 189 \div 100 = 1,89$$

### فعالیت



می دانیم مساحت دایره از تساوی  $S = \pi r^2$  بدست می آید. در این رابطه  $\pi$  عددی است ثابت که تقریباً

$\pi = 3/14$  در نظر گرفته می شود و شعاع دایره است :

۱. آیا متغیر  $S$  تابعی از شعاع دایره است؟ بله

$$S = 2\pi r$$

۲. آیا محیط دایره نیز تابعی از شعاع است؟ بله

۳. کدام متغیر، مستقل و کدام متغیر، وابسته است؟  $\text{شعاع} \rightarrow \text{مساحت}$   $\text{محیط} \rightarrow \text{مساحت}$

۴. جدول زیر را کامل کنید.

$r$ بر حسب سانتی متر (شعاع)	۱	۱/۵	۲	۳	۴
$S$ بر حسب سانتی متر مربع (مساحت)	$\pi$	$\frac{\pi}{25}$	$4\pi$	$9\pi$	$16\pi$
$P$ بر حسب سانتی متر (محیط)	$2\pi$	$\frac{2\pi}{5}$	$8\pi$	$12\pi$	$16\pi$

در رابطه خطی  $y = 3x + 1$ ، تابعی از تغییرات متغیر مستقل  $x$  است، یعنی وقتی  $x$  را به دلخواه و مستقل، تغییر می دهیم،  $y$  نیز تغییر می کند. حال اگر  $x$  ها را روی محور افقی و  $y$  های حاصل را روی محور عمودی در نظر بگیریم (به ازای هر  $x$  و  $y$  حاصل، یک نقطه در صفحه مشخص می شود که آن را با یک زوج به شکل  $(y, x)$  نمایش می دهیم). ترتیب قرار گرفتن  $x$  و  $y$  در این زوج اهمیت دارد و به همین دلیل آن را یک زوج مرتب می نامیم در زوج مرتب  $(y, x)$ ،  $x$  را مؤلفه یا مختص اول و  $y$  را مؤلفه دوم می نامیم.

$$(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c \text{ و } b = d \text{ و بر عکس اگر } a = d \text{ و } b = c \text{ آنگاه } (a, b) = (c, d).$$

### فعالیت



۱. جدول زیر را کامل کنید.

$x$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	
$y$	-2	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$3\sqrt{2} + 1$	$7$	
$(x, y)$	$(-1, -2)$	$(0, 1)$	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	$(1, \frac{5}{2})$	$(\sqrt{2}, 3\sqrt{2} + 1)$	$(2, 7)$	

$$y = 3x + 1$$

$$3x + 1 = 1 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{3} \Rightarrow x = 0$$

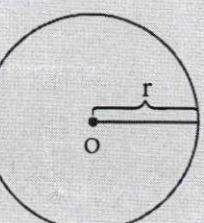
$$3\sqrt{2} + 1$$

$$3x + 1 = 3\sqrt{2} + 1 \Rightarrow 3x = 3\sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$y = 3(1) + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$y = 3(2) + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$\frac{2\pi r}{2r} = \pi$$



ریاضی دان و منجم ایرانی،  
جمشید غیاث الدین کاشانی

در اوائل قرن هشتاد و چهارم  
توانست عدد  $\pi$  را با دقتی

که تا ۱۵۰ سال بعد از وی  
بی نظیر ماند، محاسبه کند.

او کتاب رساله محیطیه  
خود را با این جمله شروع

می کند: «بدنام او که از اندازه نسبت  
محیط دایره به قطرش

آگاه است».

$$y = (2)^x + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$y = (0)^x + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$y = (-1)^x + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$x^x + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{4} - 1 \quad x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

x	1	2	$\frac{5}{4}$	-1
y	2	5	$\frac{5}{4}$	1

$$y = x^x + 1$$

در محیط اطراف خودمان و در جهان طبیعت نیز پدیده‌های می‌توان یافت که در آنها ارتباط خاصی بین دو متغیر وجود دارد.

به عنوان مثالی از این رابطه‌ها می‌توان به رابطه بین قد و وزن افراد اشاره کرد. یکی از روش‌های متداول برای اندازه‌گیری وزن مطلوب در افراد، استفاده از نمایه‌توده بدنی یا ناتوب (BMI) است که طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{وزن بر حسب کیلوگرم} = \frac{\text{نماتوب}}{\text{مجدور طول قدر حسب متر}}$$

با استفاده از این رابطه، برای هر فرد نماتوب محاسبه می‌شود که بر اساس این شاخص و به صورت زیر نسبت به عدد حاصل نتیجه‌گیری می‌شود.

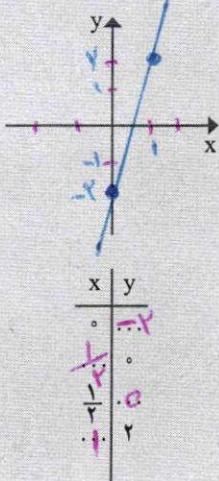
شخص لاغر است و کمبود وزن دارد  $\Rightarrow 19 < \text{نماتوب} \leq \text{الف}$

شخص وزن طبیعی دارد و در محدوده سلامت وزنی است  $\Rightarrow 25 \leq \text{نماتوب} \leq 25$  (ب)

شخص اضافه وزن دارد  $\Rightarrow 30 > \text{نماتوب} \geq 25$  (پ)

شخص چاق است و وضعیت بحرانی دارد  $\Rightarrow 30 \geq \text{نماتوب} \geq \text{ت}$

نمودار خط  $y = 4x - 2$   
روی محورهای زیر رسم  
کرده و جدول داده شده را  
کامل کنید:



$$y = 4(0) - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$y = 4\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$4x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$4x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{4} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$4x - 2 = 2 \Rightarrow 4x = 2 + 2 \Rightarrow$$

$$4x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{4} \Rightarrow x = 1$$

البته وزن مطلوب با سن هر شخص رابطه مستقیم دارد، زیرا با افزایش سن به طور طبیعی میزان چربی ذخیره‌ای بدن بالا رفته و نماتوب افزایش می‌یابد. متخصصان علوم تغذیه با توجه به سن افراد مطابق جدول رو به رو نماتوب مناسب افراد مختلف را تعیین می‌کنند.

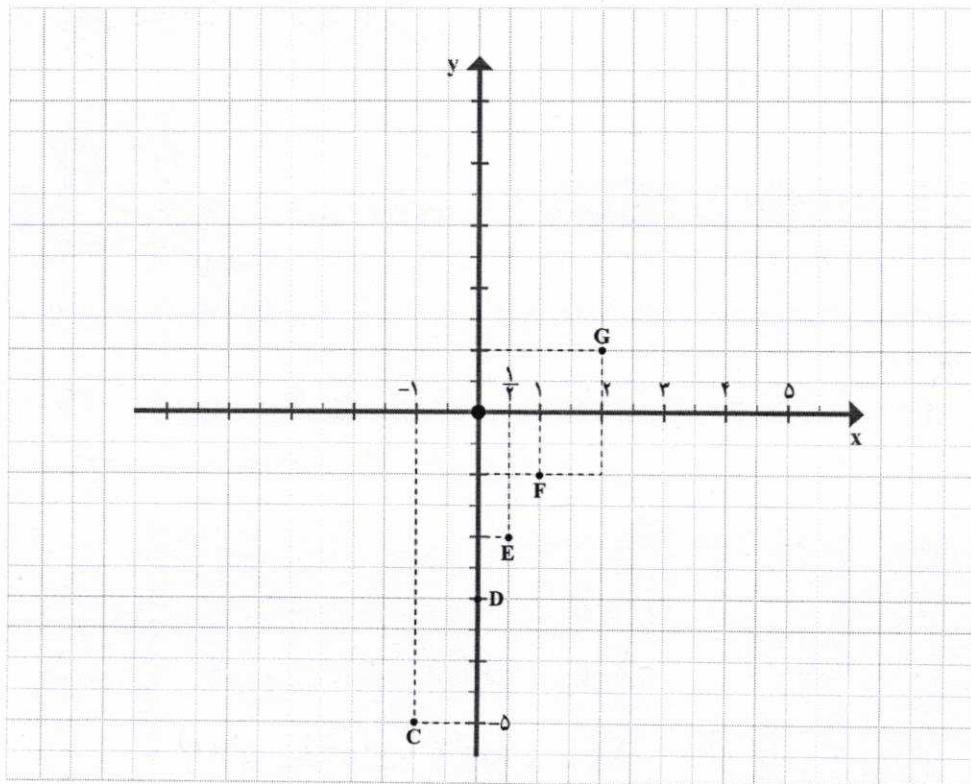
گروه سنی	نماتوب
۱۹-۲۴	۲۲
۲۵-۳۴	۲۳
۳۵-۴۴	۲۴
۴۵-۵۴	۲۵
۵۵-۶۴	۲۶
۶۵ به بالا	۲۷

پس از یافتن نماتوب متناسب با گروه سنی، هر فرد می‌تواند وزن مطلوب خود را از فرمول زیر بدست آورد:

$$\text{نماتوب} = \frac{\text{وزن مطلوب بر حسب کیلوگرم}}{\text{مربع قدر حسب متر}} \times \text{نماتوب}$$

با دقت در رابطه یا تساوی فوق تشخیص می‌دهید که وزن مطلوب، تابعی از طول قد هر فرد است (بستگی به طول قد دارد) و نیز در می‌یابید که وزن مطلوب به نماتوب نیز بستگی دارد. در فرمول فوق

اگر هر یک از «زوج مرتب»‌های جدول قبل را یک نقطه در صفحه فرض کنیم، نمودار مختصاتی رابطه خطی قبل به صورت زیر رسم می‌شود:



سؤال: برای رابطه  $y = x^2$  که  $x \in A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  مشابه مثال قبل، جدول، نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی را تشکیل دهید.

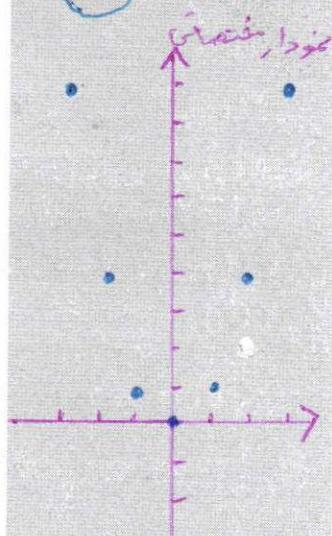
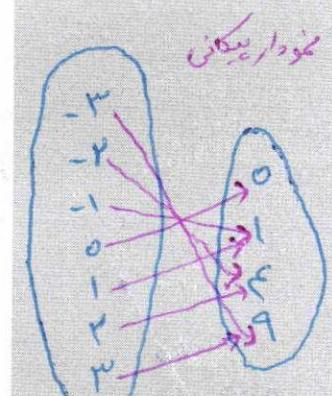
### مفهوم تابع

در تمام فعالیت‌ها، مثال‌ها و تمرین‌های قبل، رابطه‌ها طوری تعریف شده بودند که به ازای هر متغیر مستقل  $x$ ، دقیقاً یک مقدار برای  $y$  به دست می‌آید؛ مثلاً در رابطه  $y = 2x + 3$  اگر  $x$  را مساوی ۲ فرض کنیم،  $y = 2 \times 2 + 3 = 7$  به دست می‌آید.

اگر این ویژگی برای یک رابطه وجود داشته باشد، آن را تابع می‌نامند. به عبارت دقیق‌تر:

یک رابطه بین دو مجموعه  $A$  و  $B$  (از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$ ) یک تابع نامیده می‌شود؛ هرگاه متناظر با هر عضو از مجموعه  $A$  دقیقاً یک عضو از مجموعه  $B$  را بتوان نظیر یا مربوط کرد.

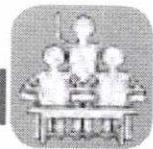
$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y &= (-3)^2 = 9 \\ y &= (-2)^2 = 4 \\ y &= (-1)^2 = 1 \\ y &= (0)^2 = 0 \\ y &= (1)^2 = 1 \\ y &= (2)^2 = 4 \\ y &= (3)^2 = 9 \end{aligned}$$




۲. مشابه قسمت ۱ جدولی برای  $y = x^3$  تشکیل دهید.

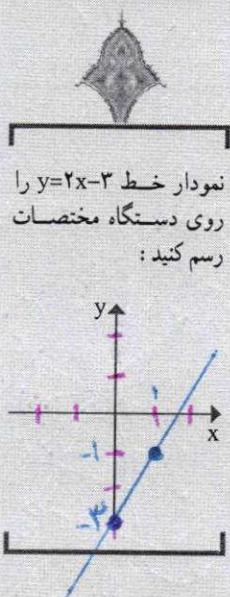
استفاده از نمودار و رسم پیکان‌هایی از طرف متغیر مستقل به سمت متغیر وابسته به درک ارتباط بین این دو متغیر کمک می‌کند. به کار در کلاس زیر توجه کنید:

## کار در کلاس



با توجه به رابطه خطی  $y = 2x - 3$ , اگر فرض کنیم،  $x$ ‌ها یا متغیرهای مستقل اعضای مجموعه

$A = \left\{ -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2 \right\}$  باشند. ابتدا جدول مربوط به این رابطه را مشابه جدول قبل، تشکیل می‌دهیم و سپس نمودار پیکانی آن را رسم می‌کنیم. (جاهای خالی را پر کنید).



نمودار خط  $y = 2x - 3$   
روی دستگاه مختصات

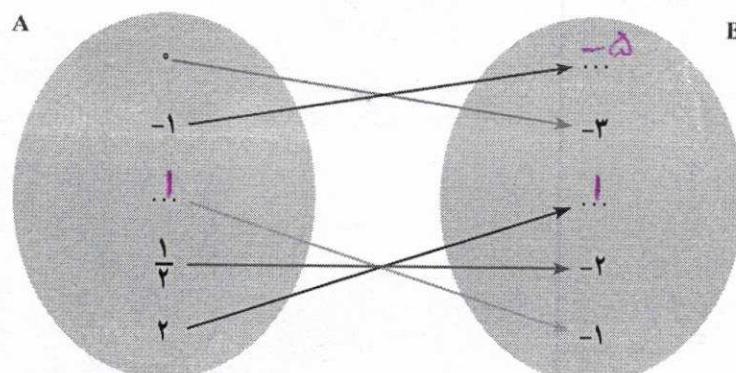
رسم کنید:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-5	-3	-2	-1	1
(x,y)	(-1, -5)	(0, -3)	$(\frac{1}{2}, -2)$	(1, -1)	$(2, 1)$

$y = 2x - 3$

$$y = 2(0) - 3 = 0 - 3 = -3 \\ (0, -3)$$

$$y = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -1 \\ (1, -1)$$



سوال خوب

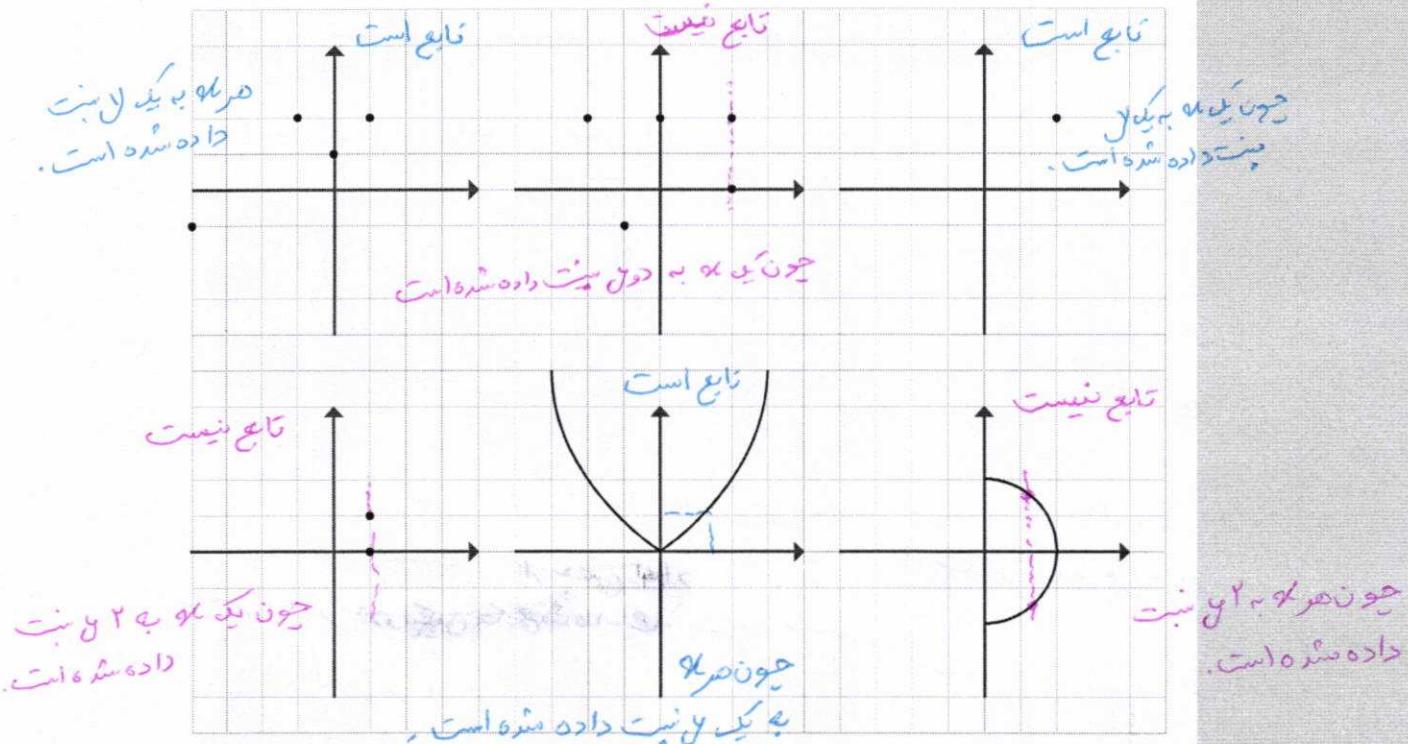
$$\text{Q: } y = 2(0) - 3 = 0 - 3 = -3$$

$$\text{E: } y = 2(\frac{1}{2}) - 3 = 1 - 3 = -2$$

$$\text{F: } y = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$\text{G: } y = 2(2) - 3 = 4 - 3 = 1$$

۳. کدام یک از رابطه‌ها که نمودار مختصاتی آنها رسم شده است، تابع است؟ چرا؟



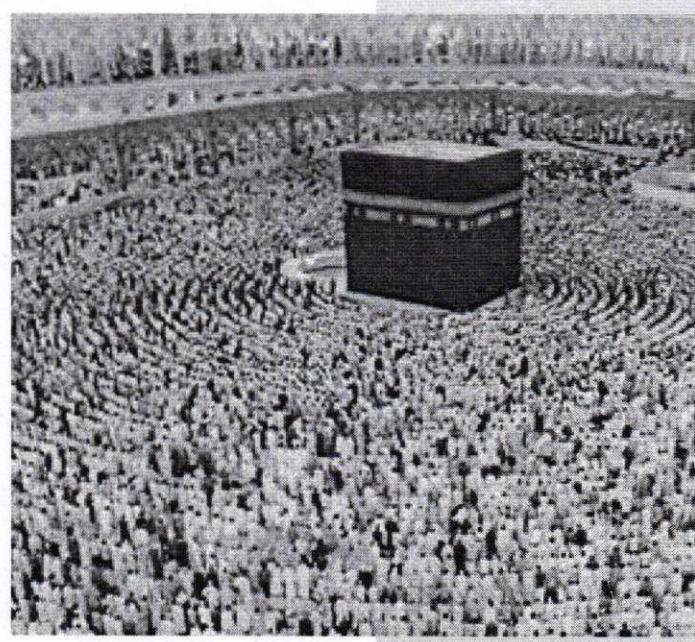
۴. کدام یک از رابطه‌های تعریف شده زیر، تابع است و کدام تابع نیست؟ دلایل خود را بنویسید.

الف) رابطه‌ای که به هر شهر در ایران، سوگاتی آن شهر را نسبت می‌دهد.  
یک سکه ریختن است جزو سوگاتی داشته باشند  
تابع نیست  تابع است

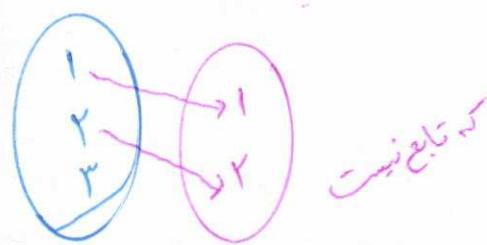
ب) رابطه‌ای که به هر فرد، روز تولد او را نسبت می‌دهد.  
هر فرد یک روز تولد دارد  
تابع است  تابع نیست

پ) رابطه‌ای که به هر شهر، نماینده آن شهر در مجلس شورای اسلامی را نسبت می‌دهد.  
جواب مکمل است یک سکه  
تابع نیست  تابع است

ت) رابطه‌ای که به هر مسلمان، قبله او را نسبت می‌دهد.  
زیرا هر مسلمان یک قبله دارد  
تابع است  تابع نیست



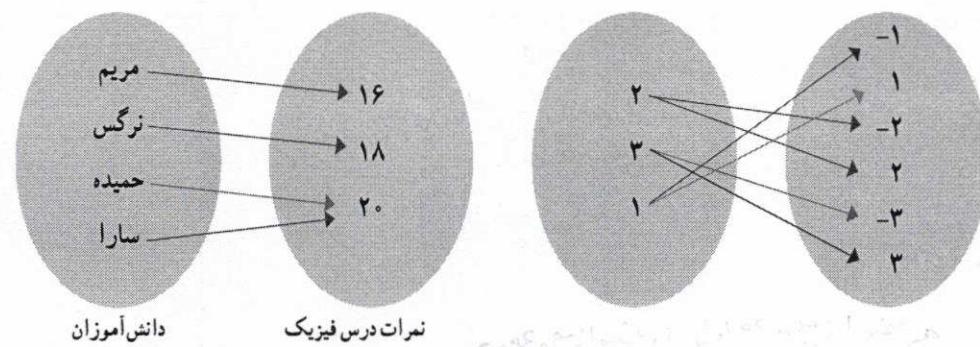
در مقادیر زیر بحث است که مثال به این صورت میزگردیده است



## فعالیت

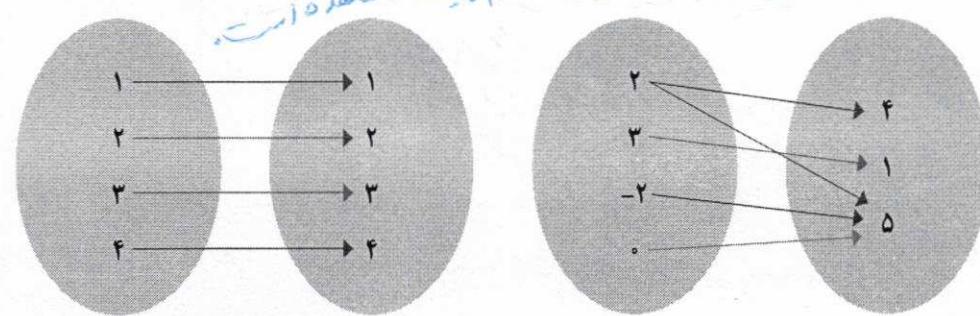


۱. کدام یک از رابطه‌ها که با نمودار یکانی نمایش داده شده‌اند، تابع‌اند؟ چرا؟



تابع است زیرا هر فرد یک نمره دارد.

تابع نیست زیرا



تابع است زیرا

تابع نیست زیرا

۲. کدام مجموعه از زوج مرتب‌ها، نمایش یک تابع است؟

تابع است.  $F = \{(2,3), (3,3), (4,3), (5,3)\}$  (الف)

تابع نیست.  $G = \{(4,1), (2,-1), (1,-1), (4,2)\}$  (ب)

تابع است.  $H = \{(2,3)\}$  (پ)

تابع است.  $I = \{(3,3)\}$  (ت)

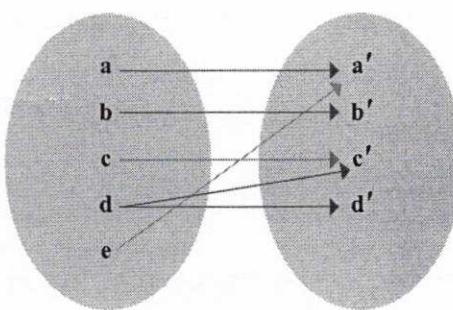
تابع نیست.  $J = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,4)\}$  (ث)

## تمرین



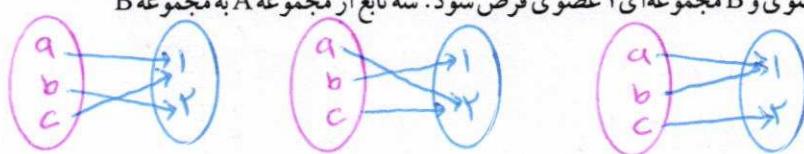
۱. نمودار پیکانی یک رابطه رسم شده است. با حذف کدام عضو این رابطه تابع خواهد شد؟

نکته: اگر حذف شود  
همیشه همچنانه عضوی را می‌خواهد بود  
و باز هم نمودار تابع خواهد بود



باید a را حذف شود  
که نمودار پیکان  
نمودار تابع شود

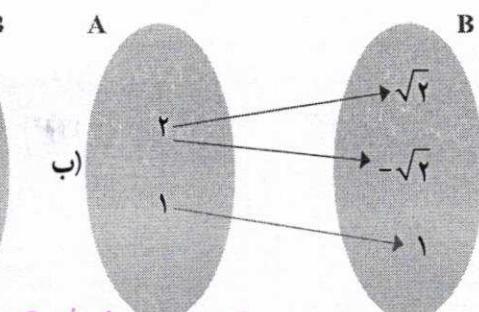
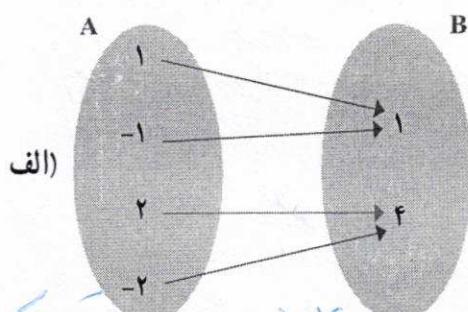
۲. اگر A مجموعه‌ای ۳ عضوی و B مجموعه‌ای ۲ عضوی فرض شود. سه تابع از مجموعه A به مجموعه B را تعریف کنید.



۳. در رابطه زیر جاهای خالی را اعدادی قرار دهید که این رابطه تابع نباشد.

$$f = \{(2, 3), (\dots, 5), (3, \dots), (\dots, \dots)\}$$

۴. کدام رابطه تابع است و کدام رابطه تابع نیست؟ چرا؟



تابع است از هر عضوی پیکان خارج شود است

$$f = \{(2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 4), (5, 1)\}$$

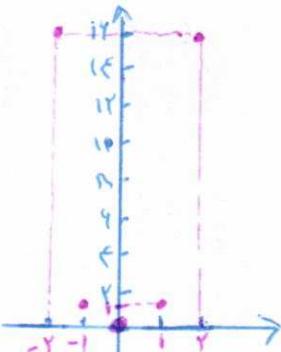
تابع نیست زیرا

دو زوج مرتب متمایز دارد مولقه  
اول برابر هستند.

ت) رابطه‌ای که به هر شخص، شماره ملی او را نسبت می‌دهد.

تابع است زیرا هر شخص یک شماره ملی

تفصیل داده من سود



با توجه به فعالیت قبل و تعریف تابع می‌توان گفت:

\* اگر رابطه بین  $x$  و  $y$  را ( $x$  متغیر مستقل) به صورت جدولی و زوج مرتب نمایش دهیم، در صورتی تابع

است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه‌های اول برابر در آن وجود نداشته باشد.

\* اگر رابطه از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$  را با نمودار پیکانی نمایش دهیم، در صورتی این رابطه تابع است که از هر عضو  $A$  دقیقاً یک پیکان خارج شود.

\* اگر نمودار مختصاتی یک رابطه رسم شود، در صورتی این رابطه تابع است که هیچ دو نقطه‌ای روی خطی که موازی محور  $y$  باشد، قرار نگیرند.



## کار در کلاس

در جدول زیر در هر سطر یکی از نمایش‌های رابطه‌ای مشخص شده است. ابتدا برای هر رابطه جاهای خالی را پر کنید سپس تشخیص دهید که کدام رابطه، تابع است.

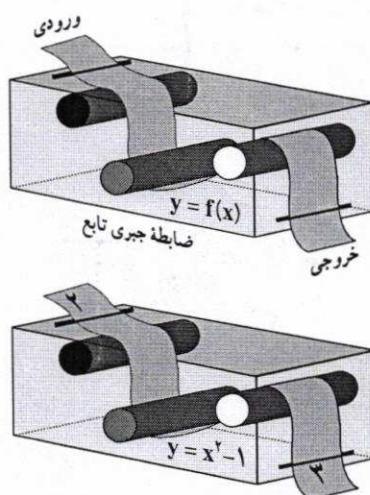
نمایش پیکانی	نمایش مختصاتی	نمایش زوج مرتبی	توصیفی	جدولی
$A \xrightarrow{f} B$ <pre>     A   B     1   1     2   2     3   5     4   6   </pre>	$\{(1,1), (2,2), (3,5), (4,6)\}$	$f = \{(2,3), (2,4), (4,5), (4,6)\}$	f رابطه‌ای است که هر عضو $A$ و احتمالاً بیشتر از یک را بسته به دهد.	$\begin{array}{ c c } \hline x & y \\ \hline 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ \hline \end{array}$
$A \xrightarrow{f} B$ <pre>     A   B     1   1     2   4     3   9     4   14   </pre>		$f = \{(1,1), (2,4), (3,9), (4,14)\}$	f رابطه‌ای است که هر عضو $A$ دوام آن را بسته به دهد	$\begin{array}{ c c } \hline x & y \\ \hline 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \\ 4 & 16 \\ \hline \end{array}$
$A \xrightarrow{f} B$ <pre>     A   B     1   1     2   2     3   14     4   10     5   21   </pre>		$f = \{(-2,14), (1,-1), (2,14), (1,1), (1,2)\}$	f رابطه‌ای است که هر عضو $A = \{0, 1, -1, 2, -2\}$ توان چهارم آن را بسته به دهد	$\begin{array}{ c c } \hline x & y \\ \hline -2 & 14 \\ 1 & 1 \\ 2 & 14 \\ -1 & 1 \\ \hline \end{array}$
*			f رابطه‌ای است که هر عضو $A$ صور علاقمه را بسته به دهد	
*			f رابطه‌ای است که هر عضو $A$ صادر صور علاقمه را بسته به دهد	
$A \xrightarrow{f} B$ <pre>     A   B     رضا   فوتال     امیر   علی     حمید   سهنا     مسیم   والیال     کسی   تیراندازی   </pre>	$\text{وزن}$	$f = \{(40, 20), (35, 25), (30, 30), (25, 35), (20, 40)\}$	f زدن آن را بسته به دهد	$\begin{array}{ c c } \hline x & y \\ \hline 20 & 40 \\ 25 & 35 \\ 30 & 30 \\ 35 & 25 \\ 40 & 20 \\ \hline \end{array}$
$A \xrightarrow{f} B$ <pre>     A   B     رضا   فوتال     علی   سهنا     سهنا   والیال     والیال   تیراندازی     تیراندازی   کسی     کسی   رضا   </pre>	$\text{ازداد}$			$\begin{array}{ c c } \hline x & y \\ \hline 20 & 40 \\ 25 & 35 \\ 30 & 30 \\ 35 & 25 \\ 40 & 20 \\ \hline \end{array}$

نمایش	فوتال	علی	والیال	سهنا	تیراندازی
	رضا	علی	والیال	سهنا	تیراندازی

# درس ۲

## ضابطه جبری تابع

گاهی اوقات می‌توانیم رابطه بین مؤلفه اول و دوم زوج مرتب‌های مرسوط به یک تابع را با



یک ضابطه (قانون) بیان کنیم. به طور مثال تابع  $f = \left\{ \begin{array}{l} (1, 4), (2, 5), (-1, 2) \\ \frac{1}{2}, \frac{7}{2} \end{array} \right\}$  را در نظر می‌گیریم در این تابع همواره با اضافه کردن ۳ واحد به مؤلفه اول مؤلفه دوم، بدست می‌آید. به عبارت دیگر اگر  $(x, y) \in f$ ، در این صورت  $y = x + 3$ . معادله  $y = x + 3$  را ضابطه تابع  $f$  می‌نامیم. اگر تابع  $f$  را به عنوان یک ماشین در نظر بگیریم و  $x$  متغیر مستقل فرض شود، در این صورت تأثیر تابع  $f$  روی  $x$  را با  $y = f(x)$  نمایش می‌دهیم و حاصل این تأثیر همان  $y$  (متغیر وابسته) است؛ یعنی،  $y = f(x)$

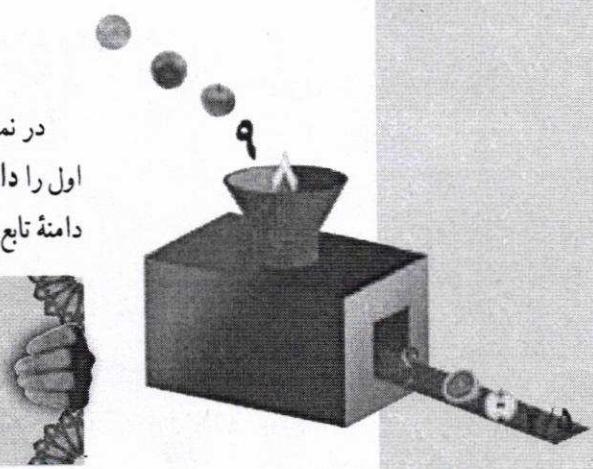
متغیر مستقل

دامنه و بُرد تابع

در نمایش توسط زوج مرتب برای یک تابع، مجموعه شامل همه مؤلفه‌های اول را دامنه تابع و مجموعه شامل همه مؤلفه‌های دوم را بُرد تابع می‌نامیم. دامنه تابع  $f$  را با  $D_f$  و بُرد آن را با  $R_f$  نشان می‌دهیم.



یک تابع مانند  $f$  از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$ ، قانون با ضابطه‌ای است که به هر عضو از  $A$  دقیقاً یک عضو از مجموعه  $B$  را نسبت دهد.



۱. Domain
۲. Range

۱۴) ا

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{4}{2}=2 \Rightarrow y=1$$

$$x^2+y^2=(2)^2+(1)^2=4+1=5$$

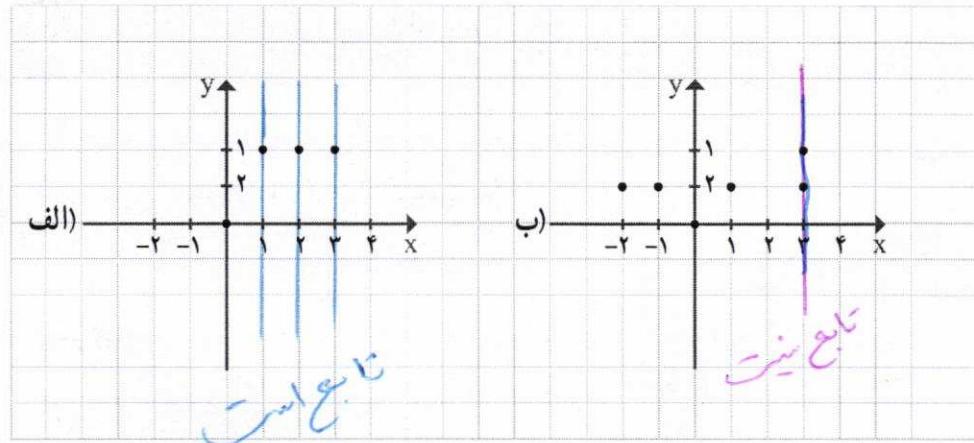
۵. اگر رابطه  $f$  تابع باشد، در این صورت حاصل  $x^2+y^2$  را به دست آورید. (مجموعه  $f$  را پس از محاسبه  $x$  و  $y$  بنویسید).

$$f = \{(2, x+y), (2, 4), (2, 2), (2, 1), (2, x-y)\}$$

$$(2, x+y) = (2, 4) \Rightarrow x+y=4$$

$$x-y=2$$

۶. نمودار کدام رابطه یک تابع را مشخص می‌کند؟



## خواندنی

توابع در شاخه‌های مختلف علوم کاربرد فراوان دارند. برای مثال در علم اقتصاد از تابع سود، تابع هزینه و تابع درآمد در محاسبات و تصمیم‌گیری‌های اقتصادی استفاده می‌شود و یا در فیزیک، هنگامی که می‌خواهیم رابطه بین چند متغیر را بیان کنیم، مخصوصاً

هنگامی که مقدار یک متغیر کاملاً وابسته به متغیرهای دیگر است، از توابع استفاده می‌شود.

توابع در علوم مختلف بیشتر به عنوان عملکرد در نظر گرفته می‌شوند و کاری را بروزی ورودی‌های خود انجام می‌دهند. توابع را همچنین مورد استفاده در علم رایانه برای مدل‌سازی ساختمان داده‌ها و تأثیرات الگوریتم می‌بینیم.

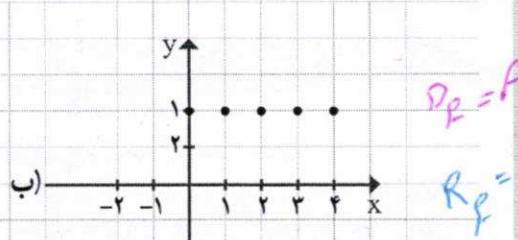
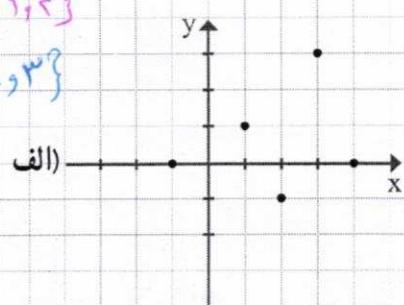
## کار در کلاس



۱. برای هریک از توابع زیر، دامنه و برد را مشخص کنید و در صورت امکان ضابطه هر تابع را بنویسید.

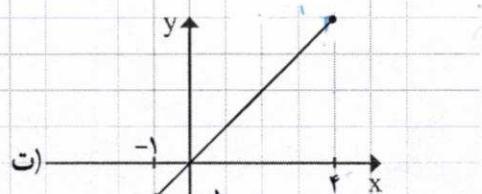
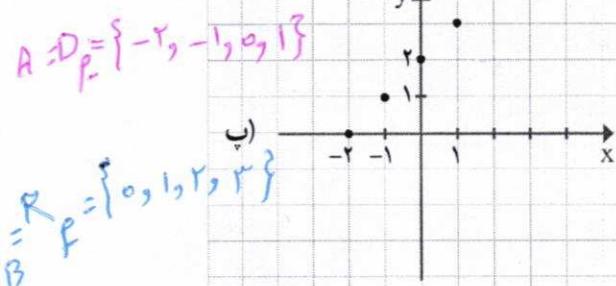
$$D_f = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$$

$$R_f = \{0, 1, 2, 3\}$$

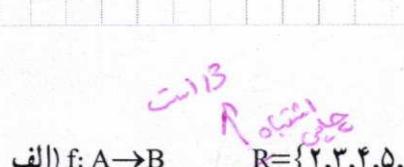


$$D_f = A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$R_f = B = \{1\}$$



$$B = R_f = \{x \in R \mid -1 \leq x \leq 4\}$$



جواب  
دامنه و برد هریک از توابع های زیر را مشخص کنید.

$$A = D_f = \{x \in R \mid -1 \leq x \leq 4\}$$

۲. دامنه و برد هریک از توابع های زیر را مشخص کنید.

(الف)  $f: A \rightarrow B$        $R = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$

$$f(x) = x + 4 \quad A = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$$

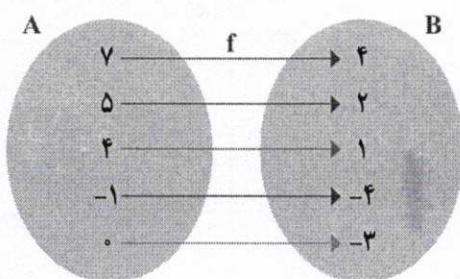
شناختی - است

$$(ب) f = \{(1, -1), (2, -2), (3, -3), (4, -4), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, \sqrt{2}\}$$

$$= \{-1, -2, -3, -4, -\sqrt{2}\}$$

(پ)



$$= \{4, 2, 1, -4, -3\}$$

$$= \{4, 2, 1, -4, -3\}$$

برای نمایش تابعی چون  $f$  از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$  می‌نویسیم:  $y = f(x)$  که  $f: A \rightarrow B$  را ضابطه تابع و  $A$  را دامنه تابع  $f$  در نظر می‌گیریم.

## فعالیت

با توجه به ضابطه هر تابع و مانند نمونه، مجموعه مقادیر یا بُرد هر تابع را مشخص کنید.

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, A = \{-1, \sqrt{2}, 2, 1, 0, \frac{1}{2}\}$$

$x$	$f(x) = 2x^2 + 1$	$R_f = \{3, 5, 9, 1, \frac{3}{4}\}$
-1	$f(-1) = 2 \times (-1)^2 + 1 = 3$	
$\sqrt{2}$	$f(\sqrt{2}) = 2 \times (\sqrt{2})^2 + 1 = 5$	
2	$f(2) = 2 \times (2)^2 + 1 = 9$	
1	$f(1) = 2 \times (1)^2 + 1 = 3$	
0	$f(0) = 2 \times (0)^2 + 1 = 1$	
$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{3}{4}$	

$$\text{ا) } f(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 1 = -1 - 1 = 0$$

$$f(f) = (f)^2 - 1 = 4f - 1 = 4^2 - 1 = 15$$

$$f(\sqrt{r}) = (\sqrt{r})^2 - 1 = r - 1 = r$$

$$f\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{r}\right)^2 - 1 = \frac{1}{r^2} - 1 = \frac{r^2 - 1}{r^2}$$

$$f(r) = (r)^2 - 1 = r - 1 = r$$

$$\therefore f(0) = \sqrt{0+1} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$f(-1) = \sqrt{(-1)+1} - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$f(r) = \sqrt{r+1} - 1 = r^2 - 1 = r$$

$$f(r) = \sqrt{r+1} - 1 = \sqrt{r} - 1$$

$$\text{الف) } f: A \rightarrow B, A = \{1, -1, 0, 4, \sqrt{3}, \frac{1}{3}, 2\}, B = \{0, -1, 2, 1, \sqrt{3}-1\}$$

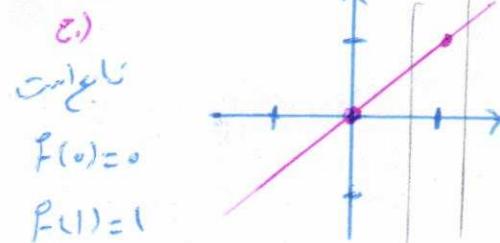
$$\text{ب) } f: A \rightarrow B, A = \{0, -1, 1, 3, 2\}, B = \{0, -1, 2, 1, \sqrt{3}-1\}$$

$$\text{ب) } f: A \rightarrow B, A = \{-2, 0, 1, \sqrt{2}, \frac{1}{2}\}, B = \{\frac{1}{r}, 0, -\frac{1}{r}, -1, \frac{\sqrt{r}+1}{\sqrt{r}-1}, -1\}$$

85

$$\therefore f(-r) = \frac{-r+1}{-r-r} = \frac{-1}{-r} = \frac{1}{r} \quad \therefore f(0) = \frac{0+1}{0-r} = -\frac{1}{r}$$

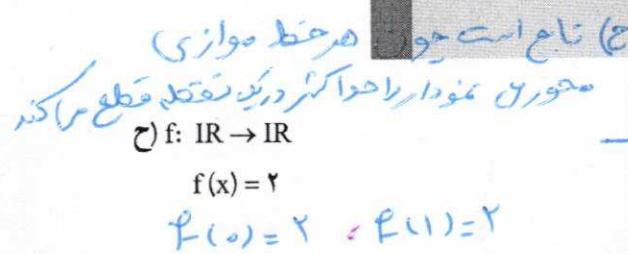
$$\therefore f(\sqrt{r}) = \frac{\sqrt{r}+1}{\sqrt{r}-r} \quad \therefore f\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\frac{1}{r}+1}{\frac{1}{r}-r} = \frac{\frac{1+r}{r}}{\frac{1-r^2}{r}} = \frac{1+r}{1-r^2} = -\frac{1}{r}$$



چون هر خط موازی محور زیر را نمودار دارد که در این خط مقطع صراحتاً نباشد.

(ج)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x$



. بُعد هر یک از توابع زیر را با توجه به ضابطه و دامنه داده شده، به دست آورید.

الف)  $f: A \rightarrow B$   
 $f(x) = x^2 + x + 1$  ،  $A = \{0, -1, 1, 2, -2\}$   
 $B = \{1, 3, 5\}$

ب)  $f: A \rightarrow B$   
 $f(x) = \frac{x+1}{x}$  ،  $A = \left\{\frac{1}{2}, 1, -1, 2, -2\right\}$

$B = \{3, 2, 0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}$

ب)  $f: A \rightarrow B$   
 $f(x) = \sqrt{x+1}$  ،  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$

$B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, 3\}$

ت)  $f: A \rightarrow B$   
 $f(x) = x$  ،  $A = W = \{0, 1, 2, \dots\}$   
 $B = W = \{0, 1, 2, \dots\}$

$$\begin{aligned}f(-) &= (-)^2 + (-) + 1 = 1 \\f(-1) &= (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1 \\f(1) &= (1)^2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3 \\f(2) &= (2)^2 + 2 + 1 = 4 + 2 + 1 = 7 \\f(-2) &= (-2)^2 + (-2) + 1 = 4 - 2 + 1 = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(0) &= \sqrt{0+1} = 1 \\f(1) &= \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\f(2) &= \sqrt{2+1} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(3) &= \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2 \\f(4) &= \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \\f(8) &= \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(0) &= 0 \\f(1) &= 1 \\f(2) &= 2\end{aligned}$$

ث)  $f: A \rightarrow B$   
 $f(x) = 0$  ،  $A = \mathbb{R}$

$B = \{0\}$

$$\begin{aligned}f(0) &= 0 \\f(1) &= 0 \\f(-1) &= 0\end{aligned}$$

۳. تابع  $f$  به هر عدد حقیقی، دو برابر مکعب همان عدد، منهای ۴ را نسبت می دهد.  $f$  کدام تابع است؟ حاصل  $f(3)$  را باید.

الف)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f(x) = 2(x - 4)^3$

(ب)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f(x) = \sqrt[3]{x-4}$

پ)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f(x) = 2x^3 - 4$

ت)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f(x) = \sqrt[3]{x-4}$

$f(3) = 2(3)^3 - 4 = 2(27) - 4 = 54 - 4 = 50$

$f(n) = \sqrt[3]{n-4}$

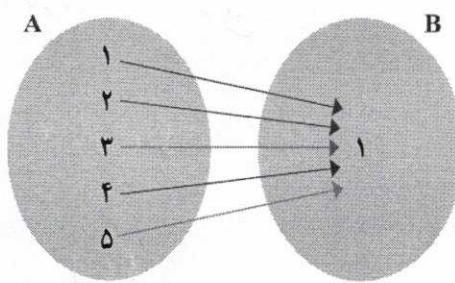
۱) فتن  $f(\frac{1}{4}) = \frac{\frac{1}{4}+1}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = 5 = 3$   $f(1) = \frac{1+1}{1} = 2$   $f(-1) = \frac{-1+1}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$

$f(2) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$   $f(-2) = \frac{-2+1}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$= \{1\}$$

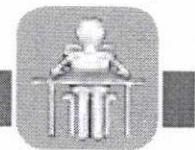
ت)



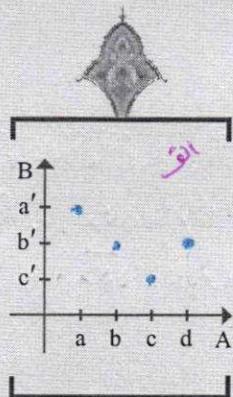
$$\text{ث) } f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0, 0)\}$$

$$\begin{aligned} & \{0, 1, 2, 3, \frac{1}{4}, \sqrt{2}\} \\ & \{1, 2, 3, 1, \sqrt{2}, 0\} \\ & \{\sqrt{2}, 1, \frac{1}{4}, 0, 2, 3\} \end{aligned}$$

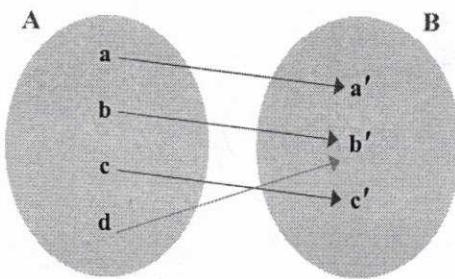
تمرین



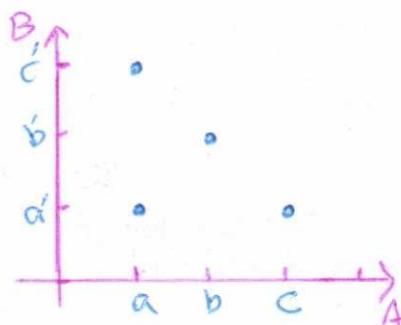
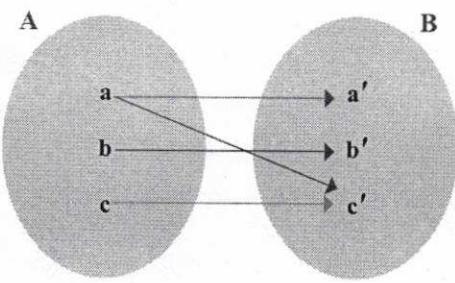
۱. کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟ برای هر رابطه نمودار مختصاتی را رسم کنید.



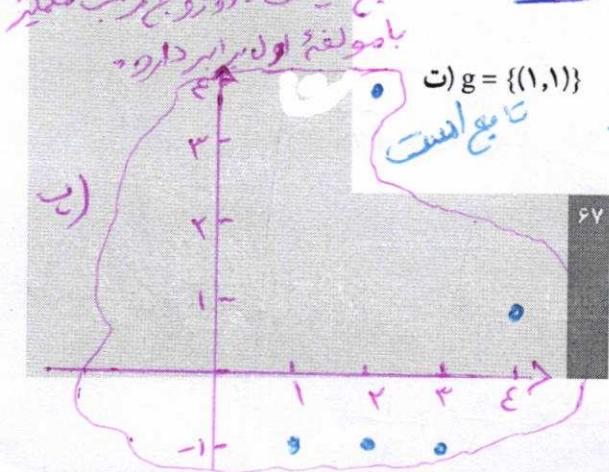
تابع است  
جون هر چیز مخصوص یک A بخواهد  
خارج شرده است.  
(الف)



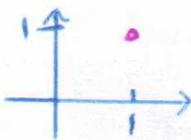
تابع نیست  
جون از یک عضو مجموعه A دیگر خارج شده است.  
(ب)



$$\text{پ) } f = \{(2, -1), (3, -1), (1, -1), (4, 1), (2, 2)\}$$



$$\text{ت) } g = \{(1, 1)\}$$

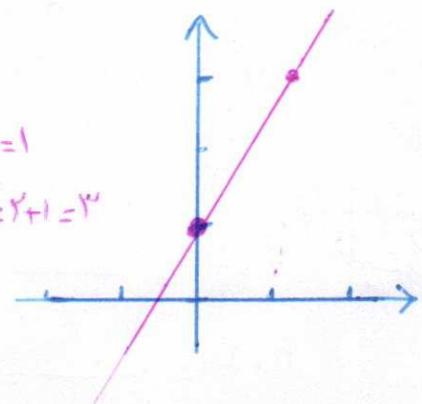


$$\text{ث) } f: \text{IR} \rightarrow \text{IR}$$

$$f(x) = 2x + 1$$

$$f(0) = 2(0) + 1 = 1$$

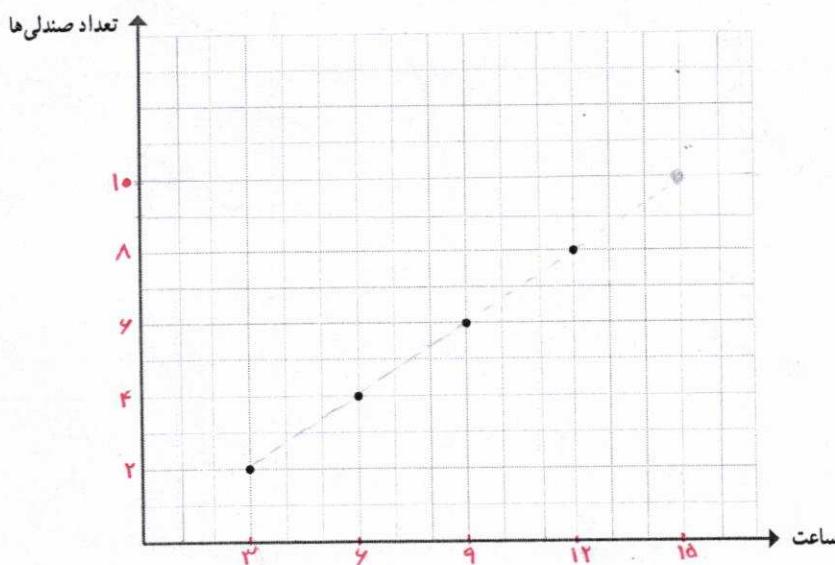
$$f(1) = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$$



## درس ۳

### نمودار تابع خطی

سوال: نمودار زیر تعداد صندلی هایی را که در پایان هر سه ساعت کار در یک کارگاه تولید می شوند، نشان می دهد. آیا می توانید تعداد صندلی های تولید شده در این کارگاه را در پایان پانزدهمین ساعت کاری پیش بینی کنید؟ اما



- آیا تعداد صندلی های تولید شده در پایان هشتاد و یک ساعت کاری بیشتر از پنج عدد است؟ بله
- آیا می توانید تعداد صندلی های تولید شده در این کارگاه در پایان هر ساعت خاص را پیش بینی کنید؟ خیر

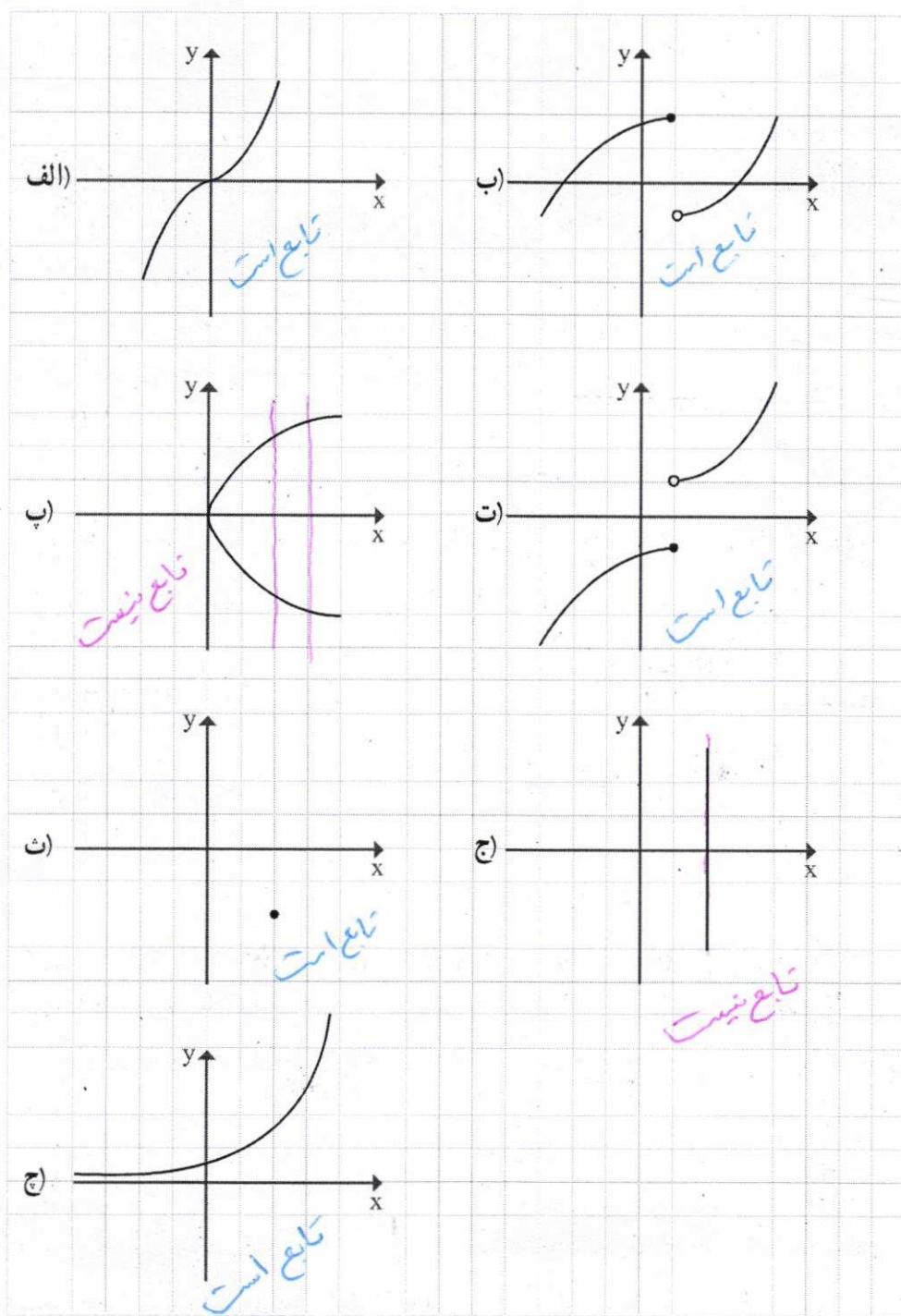
سازه های فعالیت

#### فعالیت ۱



الف) طول یک فنر در حالتی که به آن هیچ وزنه ای آویزان نشده است ۵ سانتی متر است و به ازای هر کیلو گرم وزنه ای که به آن آویزان شود، نیم سانتی متر به طول آن افزوده می شود.

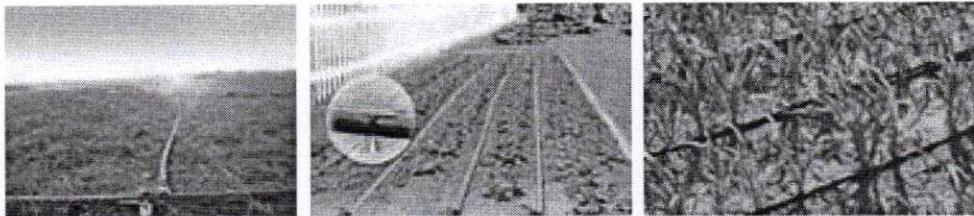
٤. کدام نمودار، نمایش یک تابع می‌باشد؟ چرا؟



نمایه‌ی تعداد

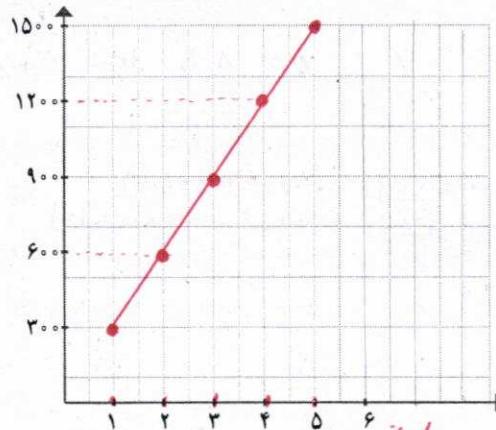
## فعالیت ۲

یک کارخانه تولید لوله‌های آبیاری کشاورزی<sup>۱</sup> در هر ساعت  $\frac{1}{3} \times 1000 = 300$  متر کیلومتر لوله تولید می‌کند.



$x$ بر حسب ساعت	۱	۲	۳	۴	۵
$f(x)$ بر حسب متر	۳۰۰	۶۰۰	۹۰۰	۱۲۰۰	۱۵۰۰

اگر متراز لوله‌ای را که این کارخانه پس از  $x$  ساعت تولید می‌کند، بر حسب متر با  $f(x)$  نشان دهیم. جدول رو به رو را برای  $f(x)$  به ازای مقادیر مختلف  $x$  کامل نماید.



نقاط به دست آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.

می خواهیم به ترتیب تابع خطی رسماً

هر تابع به صورت  $y = f(x)$  که در آن  $y = mx + h$ ، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

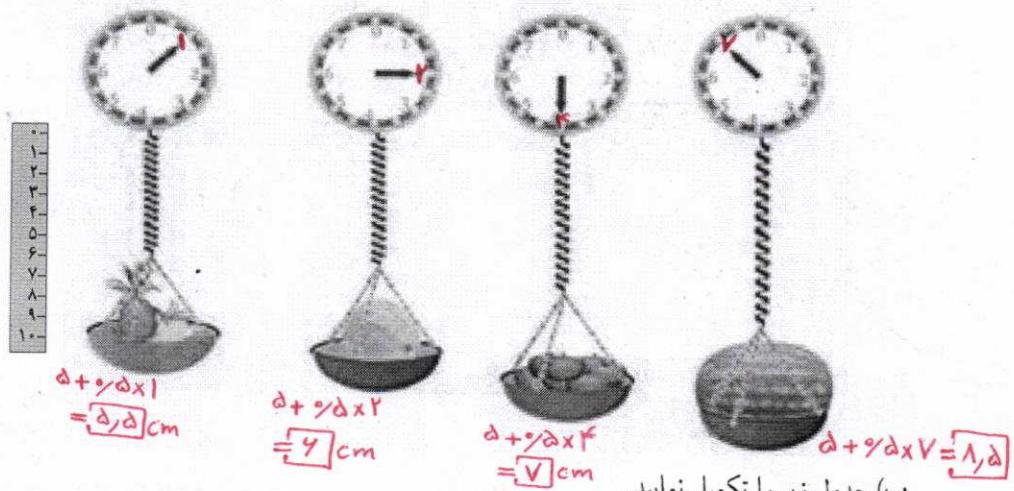


کتاب و آب  
هر دو در بحران‌اند؛  
پکی از کم مصرفی،  
دیگری از برمصرفی!

تابع به دست آمده در فعالیت ۱ و ۲ هر دو تابع خطی‌اند.

۱. کشاورزی پکی از مهم‌ترین بخش‌های جامعه است که در صد تولید ناخالص ملی، ۲۵ درصد صادرات غیرنفتی و فرآم کردن بخش عمده‌ای از مواد اولیه مورد استفاده در صنعت را بهره‌دار است. بنابراین رشد و توسعه در این بخش زمینساز پیشرفت اقتصادی، اجتماعی و صنعتی کشور است. ایران به دلیل موقعت جغرافیایی خاص، دارای اقلیم خشک و نیمه خشک است. از طرف دیگر، آمار و ارقام موجود در بخش کشاورزی نشان‌دهنده‌ای است که در سیاری از مناطق در قابل آب در دسترس، محدودیت زمین وجود نداشته و هرچه امکان صرفه جویی در مصرف آب با استعمال منابع آبی جدید وجود داشته باشد، می‌توان میزان کشت آبی و نهایتاً میزان تولیدات کشاورزی را بالا برد. بخش کشاورزی با ۹۲ درصد بزرگ‌ترین و مهم‌ترین مصرف کننده آب در کشور به شمار می‌رود که متأسفانه بیش از ۸۰٪ در صد انلاف منابع آب به دلیل عدم استفاده از فناوری (تکنولوژی)‌های پیشرفته آبیاری در این بخش به هدر می‌رود. تعدادی از کارشناسان معتقدند که مدیریت منابع آب کشور در شرایط فعلی مدیریت مناسبی نیست و موجب شده تا طی سال‌های اخیر شاهد کاهش تابع آب‌های زیرزمینی و نیز کاهش سطح زیرکشت کشاورزی در برخی مناطق باشیم. لذا دستیابی به بهبود بهره‌وری آب به عنوان شاخص مصرف آب در انواع تولیدات کشاورزی پایدار، امری ضروری است.

طول فنر را در شکل های زیر مشخص کنید.



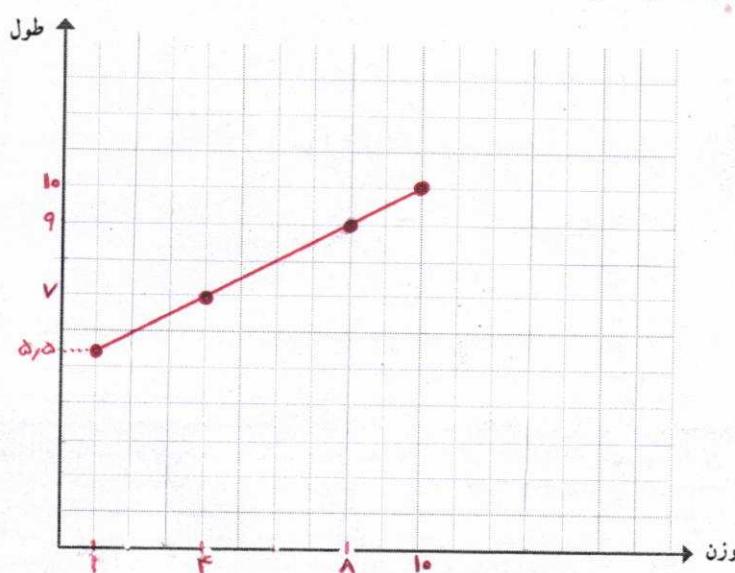
ب) جدول زیر را تکمیل نمایید.

اندازه وزنه (بر حسب کیلو گرم)	۱	۲	۵	۷	۲۰	a
طول فنر (بر حسب سانتی متر)	$\Delta, \Delta$	4	$\sqrt{5}$	$1, \Delta$	15	$\Delta + \gamma \Delta a$

پ) اگر تابع طول فنر را با  $f$  نشان دهیم، مقادیر  $f(1), f(4), f(8)$  و  $f(10)$  (بر حسب سانتی متر) را محاسبه کنید.  
 $L = f(a) = \Delta + \gamma \Delta a \Rightarrow f(1) = \Delta + \gamma \Delta x_1 = \boxed{\Delta, \Delta}$        $f(8) = \Delta + \gamma \Delta x_8 = \boxed{9}$   
 $f(4) = \Delta + \gamma \Delta x_4 = \boxed{4}$        $f(10) = \Delta + \gamma \Delta x_{10} = \boxed{10}$

ت) نقاط بدست آمده از قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم، مشخص کنید.

نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



اگر دمای سنگ‌ها تابع خطی بر حسب عمق باشد، ابتدا جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن تابع  $y=f(x)$  را مشخص نموده سپس تعیین کنید در چه عمقی دما به  $44^{\circ}$  درجه سانتی گراد می‌رسد؟

$$f(40) = 5 \Delta x - 35$$

$$\Delta x = f(5)$$

$$x \approx 1,4f$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{180 - 70}{4 - 2} = \frac{110}{2} = 55$$

نسبت خط

معادله خط یا ضابطه تابع

$$(2, 70) \rightarrow 70 = 55x + h$$

$$h = 70 - 110 = -40$$

$$y = 55x - 40$$

$$f(1) \quad f(2)$$

$$70 \quad 110$$

$$x=1 \Rightarrow y = 55 \times 1 - 40 = 15$$

$$x=2 \Rightarrow y = 55 \times 2 - 40 = 110$$

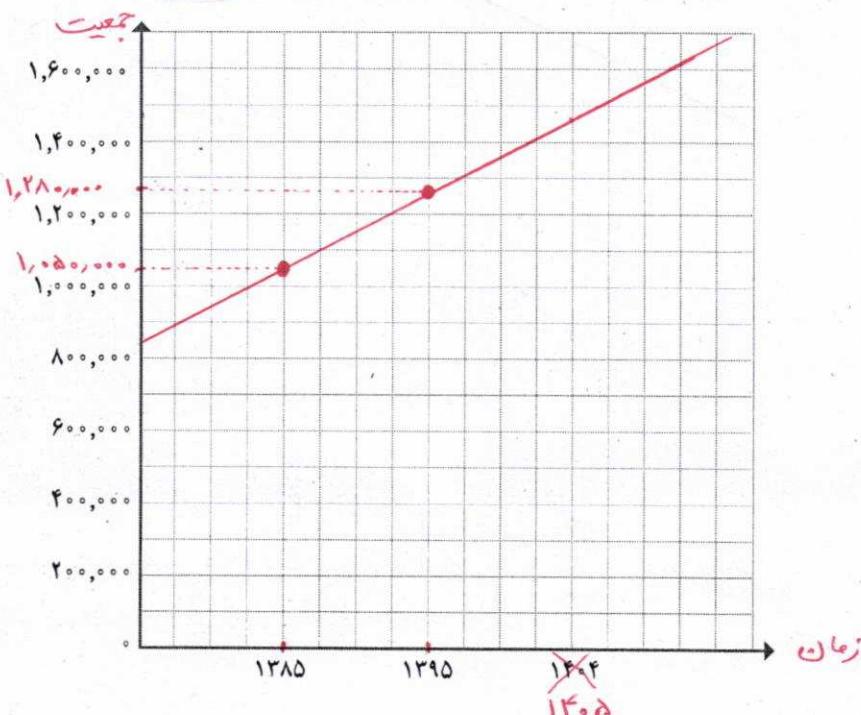
$$y = 55x - 40$$

## کار در کلاس



در برنامه‌ریزی اقتصادی، اجتماعی و مواردی از این قبیل، اولین گام، پیش‌بینی جمعیت در برنامه‌ریزی است. برای برآورد جمعیت، مدل‌های مختلف وجود دارد که هر کدام ویژگی‌های خود را دارند. انتخاب نوع مدل و استفاده از آن در درجه اول به اطلاعات موجود در زمان و سپس به هدف برنامه‌ریزی بستگی دارد. یکی از این روش‌ها، مدل رشد خطی است. این مدل، الگویی از رشد جمعیت را توصیه می‌کند که در آن میزان جمعیت همچنان با نرخ فعلی خود تغییر می‌کند. (روند رشد جمعیت به صورت تابعی خطی نسبت به متغیر زمان است.) فرض کنیم جمعیت یک شهر در سال ۱۳۸۵ ۱۲۸۰,۰۰۰ میلیون و دویست و هشتاد هزار نفر بوده است. اگر برای رشد جمعیت این شهر، مدل الگویی رشد خطی را در نظر بگیریم، بارسم نمودار تابع جمعیت، جمعیت این شهر را در سال ۱۴۰۵ به طور تقریبی برآورد کنید.

نرخ رشد:  
به میزان افزایش  
یک کمیت  
(نظریه جمعیت)  
در واحد زمان،  
نرخ رشد گفته می‌شود.



## رسم نمودار تابع درجه یک

برای رسم نمودار تابع  $y = mx + h$  دو نقطه از نمودار تابع را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم و سپس آن دو نقطه را به وسیله خطی به هم وصل می‌کنیم.

### کار در کلاس

در یک تابع خطی  $f(x) = mx + h$  با توجه به معادله خط که در کتاب ریاضیات نهم دیده اید، ابتدا  $m$  و سپس به کمک آن  $f(x)$  را مشخص و نمودار تابع را رسم کنید.

$$m = \frac{3 - 2}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

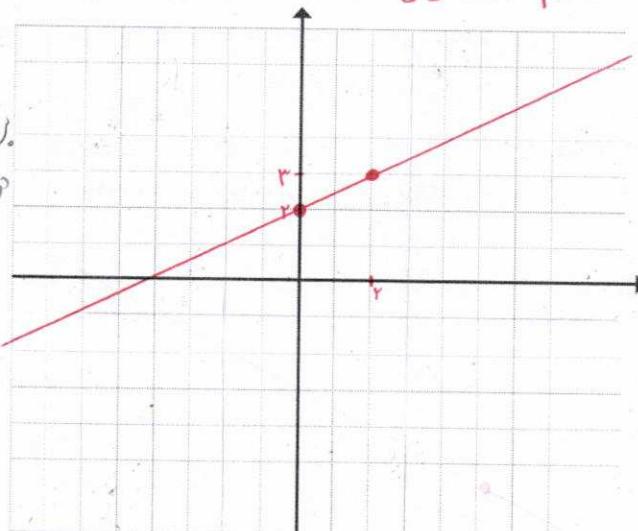
$$y = mx + h \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

معادله خط

$$y = mx + h$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2}x_0 + h \Rightarrow h = 2$$

بنابراین ...  $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$



### کار در کلاس

جدول زیر رابطه بین عمق و دمای سنگ‌ها در زیرزمین نشان می‌دهد.  $x$  معرف عمق (بر حسب کیلومتر) و  $y$  معرف دما (بر حسب سانتی‌گراد) است.

$x$	۲	۴
$y$	۷۵	۱۸۵

$$m = \frac{v - o}{t - 0} = \frac{v}{t} \quad ; \quad o = \frac{v}{t} \times 0 + h \Rightarrow h = 0$$

جواب ۱)

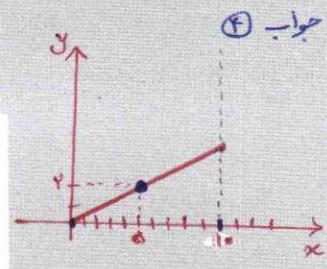
$$f(x) = \frac{v}{t} x + o \Rightarrow f(x) = \frac{v}{t} x$$

$$* f(1) = \frac{v}{t} \times 1 = \frac{v}{t}$$

$$** f(-1) = \frac{v}{t} \times (-1) = -\frac{v}{t}$$

$$*** f(2) = \frac{v}{t} \times 2 = \frac{2v}{t}$$

۴) نمودار تابع خطی رارسم کنید که دامنه آن برابر  $\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$  و از نقطه  $A = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$  بگذرد.



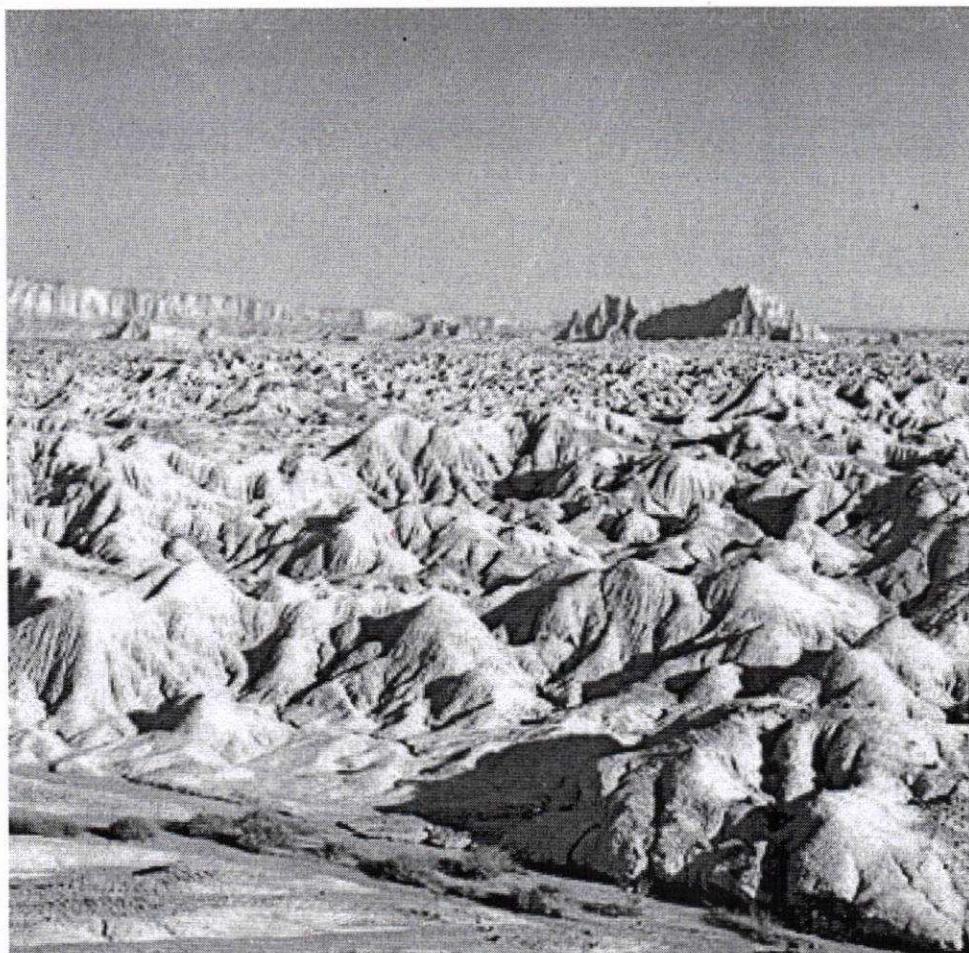
۵) نمودار یک تابع خطی از مبدأ  $(0, 0)$  و  $(2, 7)$  است. در این صورت اختلاف  $f(0)$  و  $f(1)$  را بدست آورید.

۶) رابطهٔ بین درجهٔ دما بر حسب سانتی گراد و فارانهايت به صورت  $F = \frac{9}{5}C + 32$  است. دمای یک جسم  $20^\circ$  درجه سانتی گراد بالا رفته است. دمای آن بر حسب فارانهايت چقدر افزایش داشته است؟

۷) یک شرکت برای تولید  $x$  کالا،  $C(x) = 3000 + 50x$  تومان هزینه می‌کند و هر کالا را  $70$  تومان می‌فروشد.

الف) تابع سود را تعیین و نمودار آن رارسم کنید.

ب) این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا را باید بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟



کوه‌های مینیاتوری - جابهار

$$F = \frac{9}{5} \times 20 + 32 = 36 + 32 \\ F = 68$$

جواب ۷)

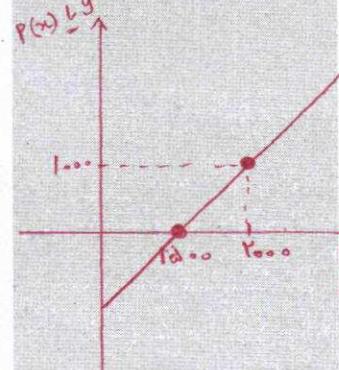
$$R(x) = 70x$$

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = 70x - (3000 + 50x)$$

$$P(x) = 20x - 3000$$

x	1000	2000
P(x)	0	1000



$$P(x) = 0$$

$$20x - 3000 = 0$$

$$\frac{20x}{20} = \frac{3000}{20} \Rightarrow x = 150$$

سی باید ۱۵۰ کیلوگرم بسیر بعنی ۱۵ کیلوگرم بفروش داشت.

کالا بفروش داشتند و سود داشتند از آغاز شروع.

$$x = y + 4$$

$$P = 2(x+y) = 2(y+4+y) \Rightarrow P = 2(2y+4)$$

$$\Rightarrow P = 4y + 8$$

محیط یک تابع حلقه است حون ب  
شکل  $y = mx + h$  در کاره است.



### کار در کلاس

ضابطه تابع محیط مستطیل های را که طول آنها ۴ واحد بیشتر از عرض آنها است، بر حسب عرض آن بنویسید و نشان دهید یک تابع خطی است.

$$x = y + 4$$

$$S = x \times y = (y+4) \times y$$

مساحت

$$S = y^2 + 4y$$

مساحت تابع حلقه نیست؛ حون به سکه  $\rightarrow$

$$y = mx + h$$

در نیاز نداشت (معنی بازیان ندارد)



### کار در کلاس

اگر نمودار تابع خطی  $f$  از مبدأ عبور کرده و  $f(-1) = 2$  باشد، نمودار و ضابطه تابع  $f$  را مشخص کنید.

$$m = \frac{y - 0}{-1 - 0} = -2$$

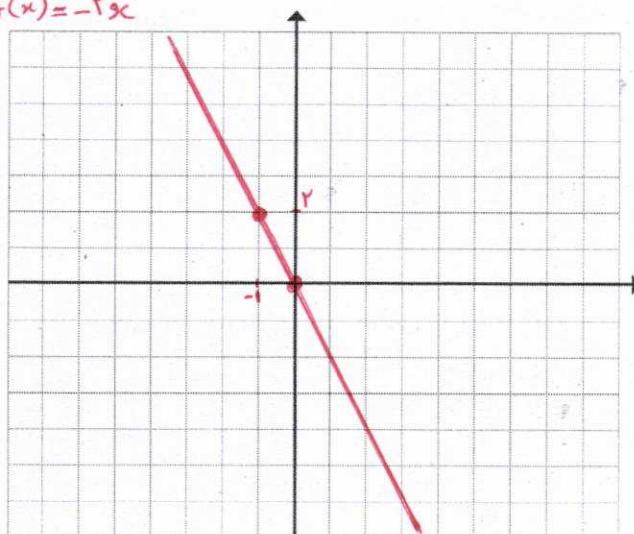
$$f(0) = 0$$

$$(0, 0)$$

$$0 = -2x + h \Rightarrow h = 0$$

$$f(x) = -2x$$

؛ معادله این ضابطه



$$m = \frac{f - 1}{1 - 0} = 3$$

$$1 = 3 \times 1 + n \Rightarrow n = 1 - 3$$

$$n = -2$$

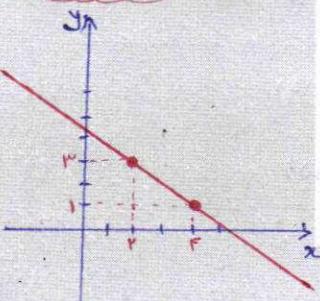
$$f(x) = 3x - 2$$

$$m = \frac{y - 1}{1 - 0} = \frac{y - 1}{1} = -1$$

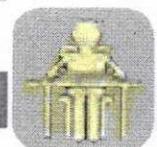
$$1 = -1 \times 1 + h \Rightarrow h = 1 + 1$$

$$h = 2$$

$$f(x) = -x + 2$$



### تمرین



۱. مقادیر  $m$  و  $n$  را چنان باید تا در تابع با ضابطه  $f(x) = mx + n$  داشته باشیم:  $f(1) = 4$  و  $f(2) = 1$ .

۲. ضابطه تابع خطی  $f$  را که از نقاط  $(1, 2)$  و  $(2, 3)$  می گذرد، مشخص کنید و نمودار آن را رسم نمایید.

۳. در تابع خطی  $f$  داریم  $f(1) = 5$  و  $f(2) = 8$ ، مقادیر  $f(-3)$  و  $f(5)$  را باید.

$$m = \frac{1 - 8}{2 - 1} = 3$$

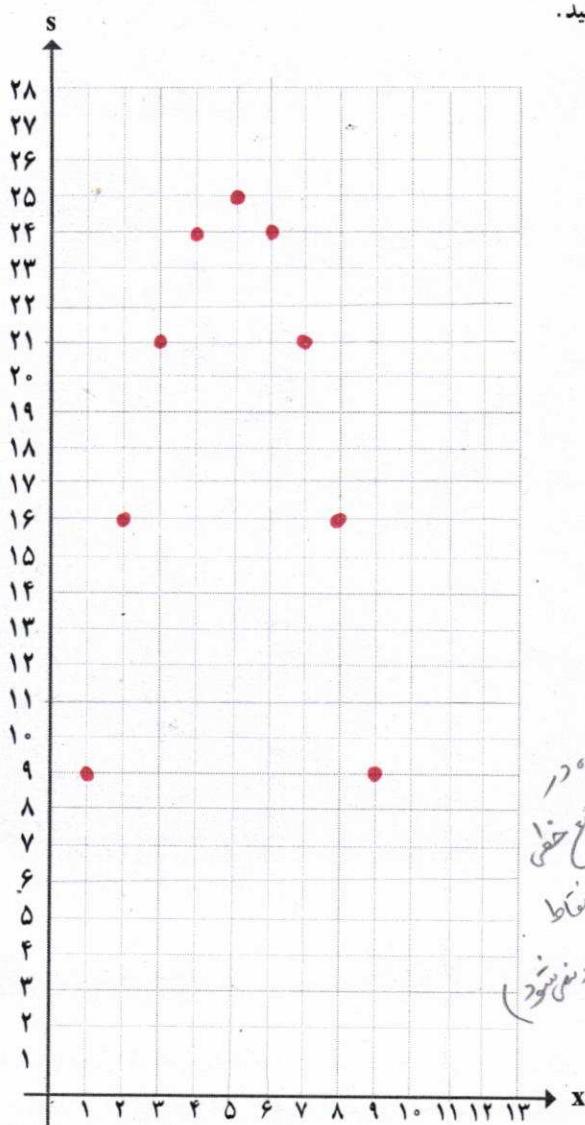
$$3 = 3 \times 1 + h \Rightarrow h = 3 - 3 \Rightarrow h = 0$$

$$y = f(x) = 3x + 2$$

$$f(-3) = 3(-3) + 2 = -9 + 2 = -7$$

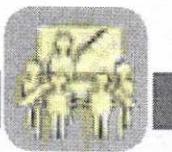
$$f(5) = 3(5) + 2 = 15 + 2 = 17$$

ب) اگر هر زوج مرتب  $(x, s)$  را یک نقطه فرض کنیم، این نقاط را در دستگاه مختصات محوهای زیر مشخص کنید.



با در نظر گرفتن مساحت هر چهار�د  
تسنیه، میتوانیم که هر چهار  
نشست (با وصل تردن نقاط  
هم، خلاصه ایجاد نمود).

### فعالیت



یک شرکت ناقشی ساختمانی قیمتی را که برای رنگ آمیزی روزانه هر مترمربع از دیوار بیرونی یک کارخانه تعیین می کند، مبلغ  $x - 1200$  تومان است.  $x$  میزان رنگ آمیزی روزانه گروه بر حسب مترمربع است. هزینه رفت و آمد و صرف غذای گروه به طور ثابت روزانه  $30000$  تومان و همچنین مترمربعی  $200$  تومان هزینه لوازم مصرفی بر عهده گروه است.

متوجه کردن کمیت

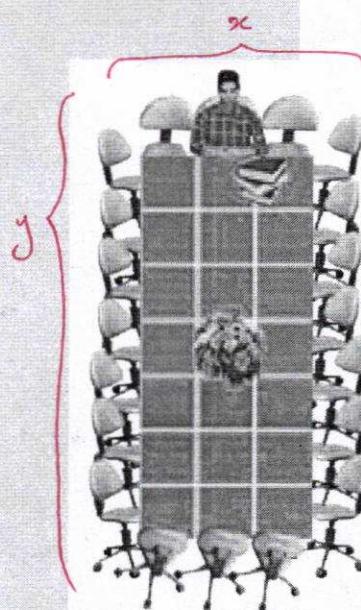
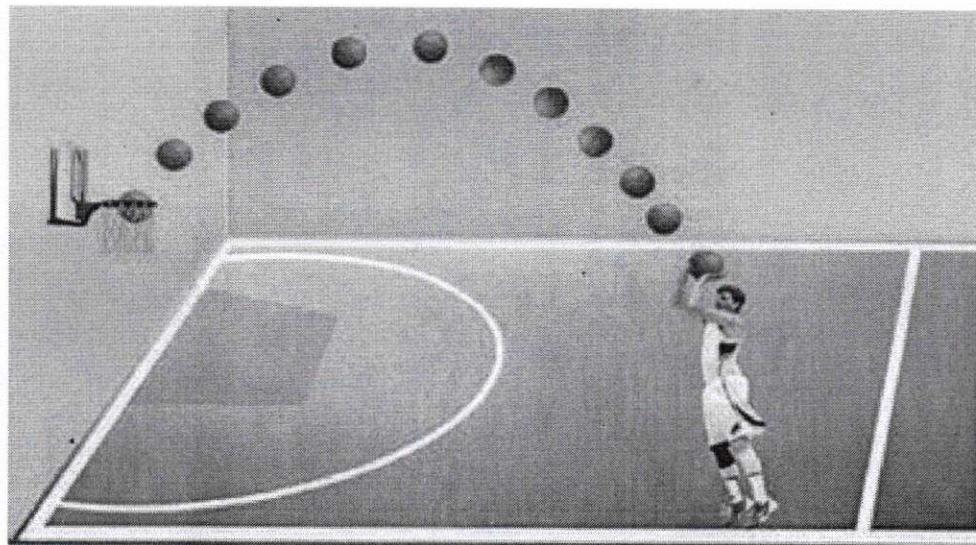
$$R(x) = (x - 1200) \times x$$

هزینه پردازی پردازشی حیوان در نیت (پ) شده (ست)  $\rightarrow$

$$C(x) = 30000 + 200x$$

# درس ۴

## نمودار تابع درجه ۲



### فعالیت

برای برگزاری یک جلسه، با کنار هم قرار دادن تعدادی میز به صورت مربع هایی  $1 \times 1$ ، یک میز مستطیل شکل به محیط ثابت  $20$  تهیه می کنیم. اندازه ضلعی را که صندلی رئیس جلسه در آن قرار می گیرد با  $x$  و اندازه ضلع دیگر را با  $y$  نشان می دهیم همچنین مساحت مستطیل را با  $s$  نشان می دهیم.

(الف) جدول زیر را کامل کنید.

$x$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$y$	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
$s$	۹	۱۶	۲۱	۲۴	۲۵	۲۴	۲۱	۱۶	۹
$(x, s)$	$(1, 9)$	$(2, 16)$	$(3, 21)$	$(4, 24)$	$(5, 25)$	$(6, 24)$	$(7, 21)$	$(8, 16)$	$(9, 9)$



$$\frac{(x+y)}{2} = 10$$

پژوهش باید  
جمع مول و عرض  
عدد ۱۰ شود



## رسم نمودار تابع درجه دوم

معادله تابع درجه دوم در حالت کلی به صورت  $y = ax^2 + bx + c$  است که در آن  $a \neq 0$  می‌باشد.

نمودار آن به یکی از دو صورت یا است که به آن سهمی می‌گوییم. در سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  نقطه‌ای به طول  $\frac{b}{2a}$  رأس سهمی است. خطی که از رأس سهمی به موازات محور عرض ها رسم می‌شود، محور تقارن سهمی است. محور تقارن مدل حل شود

- اگر در معادله سهمی  $a > 0$  باشد، شکل سهمی به صورت خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای کمترین مقدار است.

- اگر در معادله سهمی  $a < 0$  باشد، شکل سهمی به صورت خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای بیشترین مقدار است.

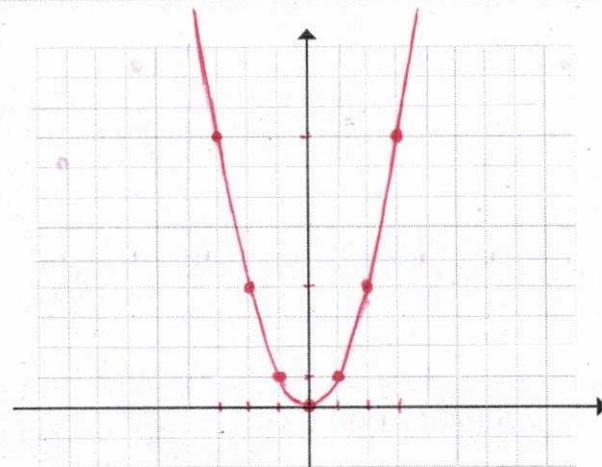
### فعالیت



#### درجه‌ی ۲ سهمی

ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس به کمک آن نمودار تابع با ضابطه  $y = f(x) = x^2$  را رسم کنید.

x	...	-4	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	16	4	1	0	1	4	9	16	...



الف) قیمت پرداختی شرکت برای هر مترمربع رنگ آمیزی به ازای  $x=200$  متر کار در یک روز)

$$x=200 \rightarrow \text{قیمت} = 1200 - 200 = 1000$$

$$x=300 \rightarrow \text{قیمت} = 1200 - 300 = 900$$

و  $x=300$  چقدر است؟

(ب) هزینه گروه در یک روز به ازای  $x=200$  و  $x=300$  چقدر است؟

$$x=200 \Rightarrow C(200) = 30000 + 200 \times 200 = 70,000$$

$$x=300 \Rightarrow C(300) = 30000 + 200 \times 300 = 90,000$$

(پ) اگر تابع سود گروه را با  $P(x)$  نشان دهیم  $P(200), P(300), P(100)$  را محاسبه کنید.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = x(1200 - x) - (30000 + 200x)$$

$$P(200) = 200 \times (1200 - 200) - (30000 + 200 \times 200) = -10,400$$

$$P(100) = 100 \times (1200 - 100) - (30000 + 200 \times 100) = 40,000$$

$$P(300) = 300 \times (1200 - 300) - (30000 + 200 \times 300) = 130,000$$

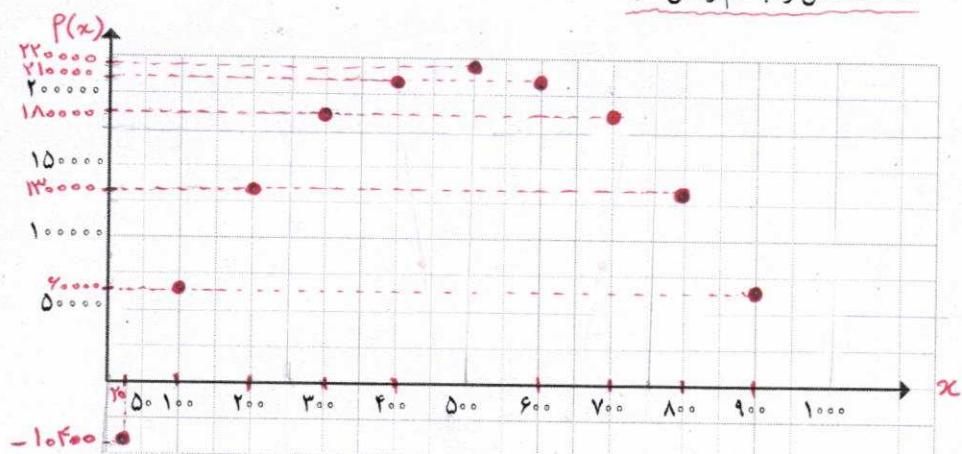
(ت) حاصل  $P(x)$  را به دست آورید و آن را ساده کنید.

(ث) جدول زیر را برای  $P(x)$  به ازای مقادیر مختلف  $x$  کامل کنید.

$x$	۲۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰	۷۰۰	۸۰۰	۹۰۰	
$P(x)$	-10400	60000	110000	140000	170000	210000	220000	210000	180000	130000	40000

(ج) نقاط به دست آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید.

نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



(ج) چرا بعضی از نقاط، پایین تر از محور افقی قرار می‌گیرند؟ آیا هرچه متراد بیشتری رنگ آمیزی شود، چون  $(x)$  مسخر شد؟ (عنی گروه سود را ندارد)

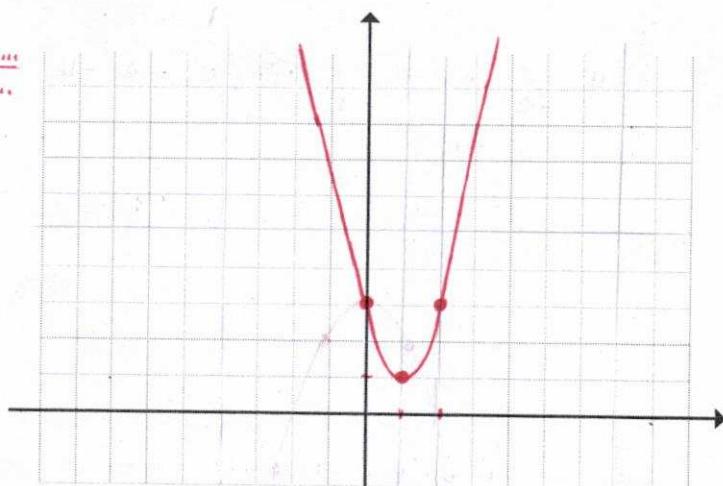
خوب - از  $x=500$  بعد سود نمتر من شود.

## کار در کلاس



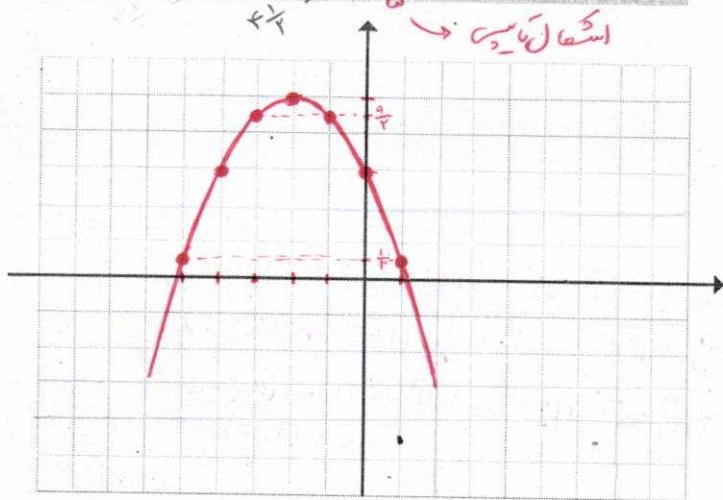
به کمک صهیت (ت) کار در کلاس صفحه‌ی قبل  
الف) رأس سهمی به معادله  $y = 2(x-1)^2 + 1$  را مشخص کنید به کمک آن نمودار سهمی را رسم  
کنید.  
لحوظه کنید تیرپار رأس سهمی  $(1, 1)$  دارد.

$x$	...	0	1	2	...
$y$	...	-3	1	3	...

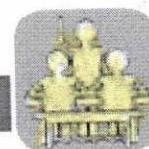


ب) جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار سهمی به معادله  $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 5$  را رسم  
کنید.  
لحوظه کنید رأس سهمی  $(-2, 5)$  است.

$x$	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	...
$y$	...	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{9}{2}$	X	$\frac{9}{2}$	3	$\frac{1}{2}$	...



## کار در کلاس

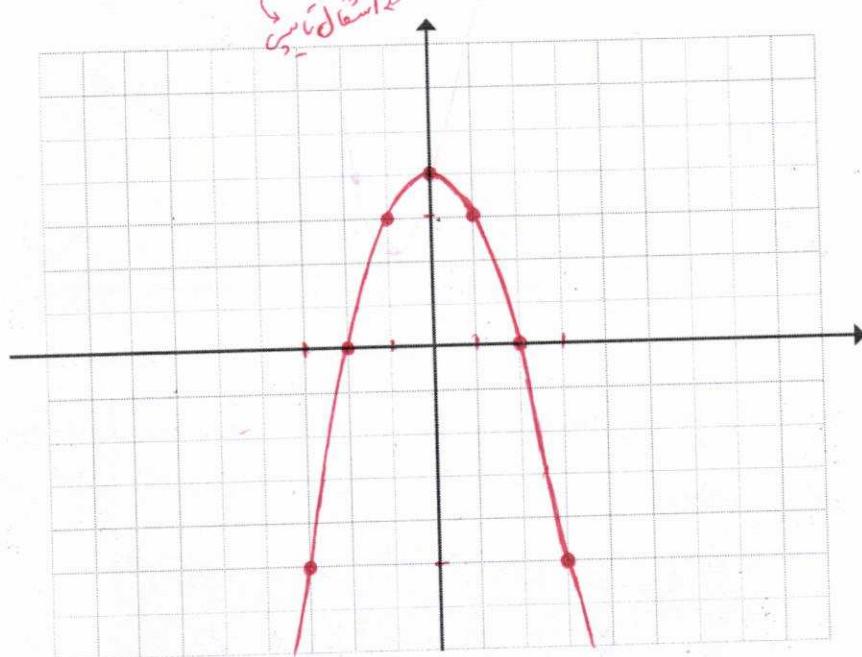


(وجهی ۲ بهمن)

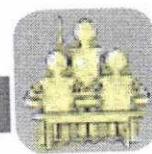
جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار تابع با ضابطه  $y = 4 - x^2$  را رسم کنید.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	-12	-5	0	3	4	3	0	-5	-12	...

اسغال نمایی



## کار در کلاس



نقاط رأس سهمی های را که معادله های آنها داده شده است، مشخص کنید.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(1)} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0) \text{ رأس}$$

الف)  $y = x^2$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(-1)} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -0 = 0 \Rightarrow (0, 0) \text{ رأس}$$

ب)  $y = 4 - x^2$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2(1)^2 - 4(1) + 1 = 2 - 4 + 1 = -1 \Rightarrow (-1, -1) \text{ رأس}$$

پ)  $y = 2x^2 - 4x + 1$

ت)  $y = 2(x-1)^2 + 1$

(وجهی ۲ بهمن)

$$y = 2(x^2 - 2x + 1) + 1 = 2x^2 - 4x + 2 + 1 = 2x^2 - 4x + 3$$

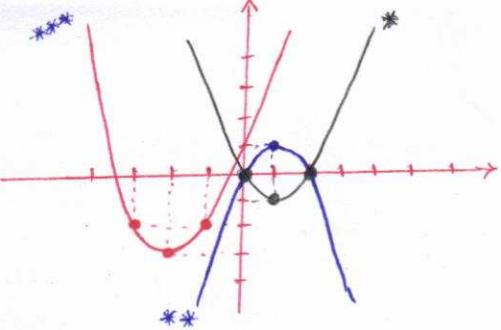
ل)  $y = 2x^2 - 4x + 3$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(2)} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2(1)^2 - 4(1) + 3 = 1 \Rightarrow (1, 1) \text{ رأس}$$

پ)  $y = 2(x-1)^2 + 1$

طبقه بندی طبق رأس، همان مرتبه ا عدد داخل برآینتر دلایل توان ۲ است.

(وجهی



$$y = x^2 + 4x + 1$$

x	-3	-2	-1
y	-2	1	1

$$y = -(x-1)^2 + 1$$

x	0	1	2
y	1	0	-1

$$y = x^2 - 2x$$

x	0	1	2
y	-1	0	1

## تمرین

- ۱) نمودار سهیمی های به معادله های  $y = x^2 + 4x + 1$  و  $y = -(x-1)^2 + 1$  را رسم کنید.  
 ۲) اگر تابع درآمد به صورت  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4$  باشد، ماکسیمم مقدار سود را مشخص کنید.

- ۳) محیط مستطیلی ۲۶ متر است. اگر اندازه یکی از اضلاع آن را با  $x$  و مساحت آن را با  $S$  نشان دهیم، ابتدا نمودار مساحت را بر حسب  $x$  رسم کنید. سپس به نمودار مشخص کنید به ازای چه مقداری از  $x$  مساحت مستطیل ماکسیمم می شود. از اد

۴) اگر  $2x+a=100$  باشد  $x$  و  $a$  طوری باید که  $y=xa$  ماکسیمم شود.

- ۵) در یک تولیدی، نوعی لامپ، برای مصارف پژوهشکی تولید می شود. این تولیدی هر یک از لامپ هارا می تواند به قیمت ۲۰ تومان بفروشد. اگر در هر روز  $x$  واحد لامپ تولید کند و بفروشد و تابع هزینه آن برابر  $R(x) = 200x$  باشد:  $C(x) = x^2 + 40x + 100$

(الف) تابع سود روزانه این تولیدی را بنویسید.

$$P(x) = R(x) - C(x) = 200x - (x^2 + 40x + 100)$$

$$P(x) = -x^2 + 140x - 100$$

نایاب سود در حدود ۲۵ تومان است. سهیمی

در راس آن اتفاق نرفتند:  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{140}{2(-1)} \Rightarrow x = 70$

معنی ۷۰ لامپ در فروخته شود که بیشترین سود را داشته باشد.

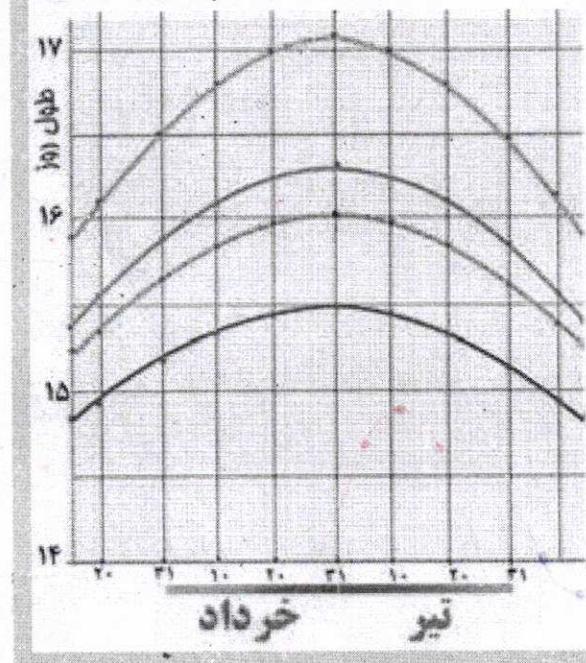
(ب) چند لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟

پ) بیشترین سود روزانه این کارگاه چقدر است؟  $x = 70$  را در نایاب سود جایز نمایم.  $P(70) = -70^2 + 140(70) - 100$

$$P(70) = 4200$$

بیشترین سود روزانه کارگاه

## خواهد نی



در روز ۳۱ خرداد، محور زمین در قطب شمال بیشترین انحراف به سمت خورشید را دارد. در این روز، خورشید در هنگاه ظهر در بالاترین زاویه ممکن در آن محل قرار دارد. وقت کنید که روز ۳۱ خرداد طولانی ترین روز سال در نیم کره شمالی است. اما در عرض های بالاتر، این زمان بیشتر است. به عبارت دیگر هر چه به خط استوا نزدیک شویم، طول روز در ۳۱ خرداد عددی کوچکتر و هرچه از خط استوا دور شویم عدد بزرگتری می باشد. نمودار مقابل نشان می دهد که طول روز در ایران در ایام خرداد ماه و تیرماه در شهرهای ایران چه اختلافی با هم دارند.



$$2x + a = 100 \rightarrow a = 100 - 2x$$

حل ۱۵

$$y = x(a) = x(100 - 2x) \Rightarrow y = 100x - 2x^2 \rightarrow$$

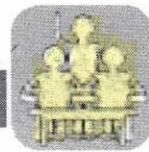
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-2)} \Rightarrow x = 25 \rightarrow a = 100 - 2(25) \Rightarrow a = 50$$

$$y_{\max} = x \cdot a = 25 \cdot 50 = 1250$$

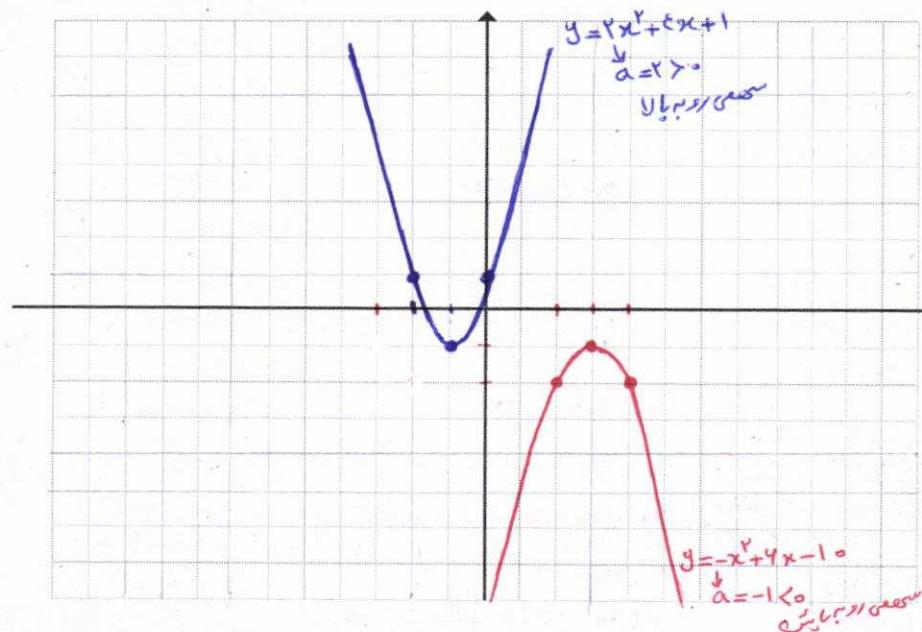
۱۵) حل مساحت در رأس افقی را از

\*\*  $y = x^2 - 2x$  طول رأس افقی (ماکسیم آن)

## کار در کلاس



۱. نمودار توابع درجه دوم  $y = 2x^2 + 4x + 1$  و  $y = -x^2 + 4x - 1$  را رسم کنید.



$$y = -x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

حل راسی

$$\begin{array}{r|rrr} x & \dots & 2 & 3 & \dots \\ \hline y & \dots & -2 & -1 & \dots \end{array}$$

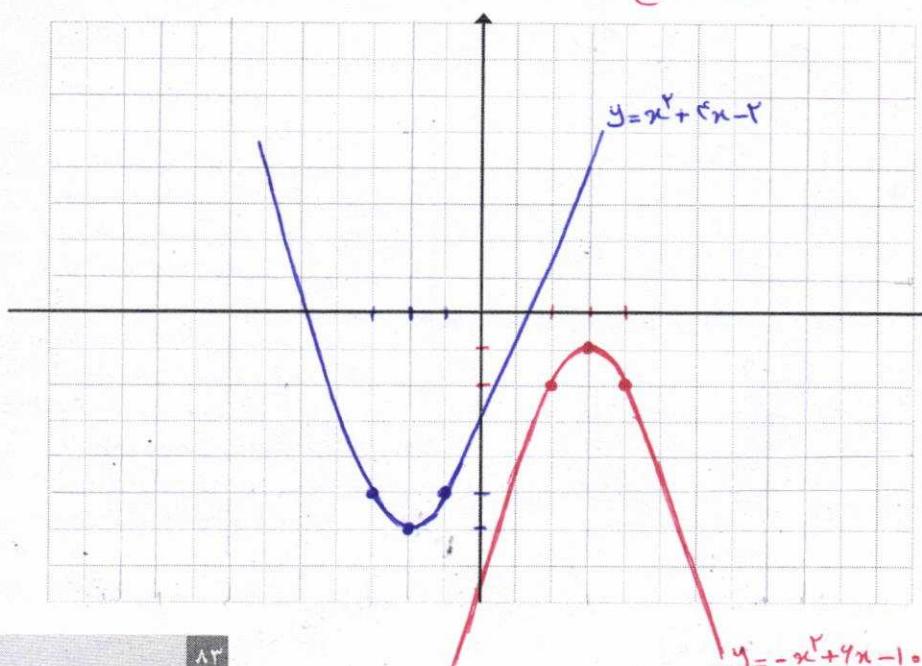
$$y = 2x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(2)} = -1$$

حل راسی

$$\begin{array}{r|rrr} x & \dots & -2 & -1 & 0 & \dots \\ \hline y & \dots & 1 & 0 & \dots \end{array}$$

۲. نمودار توابع  $y = x^2 + 4x - 2$  و  $y = -x^2 + 4x - 1$  را رسم کنید و در ادامه، مختصات برخورد این دو سعی خود را مشخص کنید. تعادل سماعی ندارند.



$$y = -x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

حل راسی

$$\begin{array}{r|rrr} x & \dots & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \hline y & \dots & -4 & -1 & -2 & \dots \end{array}$$

$$y = x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(1)} = -2$$

حل راسی

$$\begin{array}{r|rrr} x & \dots & -3 & -2 & -1 & \dots \\ \hline y & \dots & -8 & -4 & -1 & \dots \end{array}$$

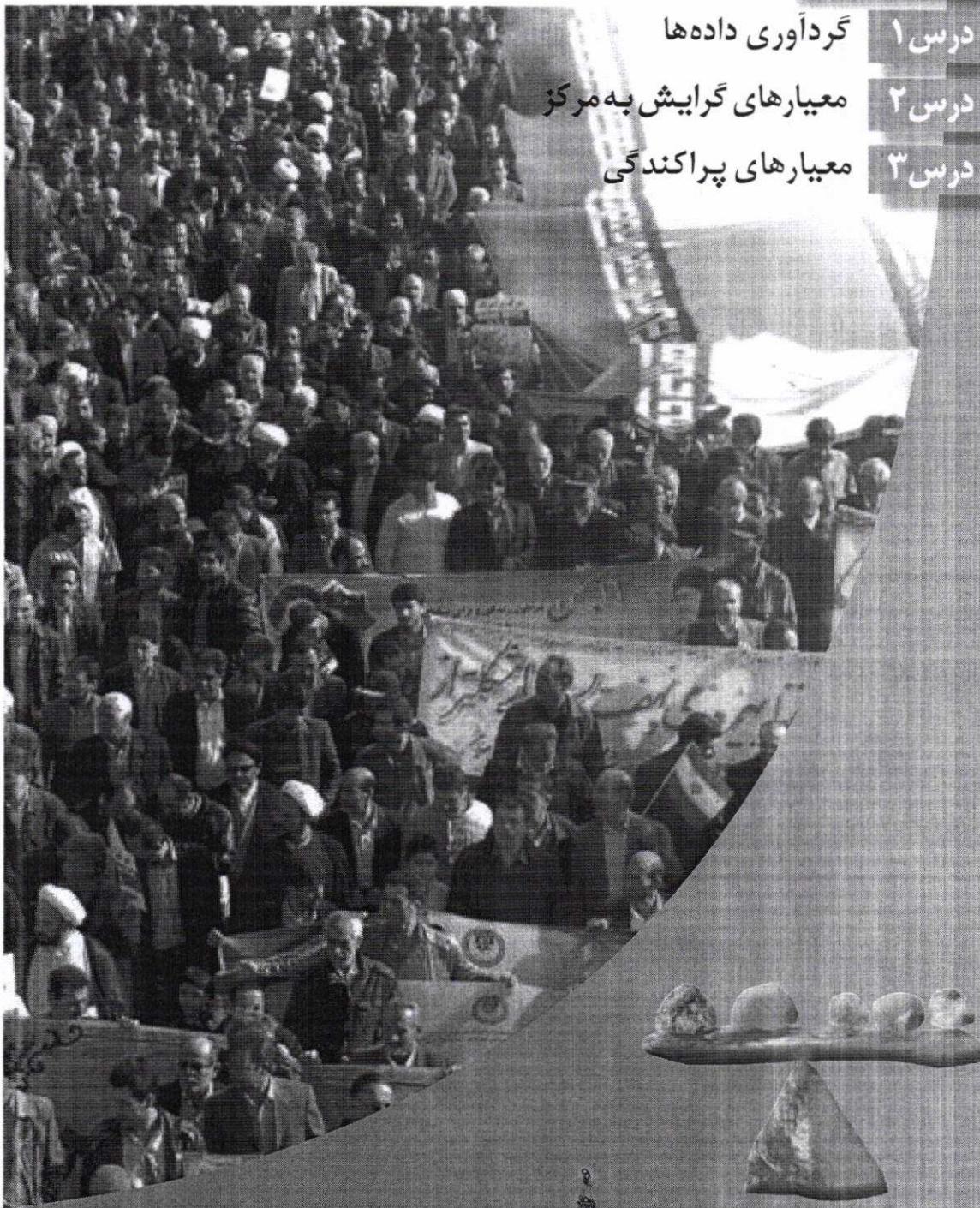
فصل

# چهارم کار با داده‌های آماری

درس ۱ گردآوری داده‌ها

درس ۲ معیارهای گراییش به مرکز

درس ۳ معیارهای پراکندگی



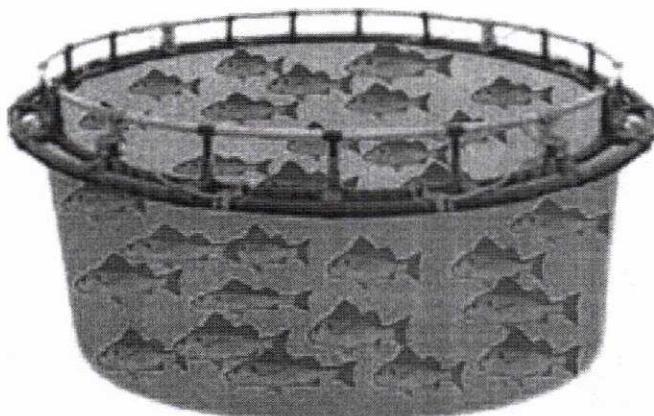
# درس ۱

## گردآوری داده‌ها

فعالیت



می‌خواهیم وزن ماهی‌های یک حوضچه بروش ماهی را به منظور فروش آنها تخمین بزنیم.  
ابتدا از قسمت عمیق و در مرحله بعد، از قسمت کم عمق ۵ ماهی صید می‌کنیم.



انتخاب ۵ ماهی از قسمت عمیق



انتخاب ۵ ماهی از قسمت کم عمق



۱. آیا انتخاب ۵ ماهی از قسمت عمیق، تخمین خوبی از وزن ماهی‌های حوضچه به ما می‌دهد؟ یعنی آیا  
می‌توان برای فروش آنها اعلام آمادگی کرد؟ **حدیر**

۲. به نظر شما کدام تخمین بیش از مقدار واقعی است و کدام یک کمتر از مقدار واقعی؟

**تحمین از قسمت عمیق بیشتر - و از قسمت کم عمق بیشتر  
از مقدار واقعی است.**

## زیر پرداخت منابع کتاب

۳. اگر شما امکان صید ۵ ماهی داشتید، چگونه آنها را انتخاب می‌کردید تا منجر به تخمین بهتری از وزن ماهی‌های حوضچه می‌شد؟ فرض کنید ماهی‌ها، همانند شکل در حوضچه پخش شده‌اند و تحرک زیادی ندارند.

۴. اگر از نحوه پخش شدن ماهی‌ها اطلاعی نداشتم، بهتر بود ۵ ماهی را چگونه انتخاب می‌کردیم؟ آیا انتخاب تصادفی چند بخش از حوضچه (مثلًاً زمانی که آن را شطرنجی کرده‌ایم) به ما کمک می‌کند ماهی‌های انتخابی معرف بهتری از کل ماهی‌ها باشند؟ **آنرا ب تفاصیل مذکور کنم.**

داده‌ها واقعیت‌های درباره یک چیزی‌اند که در محاسبه، استنباط، یا برنامه‌ریزی به کار می‌روند. واحد آماری به هر یک از افراد یا چیزهایی می‌گویند که داده‌های مربوط به آنها در یک بررسی آماری گردآوری می‌شود.

مجموعه کل واحدهای آماری را جامعه آماری می‌نامند. هر زیرمجموعه از جامعه آماری را که با روش مشخصی انتخاب شده باشد، یک نمونه می‌نامند. نمونه‌ای را که در آن، همه اعضای جامعه، شناس انتخاب یکسان در نمونه را داشته باشند نمونه تصادفی می‌نامند.

در مثال حوضچه ماهی، هر ماهی درون حوضچه یک واحد آماری است. به کل ماهی‌های حوضچه که عبارت است از مجموعه همه واحدهای آماری جامعه گفته می‌شود. اگر وزن تک تک ماهی‌های را در اختیار داشته باشیم داده‌های جامعه را داریم. وزن نمونه ۵ ماهی از قسمت کم عمق داده‌های یک نمونه پنج تایی است. اگر ۵ ماهی با یک روش تصادفی از حوضچه استخراج شود، عملاً یک نمونه تصادفی ۵ تایی از حوضچه در اختیار داریم.

تفاوت زیادی بین عدد در ریاضی و داده در آمار وجود دارد. به عبارت دیگر عدد ۵۰ یک مفهوم در ریاضی دارد و داده‌ای که مقدار آن ۵۰ است، علاوه بر مقدار آن حاوی اطلاعات زیادی است. به عنوان مثال این داده می‌تواند متوسط تلفات روزانه جاده‌های کشور در یکی از سال‌های اخیر باشد.



## فعالیت



می خواهیم طول قد دانش آموزان یک مدرسه را گردآوری کنیم. برای این منظور چه راهی پیشنهاد می کنید؟ **اندازه گیری قد نمای درون آموزان مدرسه**

آمارگیری: گردآوری داده ها به یکی از روش های ممکن

آمارگیر: کسی که آمارگیری را انجام می دهد.

اگر قرار شد آمارگیر باشیم، می توانیم جدولی به صورت زیر تکمیل کنیم.

مثالی از جدول طراحی شده برای ثبت داده ها

اندازه طول قد	چوب خط برای شمارش	تعداد دانش آموزان	نام
کوتاه تر از ۱۴۰ سانتی متر			
۱۴۰-۱۴۹ سانتی متر			
۱۵۰-۱۵۹ سانتی متر			
۱۶۰-۱۶۹ سانتی متر			
۱۷۰ سانتی متر یا بلندتر			

چگونه مطمئن می شویم که دانش آموزی از قلم نیفتاده است؟ چه راهکاری برای این منظور پیشنهاد می کنید؟

آمارگیری زحمت زیادی برای آمارگیر دارد. آیا راه حل ساده تری برای انجام آن دارد؟ یکی از مرسوم ترین روش های آمارگیری، استفاده از پرسشنامه است. پرسشنامه شبیه همان جدولی است که هنگام ثبت نام در مدرسه، شما یا والدین، آن را تکمیل کرده اید. پرسشنامه را می توانند واحد های جامعه یا نمونه تکمیل کنند.

## مثالی از پرسشنامه طراحی شده

سلام، می خواهیم طول قد داشش آموزان مدرسه را آمارگیری کیم.  
لطفاً یکی از گزینه ها را انتخاب کنید.  
طول قد شما چقدر است؟

- کوتاهتر از ۱۴۰ سانتی متر
- ۱۴۰-۱۴۹ سانتی متر
- ۱۵۰-۱۵۹ سانتی متر
- ۱۶۰-۱۶۹ سانتی متر
- ۱۷۰ سانتی متر یا بلندتر

## خواندنی

برای به انجام رساندن یک آمارگیری  
باید پاسخ سوال های زیر را بدانید:

۱. می خواهید چه چیزی پیدا کنید؟ چرا؟
۲. چه داده هایی را باید گردآوری کنید؟ چگونه تصمیم می گیرید؟
۳. کدام راه، بهترین راه گردآوری داده ها است؟ چرا؟ آیا به ابزار خاصی نیاز دارید؟
۴. به چه مقدار داده نیاز دارید؟ چگونه تصمیم می گیرید؟
۵. داده های شما باید چقدر دقیق باشند؟ چرا؟
۶. داده هایتان را چگونه ثبت می کنید؟ چرا این روش را انتخاب کرده اید؟
۷. داده ها را چگونه ارائه می کنید؟ چرا؟
۸. آیا داده ها از الگوی خاصی پیروی می کنند؟ داده ها بیانگر چه هستند؟
۹. چه نتجه گیری یا پیشگویی خاصی می توانید از داده ها ارائه کنید؟
۱۰. آیا نتایج، با آنچه انتظار داشتید، تطبیق دارد؟
۱۱. چگونه نتایج کار را ارائه می کنید؟ برای چه کسانی ارائه می کنید؟
۱۲. با توجه به نتایج به دست آمده، آیا می توانید سوالات دیگری را نیز بررسی کنید، به نظر شما در مرحله گردآوری داده، به کدام یک از سوالات فوق باید پاسخ داده شود؟



## کار در کلاس

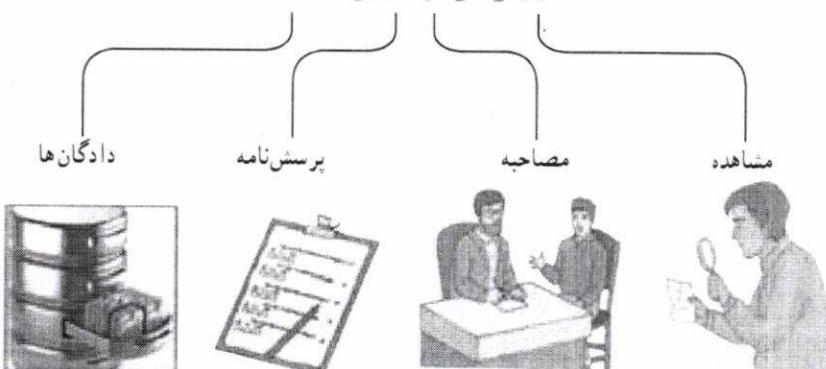
نیزه  
نیزه



پرسش از نقداری از داشت آموزا

۱. چه راه دیگری برای آمارگیری طول قد دانش آموزان یک مدرسه پیشنهاد می کنید؟
  ۲. فرض کنید زمان لازم را برای گردآوری تمامی داده های دانش آموزان در اختیار نداشته باشد. اگر بخواهیم نمونه ای را انتخاب و آمارگیری کنیم، چه راهی پیشنهاد می کنید که نمونه به صورت تصادفی انتخاب شود؟
- از هر ۵۰۰ چند دوی از مردم به طور لفتمانی انتخاب می کنیم.**

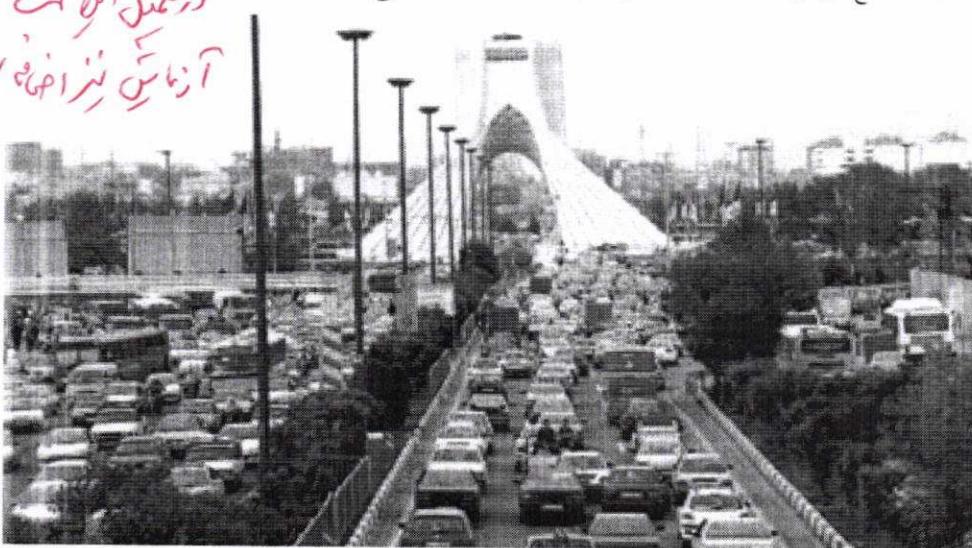
### روش های گردآوری داده ها



دستور

پرسخ

۱. **مشاهده**: گردآوری داده ها بدون نیاز به فرد پاسخ گو، مانند شمارش تعداد وسایل نقلیه عبوری از یک تقاطع در هر ساعت یا اندازه گیری وزن محصولات یک باعث میوه.



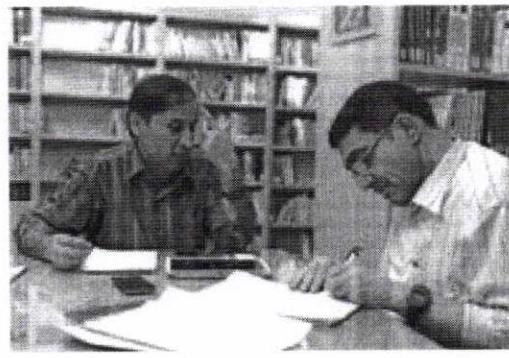
**۲. پرسش‌نامه:** مجموعه سوالات از پیش تعیین شده که توسط تعدادی پاسخ‌دهنده تکمیل می‌شود. این روش مرسوم‌ترین ابزار گرفتن اطلاعات از مردم است. مرکز آمار ایران هر ۱۰ سال یکبار با استفاده از پرسش‌نامه اطلاعات تمامی خانوارهای ساکن در ایران را جمع‌آوری می‌کند. به این فرایند، سرشماری نفوس و مسکن می‌گوییم.



### شعارهای برتر سال جهانی آمار



آمار، تصویر دیروز،  
آینه امروز، دورنمای فردا  
\*\*\*  
آمار، سنجش گذشته؛  
شناخت حال؛  
درگ آینده



**۳. دادگانها:** معمولاً بین دو نفر صورت می‌گیرد، یکی مصاحبه‌گر (همان آمارگیر) و دیگری مصاحبه‌شونده یا پاسخ‌گو است. مثلاً اگر بخواهیم درباره مسائل فرهنگی کاهش شد آمد (ترافیک) پژوهش کنیم، مصاحبه از صاحب نظران راه حل مناسبی برای گردآوری داده‌های است. این روش بیشتر زمانی استفاده می‌شود که آمارگیر اطلاع کافی از تمامی پاسخ‌های ممکن را ندارد.

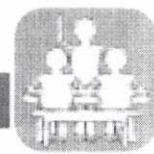
**۴. داده‌ها:** شامل مجموعه‌ای از اطلاعات ذخیره شده‌اند. در بسیاری از موارد، داده‌های توکان از اطلاعاتی که قبلاً ذخیره شده‌اند، به دست آورد. اگر قرار است تحقیقی در مورد نمره‌های دروس ریاضی استان‌ها انجام شود، اطلاعات نباید اداره کل آموزش و پرورش راه‌گشا خواهد بود. از سوی دیگر به دلیل تولید داده‌ها به صورت خودکار، در بسیاری از مؤسسات و سامانه‌ها، استفاده از این روش برای گردآوری داده‌ها بسرعت رواج یافته است.

### تمرین

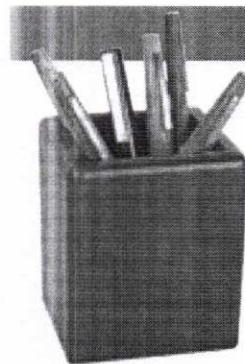


کدام روش جمع‌آوری داده‌ها برای موارد زیر مناسب است؟ یک دلیل برای انتخاب خود ذکر کنید.

۱. میزان رضایت مشتریان بانک از نحوه برخورد و رسیدگی به درخواست‌های آنها.
  ۲. سن همه دانش‌آموزان مدرسه بر حسب ماه در پایه دهم.
  ۳. تعداد سرنشیان خودروهای سواری در یکی از محورهای خروجی شهر.
- مساجده**



## کار در کلاس



مصاحبه  
ماهده

الف) کدام روش برای جمع‌آوری هر یک از داده‌ها مناسب است؟

۱. تعداد قلم‌های هر داش آموز در یک کلاس.

۲. ساعات خواب داش آموزان کلاس درس شما در شب گذشته.

۳. طول قد داش آموزان یک کلاس.

ماهده

ب) می‌خواهیم طول قد داش آموزان یک کلاس یا مدرسه را به یکی از سه روش زیر آمارگیری کنیم.  
هر یک از این روش‌ها محدودیت‌هایی دارند. چگونه می‌توان این محدودیت‌ها را از بین برداشت؟

نموده برداری کنیم.

پرسش‌نامه: اگر تعداد واحدهای نمونه زیاد باشد، این روش زمانبر است.

مشاهده: اگر بدقت زیادی نیاز داریم، مناسب نیست.

دادگان‌ها: همیشه اطلاعات بستی را در اختیار آمارگیر قرار نمی‌دهند.

پرسش‌نامه: **عنوان‌گیری** ماهده: **از از مرز از وسائل فنی دادهان** ها: **نوجین مباحث اطلاع**

آمارگیری را می‌توان به روش‌های بسیار سریع‌تر یا کم‌هزینه‌تر مانند آمارگیری پستی، تلفنی، اینترنتی یا پایامکی انجام داد. همچنین می‌توان با ایزاری نظیر گوگل فرم یک پرسش‌نامه طراحی کرد، و آن را به شانسی نمونه انتخابی ارسال کرد و نتایج را از گوگل فرم بازیابی کنیم.

## خواهانی

### فعالیت

قرار است درباره افرادی که از کوه دنا بالا رفته‌اند، پژوهشی آماری انجام دهیم. واحدهای آماری این پژوهش، همه افرادی هستند که توانسته‌اند به قله برسند. هدف از این پژوهش می‌تواند فرهنگی یا علمی باشد. بسته به نوع پژوهش، یک یا چند ویژگی این افراد (مانند طول قد یا جنسیت) مورد نیاز است. به هر یک از این ویژگی‌ها که مورد پژوهش قرار می‌گیرد متغیر می‌گویند. سایر متغیرها می‌توانند مواردی مانند: سن، وزن، ملت، میزان تحصیلات و درآمد باشند. متغیرهای مورد بررسی در یک پژوهش ممکن است کمی یا کیفی باشند.

**متغیر**: هر ویژگی از اشخاص یا اشیا که قرار است بررسی شود.

**متغیر کمی**: متغیرهایی هستند که مقادیر عددی می‌گیرند و برای آنها عملیات ریاضی از قبیل جمع، نفریق و معدّل‌گیری قابل انجام است.

**متغیر کیفی**: متغیرهایی هستند که صرفاً برای دسته‌بندی افراد یا اشیا در گروه‌ها به کار می‌روند و لزوماً مقدار عددی نمی‌گیرند.

در مثال کوهنوردان دنا، سن، وزن، قد و درآمد یک کوهنورد متغیرهای کمی هستند. متغیرهای کیفی معمولاً از نوع مشاهدات غیر عددی اند و در مثال کوهنوردان دنا، جنسیت و ملت را در بر می‌گیرند. به عنوان مثال جنسیت برای دسته‌بندی افراد به مرد و زن استفاده می‌شود.

**پارامتر**: یک مشخصه عددی است که توصیف کننده جنبه‌ای خاص از جامعه است و در صورتی که داده‌های کل جامعه در اختیار باشند قابل محاسبه است. مثلاً اگر داده‌های مربوط به تک تک کوهنوردان را داشته باشیم، یعنی به داده‌های جامعه دسترسی داریم. نسبت مردان در کل جامعه کوهنوردان، معرف یک پارامتر است.

اگر داده‌های بعضی از کوهنوردان را داشته باشیم؛ یعنی داده‌های نمونه را در اختیار داریم. نسبت مردان کوهنورد به این داده‌های نمونه‌ای را، آماره (مقدار آماره) گویند. آماره‌ها از یک نمونه به نمونه دیگر تغییر می‌کنند؛ این در حالی است که پارامترهای جامعه همیشه ثابت‌اند، چرا؟ **چون جامعه تغییر می‌کند.**

در بسیاری از موارد، آمارگیری از کل جامعه امکان پذیر نیست. بنابراین علی‌رغم اینکه پارامتر دارای مقدار ثابتی است، این مقدار مجھول است و به همین دلیل از آماره‌ها برای تخمین پارامترها استفاده می‌کنند.

**نموده**: مشخصه‌ای عددی که توصیف کننده جنبه‌ای خاص از نمونه است و از داده‌های نمونه به دست می‌آید.

مثال: اداره کشاورزی استان خوزستان در حال ارزیابی هندوانه‌های آماده برداشت است. در این بررسی، هندوانه‌ها همان واحدهای آماری هستند. اگر پژوهشگران وزن هندوانه‌ها را مورد بررسی قرار دهند، متغیر، «وزن» آنهاست. وزن یک متغیر کمی است، زیرا با مقادیر عددی ارائه می‌شود. اگر وزن تک تک هندوانه‌های این زمین بررسی شود، **مرشماری** از جامعه انجام داده‌ایم (که امکان پذیر نیست). متوسط وزن تمامی هندوانه‌های قابل برداشت در این زمین، «پارامتر» است.

حال فرض کنیم پژوهشگران تصمیم دارند بر اساس معیار «مزه» هندوانه‌ها را مورد بررسی قرار دهند. در این حالت مزه هندوانه‌هارا می‌توان به سه دسته تقسیم کرد: بد، قابل قبول و خوب. حال که می‌خواهیم مزه هندوانه‌هارا امتحان کنیم، مطالعه به بخشی از کل هندوانه‌ها محدود می‌شود. در اینجا متغیر «مزه» متغیری کافی است. از آنجا که نمی‌توانیم تمام هندوانه‌ها را مزه کنیم، تنها بخشی از هندوانه‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرند؛ پس باید «نمونه» بگیریم. نسبت هندوانه‌های با مزه «خوب» در نمونه، یک «آماره» است.

## کار در کلاس



یک شبکه تلویزیونی می‌خواهد نسبت دارندگان تلویزیون در شیراز را، که برنامه جدید این شبکه را حداقل یک بار در هفته تماشا می‌کنند، بداند. بدین منظور یک گروه ۱۰۰۰ نفری از دارندگان تلویزیون را در این شهر بررسی می‌کند.

الف) داده‌ها و متغیرهایی را که بررسی می‌شوند، مشخص کنید.

جواب: داده‌ها اطلاعات گروه ۱۰۰۰ نفری دارندگان تلویزیون در شیرازند، و متغیر، تماشای تلویزیون است که پاسخ آن «تماشا می‌کند» یا «تماشا نمی‌کند» افراد مورد بررسی است.

ب) آیا این داده‌ها یک نمونه‌اند؟ جامعه آماری کدام است؟ **بله - جامعه کل ساخته شیراز هستند.**  
پ) متغیر کمی است یا کیفی؟ **کیفی**

ت) چند متغیر کمی را که ممکن است در اینجا جالب باشد، مشخص کنید.

جواب: سن، درآمد، **و زیستگاه**

ث) نسبت افرادی در نمونه که برنامه جدید را تماشا می‌کنند، آماره است یا پارامتر؟ (تعداد اعضای موردنظر تقسیم بر تعداد کل اعضای یک مجموعه را نسبت می‌گوییم.) **آماره**

## متباش‌های اندازه‌گیری

داده‌هارا به دو گروه کمی و کیفی تقسیم کردیم. ازنگاهی دیگر، می‌توان متغیرهای داده‌هارا در چهار مقیاس اندازه‌گیری دسته‌بندی کرد. اندازه‌گیری در تعریف به معنی ایجاد تفکیک بین افراد یا اشیا است. دونوزاد دوقلو را نام‌گذاری می‌کنیم تا آنها را تفکیک کنیم، در واقع اندازه‌گیری کرده‌ایم. بسته به دقیقی که این اندازه‌گیری صورت می‌گیرد آنرا به چهار مقیاس اسما، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبتی تقسیم می‌کنیم. هدف بررسی این مقیاس‌ها بیان‌گر نوع محاسبه‌ای است که برای این داده‌ها مناسب است: نظریه: ترتیب، محاسبه اختلاف و نسبت گرفتن.

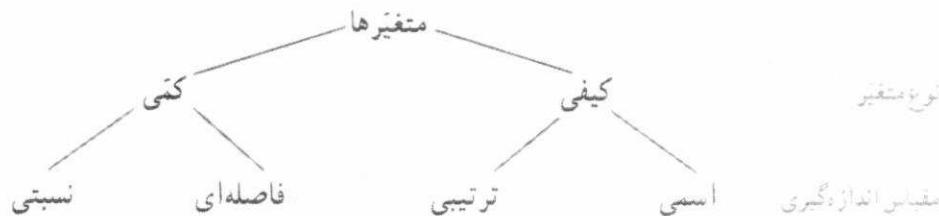
نسبتی: این مقیاس برای داده‌هایی است که قابل مرتب کردن هستند، اختلاف بین مقادیر داده‌ها، و نسبت مقادیر داده‌ها نیز یافتنا است. اغلب متغیرهای فیزیکی مانند نمره، وزن و قد داشت آموزان و متغیرهایی که با واژه تعداد شروع می‌شوند در این مقیاس اندازه‌گیری می‌شوند. در این مقیاس صفر به معنی نبود و بیزگی در فرد یافته است.

فاصله‌ای: این مقیاس به دلیل استفاده از لوازم یا قواعد دقیق اندازه‌گیری و بیزگی افراد یا اشیا بدقت اندازه‌گیری می‌شود. به بیان دیگر مقیاس فاصله‌ای برای داده‌هایی است که قابل مرتب کردن هستند و همچنین، اختلاف بین مقادیر داده‌ها با معناست. مانند درجه حرارت در شهرهای مختلف بر حسب سلسیوس. مقادیری که به دو نفر یادو شیء داده می‌شود صرفاً یانگ فاصله بین آنهاست. درنتیجه صفر در این مقیاس قراردادی است. مثلاً اگر دمای بوشهر  $20^{\circ}$  و تهران  $10^{\circ}$  درجه سلسیوس باشد نمی‌توان گفت دمای تهران دو برابر بوشهر است ولی اختلاف دما  $10^{\circ}$  می‌باشد.

ترتیبی: این مقیاس با استفاده از الفاظ، ضمن ایجاد تفکیک بین افراد و اشیا، ارجحیت نیز قائل می‌شود. مقیاس ترتیبی برای متغیرهایی است که قابل مرتب کردن هستند؛ در عین حال و همچنین، اختلاف بین مقادیر داده‌ها با معناست. مانند درجه حرارت در شهرهای مختلف بر حسب امکان پذیر نیست و یا بی معناست، مانند رتبه داشت آموزان در یک کلاس. اگر رتبه‌های اول تاسوم معدل  $16, 18, 19$  کسب کرده باشند رتبه  $1, 2, 3$  می‌دهیم و توجه نمی‌کنیم که اختلاف نمرات آنها چقدر است.

اسما: این مقیاس برای متغیرهایی است که شامل نام‌ها، بر جسب‌ها و گروه‌ها می‌شود در اینجا همچو معیاری که با آن بتوان داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کرد وجود ندارد. مانند گروه خونی انسان‌ها و سماره داشت آموزی. کدهای عددی در این مقیاس به واقع عدد نیست بلکه صرفاً برای گروه‌بندی به کار می‌رود.

اگر فقط یک متغیر از داده‌ها اندازه‌گیری شده باشد، به جای ذکر «مقیاس متغیر» از واژه «مقیاس داده‌ها» استفاده می‌کنند.



شعارهای برتر  
سال جهانی آمار

بهرین بر نامه ریزی  
مستلزم بهرین آمار  
\*\*\*  
با آمار بهرین بهمیم.  
بهرن تصمیم بگیری

کار در کلاس



نوع متغیر داده‌های زیر را مشخص کنید:

العنوان

(ب) در یک دیبرستان ۳۱۹ دانشآموز فارغالتحصیل وجود دارد. احمد رتبه بیست و پنجم، رضارتیه نوزدهم، صادق رتبه دهم و جواد رتبه چهارم را کسب کرده است و می‌دانیم که رتبه یک، بالاترین است.

(پ) دمای بدن ماهی‌های قزلآلای رودخانه هراز (بر حسب درجه سلسیوس)

(ت) طول ماهی‌های قزلآلای در رودخانه هراز

تمرين



داده‌های زیر مربوط به یک نماینده مجلس است. در هریک از سوالات زیر نوع داده‌ها را مشخص کنید.

الف) نام نماینده حسین ایرانی است.

ب) این نماینده ۵۸ سال سن دارد.

پ) سال‌هایی که این نماینده در مجلس انتخاب شده است، ۱۳۸۶، ۱۳۹۰ و ۱۳۹۴ است.

ت) مجموع حقوق این نماینده در سال گذشته ۶۰۰،۰۰۰،۰۰۰ ریال بوده است.

ث) این نماینده در حال بررسی لایحه پیشنهادی حفاظت از منابع آبی کشور است. کزینه‌های موردنظر حفاظت کاملاً بجهاتی طرفین مخالف و کاملاً مخالف است.

ج) وضعیت تأهل این نماینده: متاهل **بسم کعب**

ج) می‌گویند این نماینده در رأی‌گیری لایحه مرتبط با آموزش عمومی، هفتمین نفری است که از آن

لیف تھی

## ۱۰۰ آمار چیست؟

علوم تجربی نظری کشاورزی و پزشکی نیازهای اساسی بشر را رفع می‌کنند. در این علوم یقین کامل برای حل مسئله وجود ندارد، بسیار کاربردی‌اند و مورد استفاده قرار می‌گیرد. یک پژوهش معمولاً به صورت دقیق بیماری را تشخیص نمی‌دهد و داروی بیماری نیز به همین وضع دچار است. ولی پژوهش بر اساس تجربه حکم به بیماری می‌دهد و دارو تجویز می‌کند و در اکثر مواقع نیز نتیجه می‌گیرد. از سوی دیگر در علوم ریاضی روابط به صورت صد درصد حاکم هستند و هیچ شک و شباهی به آن راه ندارد.

وجود رابطه بین برخی پدیده‌ها در علوم تجربی باعث کشف حقایقی است که موجب پیشرفت آنها می‌شود. معمولاً روابط حاکم بر علوم تجربی را نمی‌توان به صورت ریاضی بیان کرد. علم آمار راهی برای بیان ریاضی چنین پدیده‌هایی است.

### فعالیت



به نظر شما یک شهروند در زندگی روزمره خود از اطلاعات بیان شده در دو مثال زیر، چه استفاده‌ای می‌کند؟ این اطلاعات در رسانه‌ها منتشر شده‌اند.  
جنت آغاز لichem رزمند h تحقیق کرده است.

### سلامت

- بیشترین آسیب‌دیدگی در منازل، افتادن یا زمین خوردن است.
- پنج درصد افراد به واکسن آنفولانزا واکنش شدید نشان می‌دهند.
- افراد سیگاری دو برابر دیگران در معرض سرطان قرار دارند.
- مصرف روزانه ۵ نوع میوه و سبزی بیشتر ویتامین‌های موردنیاز بدن را تأمین می‌کند.

### حمل و نقل

- اولین دلیل تماس با امداد خودرو فراموش کردن کلید داخل خودرو است.
- بیشتر راننده‌های مرد و زن یک کشوار خارجی، در پشت چراغ قرمز به ترتیب با یعنی خود کلنجر می‌روند و در آینه نگاه می‌کنند.
- رانند بین خطوط راهنمایی در اتوبان‌ها باعث کاهش ۳۰ درصدی شدآمد می‌شود.

چگونه این اطلاعات را به دست آورده‌اند? آیا تعریف دقیق کلمات پررنگ شده را حدس می‌زنید؟ جامعه، و پارامتر یا نمونه و آماره را در هریک از مثال‌ها مشخص کنید.

تصمیم‌گیری یکی از مهم‌ترین جنبه‌های زندگی ماست. ما بر اساس اطلاعاتمان و ارزش‌هایمان تصمیم‌گیری می‌کنیم. روش‌های آماری برای بررسی این اطلاعات به ما کمک می‌کنند. بعلاوه، آمار در شرایطی که با عدم

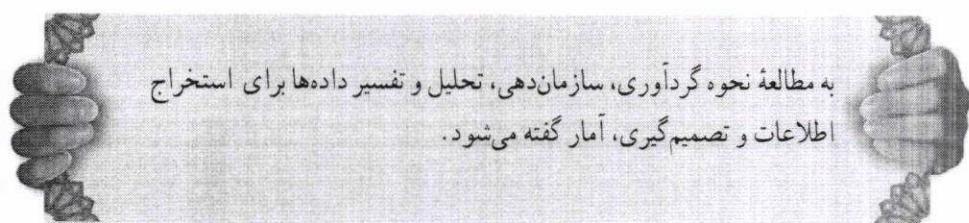
قطعيت در تصميم گيري روبيم، هم به ياري ما مي آيد. چگونه به اطلاعات گزارش شده در فعالیت قبل دست یافته‌اند؟ به عنوان مثال، اگر در صدد برآورد نسبت افرادی هستیم که به واکسن آنفلوآنزا واکنش شدید شسان می‌دهند، بدون تزريق بر روی همه افرادی که مابيل به انجام آن هستند، آمار روش‌های مناسبی را پيش روپيان می‌گذارند. روش‌های آماری مارا قادر می‌سازند تا با نگاه کردن به اطلاعات به دست آمده از مجموعه کوچکی از افراد یا اقلام، برای گروه‌های بزرگ‌تری از اين افراد یا اقلام تصميم گيري کنيم. شيوه تحليل داده‌ها، در كنار قواعد استنباطي، موضوعات اصلی مطالعات آماری را تشکيل مي‌دهند.

## شعارهای برتر سال جهانی آمار



آمار، جهتنمای  
توسعه پایدار  
\*\*\*  
آمار، راهنمای ما  
در تصميم گيري  
و برنامه‌بزي صحیح

به مطالعه نحوه گردآوری، سازماندهی، تحلیل و تفسیر داده‌ها برای استخراج  
اطلاعات و تصميم گيري، آمار گفته می‌شود.



گفتنی است که روش‌های آماری به تنهایی نمی‌توانند معجزه کنند؛ اين روش‌ها می‌توانند به ما کمک کنند تا تصميم‌هایي بگيريم؛ اما نه هر تصميمي. به ياد داشته باشيد که حتی يك روش آماري مناسب، نمی‌تواند دقیق تر با صحیح‌تر از داده‌ها و حقایق اصلی باشد. در نهایت، نتایج آماری باید توسط فردی که نه تنها روش‌ها، بلکه موضوع مورد بحث را کامل درک کرده باشد، تفسیر شود.

## تمرین



۱. فرق بین داده و متغیر چیست؟ **متغیر** : هر وریزی از اشخط من یا اینها را متغیر می‌نماید.
۲. داده‌های در سطح اسمی، کمی هستند یا کیفی؟ **کیفی**
۳. فرق بین آماره و پارامتر چیست؟ **هر سقفه‌ی عددی در مورد چیزی را پارامتر و هر شخصه‌ی محدود را مور عوشه نامه آماره می‌نماید.**
۴. در يك جامعه آماری، آيا ممکن است که يك پارامتر تغيير کند؟ اگر سه نمونه با اندازه یک يكسان از يك جامعه داشته باشيم، آيا می‌توان سه مقدار متفاوت از يك آماره به دست آورد؟ **پارامترها به اند اما آماره های تغییر کنند** و بله
۵. در يك مطالعه از ۱۲۶۱ مشتری غذاخوری‌های گیاهخوار، سؤال شده است که برای کدام وعده غذایی (ناهار یا شام) غذا سفارش داده‌اند؟

**الف) متغیر را مشخص کنید.** **بعضی نهار و شب**

**ب) این متغیر کمی است یا کیفی؟** **کیفی**

**پ) جامعه آماری در اینجا چیست؟** **كل مشتری غذاخوری گیاهخوار**

## کن کر

۶. موضعات زیر مرتبط است. متغیرهای آنها را در چهار مقیاس: اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبتی دسته‌بندی کنید.

الف) مدت زمان پاسخ‌گویی به سوالات یک امتحان

ب) زمان اولین کلاس

پ) رشته تحصیلی

ت) مقیاس ارزیابی تحصیلی: ضعیف، معمولی و خوب

ث) نمره آخرین آزمون (از ۱۰۰ امتیاز)

ج) سن داشت آموز

## لقمان و مرد پیاده

## خواهد

روزی لقمان در کنار چشمه‌ای شسته بود. مردی که از آنجا

می‌گذشت از لقمان پرسید: چند ساعت دیگر به ده بعدی خواهم رسید.

لقمان گفت: راه برو، آن مرد پنداشت که لقمان نشینده است. دوباره سوال کرد: مگر نشینیدی؟

بررسیدم: چند ساعت دیگر به ده بعدی خواهم رسید؟ لقمان گفت: راه برو، آن مرد پنداشت که لقمان

دیوانه است. برای همین راه خود را گرفت و رفت. زمانی که چند قدمی راه رفت، لقمان به بانگ بلند

گفت: ای مرد، یک ساعت دیگر بدان ده خواهی رسید. مرد گفت: چرا اول نگفتنی؟ لقمان گفت:

چون راه رفتن تو را ندیده بودم، نمی‌دانستم تند می‌رومی یا کند. حالا که دیدم داشتم که تو یک ساعت

دیگر به ده خواهی رسید. در این داستان ساده و قدیمی تمام اصول آماری رعایت شده است. چرا؟

نکته ظریف این داستان این است که لقمان فقط می‌گوید، راه برو و توضیح دیگری نمی‌دهد. لقمان

نمی‌گوید که می‌خواهم راه رفتن تو را ببینم تا از روی آن بگویم چه مدت طول می‌کشد تا به ده برسی،

زیرا لقمان فکر می‌کند این اطلاع معکن است در راه رفتن آن مرد اثر بگذارد و در نتیجه سرعتی که

لقمان تخمین می‌زند، سرعت واقعی راه رفتن آن فرد نباشد و در نتیجه زمانی را که تخمین خواهد زد،

مدت زمان دقیقی نباشد.

# درس ۲

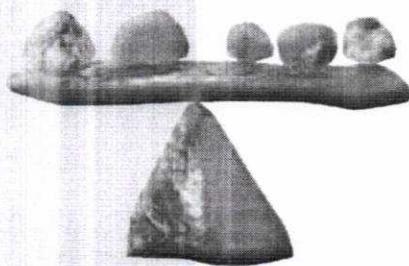
## معیارهای گرایش به مرکز

فعالیت

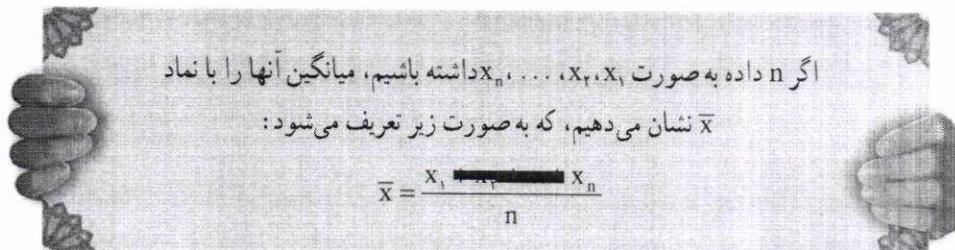


اموال خیرین مدرسه چقدر به مدرسه کمک می‌کنند؟ مدیر مدرسه بر اساس اطلاعات سال‌های گذشته خود می‌گوید: معمولاً خیرین، به طور متوسط، ۱۰ درصد درآمد سالانه خود را به این امر اختصاص می‌دهند. فرض کنید درآمد ماهیانه حضار در انجمن خیریه این دیبرستان در سال جاری به ترتیب حروف الفبا به صورت زیر باشد:

آرمان	احمد	جوانه	حسنا	رسول	سبحان	نجمیه	درآمد (میلیون ریال)
۲۵	۲۲	۲۰	۲۲	۲۸	۱۲	۴۰	



س برای پاسخ به سؤال طرح شده باید میانگین این اعداد را محاسبه کنیم. میانگین همان جزی است که ما به آن معدل می‌گوییم. برای محاسبه آن شما تمامی درآمدها را باهم جمع و بر تعداد افراد حاضر تقسیم می‌کنید. اگر تمامی درآمدها را باهم جمع کنید (۱۸۹)، و بر تعداد افراد تقسیم کنید (۷)، به عدد میانگین ۲۷ میلیون ریال در ماه می‌رسید. در نتیجه ۱۰ درصد درآمد سالانه برابر است با  $\frac{۳۲}{۴}$  است.



## کار در کلاس



$$\bar{x} = \frac{10+20+30+40+50}{5} =$$

۱. میانگین داده‌های  $5, 5, 20, 30, 40, 10$  چقدر است؟
۲. اگر میانگین داده‌های  $10, x, 40$  برابر  $30$  شود مقدار  $x$  چقدر است؟
۳. میانگین اعداد  $1, 2, 3, 4, 5$  چقدر است؟
۴. میانگین اعداد  $20, 4, 6, 8, 5$  چقدر است؟
۵. میانگین اعداد  $5, 6, 7, 8, 9$  چقدر است؟
۶. میانگین اعداد  $90, 80, 70, 60, 50$  چقدر است؟
۷. آیا می‌توانید چند قاعدة کلی از تمرین‌های قبل درباره خواص میانگین ذکر کنید.

*میانگین  
مجموع داده ها  
÷ تعداد داده ها  
= میانگین*

حال اگر یک میلیارد را درآمد ماهیانه یک میلیارد ریال به انجمان خیریه دیبرستان ماییاد، میانگین درآمد حضار چه تغییری می‌کند؟ (بیشتر مردم به او ثروتمند می‌گویند. آمارشناسان او را دورافتاده می‌نامند). درآمد او میانگین را تا حدود  $148$  میلیون ریال در ماه بالا می‌آورد (دقیقاً  $\frac{148}{625}$ ) و بر اساس شیوه تخمین گذشته، خیرین معادل  $178$  میلیون ریال (دقیقاً  $\frac{178}{35}$ ) را به دیبرستان کمک خواهند کرد! که غیرواقعی به نظر می‌رسد یا امکان محقق شدن آن ضعیف است.

**دورافتاده:** مقداری متفاوت با سایر مقادیر داده‌هاست. معمولاً مقدار آن بسیار بزرگ‌تر یا بسیار کوچک‌تر از بقیه داده‌هاست.

## میانه

در مثال خیریه، داده دورافتاده باعث اشتباه ما در تخمین متوسط داده‌هاشد. میانگین مرسوم‌ترین معیار گراش به مرکز است که گاهی ممکن است مارا به اشتباه بیندازد، ولی می‌توان از معیار دیگری نیز برای بیان متوسط درآمد استفاده کرد. برای این منظور از میانه که داده وسطی داده‌های مرتب شده است، می‌توان استفاده کرد.

بس از مرتب کردن داده‌ها، داده‌ای که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است، میانه است. اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانه برابر میانگین دو داده وسطی مرتب شده است.

برای محاسبه میانه داده‌ها، قبل از ورود میلیارد، داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کیم. وسط عدد چهارمین عدد است، پس میانه داده‌ها عدد  $28$  است که با میانگین داده‌ها تفاوت زیادی ندارد.

درآمد مرتب شده	ردیف
۱۲	۱
۲۲	۲
۲۵	۳
۲۸	۴
۳۰	۵
۳۲	۶
۴۰	۷

حال فرض کنید میلیارد در خیریه حضور دارد. میانه برای  $8$  عدد وجود ندارد یا به عبارتی  $8$  عدد، عدد وسط ندارند. پس بین داده چهارم و پنجم میانگین می‌گیریم. جایگاه چهارم درآمد  $28$  و جایگاه پنجم آن  $30$  و در نتیجه میانه جدید درآمد  $29$  است.

مد، داده‌ای است که بیشترین فراوانی را دارد.  
فروشنده‌گان بوشак از معیار گراش به مرکز مد بسیار استفاده می‌کنند. آنها با آمارگیری‌های خود در می‌بانند که چه نوع بوشاكی مورد سند مصرف کنندگان است.  
از همان بوشاك برای فروش سفارش می‌دهند.

در رأی گیری‌ها، اساس تصمیم‌گیری مد است، جون موضوعی که بیشترین فراوانی را داشته باشد، انتخاب می‌شود. در انتخاب رئیس جمهور، نامزدی انتخاب می‌شود که بیشترین فراوانی (رأی) را داشته باشد.  
برای محاسبه مد فقط کافی است فراوانی داده‌ها را با هم مقایسه کنیم و داده با بیشترین فراوانی مد است. مد ممکن است منحصر به فرد نباشد.

بیشتر افراد معتقدند که عدد ۲۹ میلیون ریال گویای مقدار صحیح متوسط درآمد افراد است و عدد ۱۴۸ میلیون ریال کاملاً بی ربط است. پس ما به یک نتیجه می‌رسیم: اگر در داده‌هایمان، دورافتاده وجود داشت - دقیقاً مانند زمانی که یک میلیارد **هوس** کار خبر می‌کند - باید از میانه استفاده کنیم.

لکن  
داده نهاده را بجای  
هوس کار خبر می‌کند.

برصغب کار

تمرین

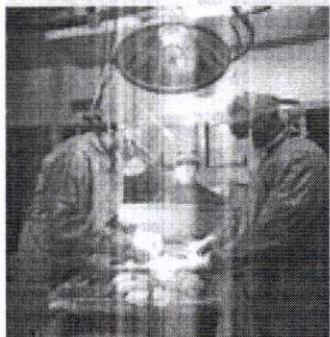


اینها داده‌ها را برای من می‌کنند.

۱. میانه داده‌های ۹۹,۱, ۱۴,۸۶, ۲,۶۸, ۹۹, ۱۰, ۱۴,۸۶, ۲,۶۸, ۹۹, ۱۱ چقدر است؟
۲. میانه داده‌های ۹۹,۱, ۱۴,۸۶, ۲,۶۸, ۹۹, ۱۰, ۱۴,۸۶, ۲,۶۸, ۹۹, ۱۱ چقدر است؟

**نکته اصلی در اینجاست:** اگر در آمار در جایی به یک نتیجه شسته و رفته برخوردید، خیلی احتیاط کنید. به دست آوردن «یک استنباط درست از داده‌ها تنها چیزی نیست که شما در یک بررسی آماری خواهان آن هستید: خواسته دیگر ما برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری است».

تصور کنید که به جای انجمن خیریه با یک بیمارستان سر و کار داریم و داده‌ها به جای مبالغ درآمد، هزینه‌های جراحی هستند. فرض کنید به جای میلیارد، با یک بیمار روبه‌رویم که گرفتار بعضی از مشکلات بعد از عمل است و مجموع هزینه‌هایش بالغ بر ۲۵۰ میلیون ریال است.



بیمار	هزینه‌های جراحی میلیون ریال	هزینه‌های جراحی مرتب شده
الف	۲	۱
ب	۵	۲
ب	۴۵	۳
ت	۷	۴
ت	۳۵	۵
ت	۳۰	۶
ج	۵۰	۷
ج	۲۵۰	۸

هزینه‌های که بگزید.



میانگین هزینه‌های جراحی این بیمارستان برابر ۵۳ میلیون ریال و میانه آن برابر ۲۲/۵ میلیون ریال است. اگر شما مدیر این بیمارستان بودید، کدام عدد برایتان از همه مهم تر بود؟ عدد ۲۲/۵ میلیون نشان دهنده هزینه‌های معمول نگهداری یک بیمار است، اگر بخواهیم بودجه سال بعد را با فرض این عدد بنویسیم، به احتمال زیاد با کسر بودجه مواجه می‌شویم. با قدری تفکر به میانگین و میانه، دلیل اینکه افراد از بیمه اجتماعی استفاده می‌کنند، روش می‌شود؛ (میانه هزینه‌های سالیانه درمان معمولاً بسیار کمتر از حق بیمه برداختی است، اما با نگاه به میانگین سالانه هزینه‌ها، حساب می‌کنم که معامله خوبی کرده‌ام) و من همیشه کمرنگ اینمی را می‌بندم، اگرچه میانه تعداد زخمی‌ها در هر سفر با خودرو صفر باشد. این نتیجه را نیز به یاد داشته باشید: گاهی هیچ آمار درست یا غلطی وجود ندارد، و همه چیز به اینکه شما چرا می‌خواهید از آنها استفاده کنید، مستقیمی دارد.

## کار در کلاس

- با سه واژه: داده دورافتاده، میانه، و میانگین، ۵ جمله زیر را کامل کنید.
۱. آنچه اکثر مردم «حد وسط» می‌نامند، نزد آمارشناسان به **میانبر** معروف است. برای محاسبه **میانبر**... به داده‌های خود به عنوان فهرستی از اعداد نگاه کنید؛ همه اعداد را باهم جمع کنید و بر تعدادشان تقسیم کنید.
  ۲. **میان** در واقع نقطه وسطی فهرست اعداد مرتباً شده است. نیمی از اعداد مقادیر بالاتر از **میان**... و نیمی دیگر مقادیر پایین‌تر از **میان**... قرار دارند.
  ۳. زمانی با **داده روبرو** **میان** مواجه هستیم که مشاهده‌ای داشته باشیم که از الگوی داده‌هایمان پیروی نکند.
  ۴. وقتی با **داده دوم**... مواجه هستیم، **میان**... معمولاً بازتاب بهتری از داده‌ها می‌دهد تا **میانبر**...
  ۵. به طور کلی، برای برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری، **میانبر**... **میان**... بهتر از ... است.

**میانگین موزون:**  
شما قطعاً شنیده‌اید که برخی از نمرات شما ضرب دارند. مثلاً اگر چهار بار از سه‌مازامون گرفته باشند، نمره آخرین آزمون را ممکن است در ۳ ضرب کنند، یعنی به آن ضرب ۳ بدهند. پس اگر نمرات شما به صورت زیر باشند:

از مون اول	دوم	سوم	چهارم
۱۷	۱۸	۱۵	۱۶

نمره‌ای که برای این درس در کارنامه شما خواهد آمد میانگین ۶ عدد است یعنی نمره درس مذکور عبارت است از:

$$16+15+18+17+17=82$$

میانگین نمره‌ها بدون احتساب ضرب ۱۶/۵

می‌شود.

از میانگین موزون برای معدل دروسی که با واحدهای مختلف (تعداد ساعات متفاوت) در طول سال تحصیلی ارائه می‌شود نیز استفاده می‌شود.

شخصی دست راست خود را در یخچال و دست چپ خود را در فر کرده است. زمانی که از او درباره احساسش سؤال می‌شود پاسخ می‌دهد: «به طور متوسط خوب هستم». نتیجه اخلاقی این لطیفه این است که یک عدد بهنهایی، معمولاً مجموعه‌ای از داده‌ها را به خوبی توصیف نمی‌کند. بنابراین، اندیشه خوبی است که علاوه بر معیار گرایش به مرکز معیاری را نیز گزارش دهیم که نوسان و تغییر داده‌ها را هم بیان کند.

## خط اندیشه

# درس ۳

## معیارهای پراکندگی

فعالیت



می خواهیم کلاس های دهم سه دبیرستان را بر اساس نتایج آزمون جامعی که همزمان بین دانش آموزان ممتاز برگزار شده است، رتبه بندی کنیم. از هر دبیرستان ۱۰ نفر به تصادف انتخاب شده اند. نمرات آزمون جامع هر سه کلاس از ۱۲۰ نمره است.

داده های مربوط به سه کلاس دهم:

(الف)  $\{65, 75, 73, 50, 60, 64, 69, 62, 67, 85\}$

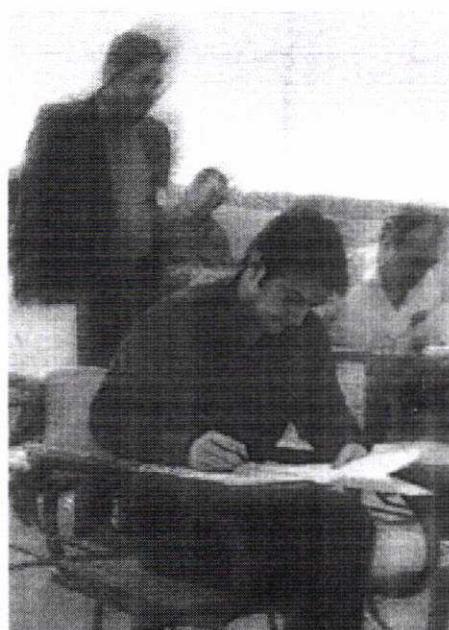
$$\bar{x} = 67$$

(ب)  $\{85, 79, 57, 39, 45, 71, 67, 87, 91, 49\}$

$$\bar{x} = 67$$

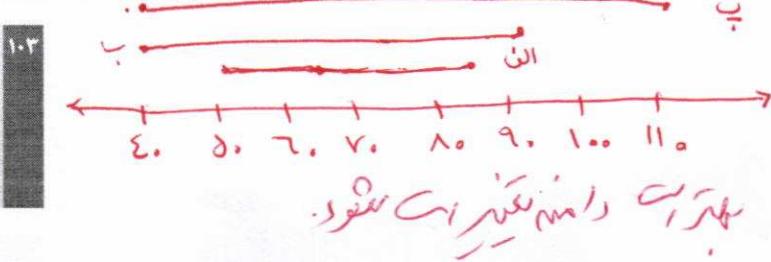
(پ)  $\{42, 51, 53, 110, 50, 48, 87, 69, 68, 91\}$

$$\bar{x} = 67$$



میانگین سه کلاس را محاسبه کنید. به نظر نماید  
برآکندگی نمرات در کدام کلاس بیشترین  $\frac{\text{اند}}{\text{اند}}$  و در کدام کلاس کمترین است؟ برای پاسخ به این سؤال، داده ها را روی سه محور موازی نمایش دهید. کدام دبیرستان نتایج بهتری با اطلاعات داده شده کسب کرده است؟  $\frac{\text{اند}}{\text{اند}}$

جزاً مثلاً اگر والدین برای ثبت نام فرزند بازیگوش خود در سال آینده بخواهند بر اساس این نتایج یکی از مدرسه ها را انتخاب کنند، مدرسه ای بهتر است که برآکندگی نمرات در آن کمتر است در مقابل برای فرزندی که به قصد شرکت در المپیاد می خواهد مدرسه را انتخاب کند، مدرسه ای بهتر است که برآکندگی نمرات در آن بیشتر باشد. جزاً  $\frac{\text{اند}}{\text{اند}}$ .



یک معیار معمول سنجش میزان پراکندگی که نشان دهنده تغییرات داده‌های مورد مطالعه است، انحراف معیار است. انحراف معیار را با به کار گیری یک فرمول از داده‌ها به دست می‌آوریم (اختلاف هر عدد با میانگین داده‌ها را حساب کنید؛ به توان ۲ برسانید؛ میانگین اعداد حاصل را به دست آورید؛ و سپس جذر بگیرید). توان دوم انحراف معیار را واریانس می‌نامند. داده‌ها در شکل زیر رسم شده‌اند. همچنین انحراف معیار نمرات هر سه کلاس محاسبه و در شکل نشان داده شده است.

اگر  $n$  را به صورت  $x_1, x_2, \dots, x_n$  داشته باشیم، انحراف معیار آنها را با نماد  $\sigma$  (سیگما) نشان می‌دهند، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

### کار در کلاس

- اگر داده‌ها با هم برابر باشند، انحراف معیار برابر با صفر خواهد شد؛ چرا؟
- انحراف معیار نمرات آزمون جامع سه کلاس را می‌توانید با تکمیل جدول زیر محاسبه کنید.

مشاهدات	انحراف مشاهدات از میانگین	انحراف مشاهدات از میانگین به توان ۲
۷۸	۷۸-۷۷	۱
۷۵		
۷۳		
۶۰		
۶۰		
۶۴		
۶۹		
۶۲		
۶۷		

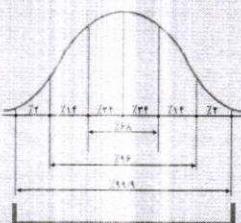
مشاهده می‌شود که انحراف معیار نه تنها نظر شما در خصوص کلاس با بیشترین پراکندگی نمرات را تأیید می‌کند، بلکه به شما امکان مقایسه کمی آنها را نیز می‌دهد. حال می‌توانید درستی پاسخ‌های خود را بررسی کنید.

۸۶

جدول بایه  
روه سطر  
دارای نه پله  
که ایجاد نارد.

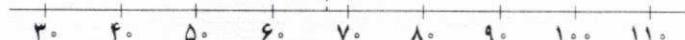
### کلاس (الف)

پراکندگی در خم بهنجهار  
(منحنی نرمال)  
اگر تعداد داده‌ها زیاد باشد،  
بافت‌نگاشت (هستوگرام)  
آنها را می‌توان به صورت  
یک خم تصویر کرد. اگر این  
خم به صورت یک «زنگ»  
باشد، به آن خم بهنجهار گفته  
می‌شود. خداوند بسیاری  
از پدیده‌هارا بهنجهار آفریده  
است. مثلاً طول قد یا وزن  
دانش‌آموختان بهنجهار است.  
معنی بافت‌نگاشتی زنگی  
شکل دارند. خواص این  
خم کمک زیادی برای  
تصمیم‌گیری بر اساس  
داده‌ها با کسب اطلاعات  
از آنها می‌کند. به باد  
دارید که گفته نس اگر  
انحراف معیار داده‌ها باشد  
چند درصد داده‌ها به طور  
تقریبی بین میانگین که در  
واقع گرانگاد یا مرکز نقل  
بافت‌نگاشت است و ضراوی  
از انحراف معیار قرار دارد.  
این اطلاعات را به طور  
مختصر در شکل زیر  
مالحظه می‌کنید  
(مقادیر روی نمودار  
تقریبی هستند):



$$\bar{x} = 67$$

$$\sigma = 8/97$$



$$\{65, 75, 72, 50, 60, 64, 69, 62, 67, 85\}$$

$$\bar{x} = 67$$

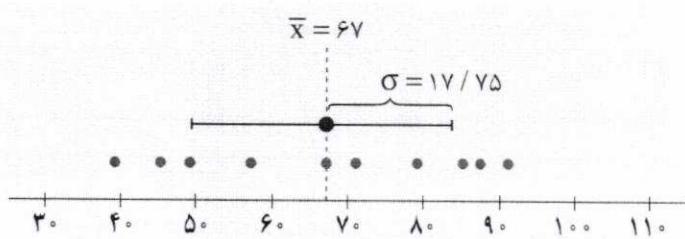
$$\sigma = 8/97$$

داده‌ها:

میانگین:

انحراف معیار:

### کلاس (ب)



$$\{85, 79, 57, 39, 45, 71, 67, 87, 91, 49\}$$

$$\bar{x} = 67$$

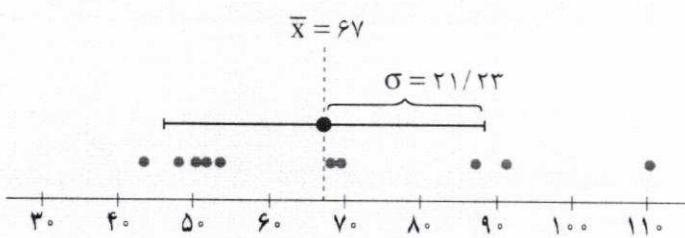
$$\sigma = 17/75$$

داده‌ها:

میانگین:

انحراف معیار:

### کلاس (ب)



$$\{42, 51, 52, 110, 50, 48, 87, 69, 68, 91\}$$

$$\bar{x} = 67$$

$$\sigma = 21/23$$

داده‌ها:

میانگین:

انحراف معیار:

### فعالیت



حتماً بر روی قوطی‌ها ساپاکت‌های مواد غذایی با  
بهداشتی اعدادی به صورت زیر مشاهده کرده‌اید. به نظر  
شما هر یک از این اعداد چه چیزی را نشان می‌دهند.  
 $250 \pm 10$  گرم





عدد ۲۵ وزن خالص ماده غذایی است که قرار است به دست مصرف کننده برسد. ولی معمولاً این چنین نیست. کمی خطای جتنابنایدیر است. این خطای قدر است و چگونه آن را محاسبه کنیم؟ اگر تعداد زیادی از محتوای پاکت‌ها یا قوطی‌های یک تولیدی را وزن و انحراف معیار آنها را محاسبه کنیم، دو برابر آن عدد ۱۰ است. یعنی عدد ۱۰ دو برابر انحراف معیار مواد غذایی در بسته‌بندی‌های مختلف است. به عبارت دقیق‌تر اگر ما ۱۰۰ قوطی حاوی این ماده غذایی را وزن کنیم، انتظار داریم حداقل ۹۶ تا از آنها وزنی بین ۲۴ تا ۲۶ گرم داشته باشند. درج چنین اعدادی بر روی کالاهای از الزامات استاندارد هر کشوری است.

### چگونه به عدد ۹۶ رسیده‌اند؟

برای بی بردن به میزان تغییراتی که داریم، معمولاً با محاسبه مقدار انحراف از میانگین اطلاعات دقیق‌تری در خصوص میانگین و انحراف معیار به دست خواهیم آورد. برای این منظور از یک قانون مشهور در امارت استفاده می‌کنیم: تقریباً ۹۶ درصد از داده‌ها بین «دو انحراف معیار از میانگین» هستند. این جمله یعنی اگر بازه‌ای تعریف کنیم که ابتدای آن  $\bar{x} - 2\sigma$  و انتهای آن  $\bar{x} + 2\sigma$  باشد، تقریباً ۹۶ درصد داده‌ها در این فاصله قرار دارند این مانند آن است که بگوییم، ۴ درصد نمره‌ها بیش از دو برابر انحراف معیار از میانگین فاصله دارد. البته مشابه همین قانون در شکل‌های قبل برای یک برابر انحراف معیار نمایش داده شده است. در این حالت قانون قبل به «تقریباً ۶۸ درصد از مشاهدات بین یک انحراف معیار از میانگین هستند»، تغییر می‌کند. دو برابر انحراف از میانگین را روی همان شکل رسم کنید.

بازه‌ست چه؟

### کار در کلاس



جدول زیر را تکمیل کنید.

$(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$	تقریباً ۹۹/۹ درصد از مشاهدات بین سه برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند
$(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$	تقریباً ۹۶ مشاهدات بین دو برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند
$(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$	تقریباً ۶۸ مشاهدات بین یک برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند

### فعالیت



می‌خواهیم با همان مثال خیریه درس قبل بحث را ادامه دهیم. اگر انحراف معیار مجموعه داده‌ها کوچک باشد، بدین معناست که درآمد همه افراد به هم تزدیک است؛ اگر انحراف معیار بزرگ باشد، بدین معناست که درآمد افراد آن انجمن بسیار متفاوت است. انحراف معیار درآمد اعضا به این صورت محاسبه می‌شود:



آمارهای دقیق  
پشتونه توسعة پذار

\*\*\*  
آمار، ارزاری علمی  
در توسعه متنی بر  
دانای

به کمک جدول زیر این کار را انجام دهید.

مشاهدات	انحراف مشاهدات		انحراف مشاهدات	
	از میانگین به توان ۲	بعداز ورود میلیارد	قبل از ورود میلیارد	بعداز ورود میلیارد
قبل از ورود میلیارد	۴۰	۴۰		
۱۲	۱۲			
۲۸	۲۸			
۳۲	۳۲			
۳۰	۳۰			
۲۲	۲۲			
۲۵	۲۵			
	۱۰۰۰			

۱۵۱۸ ۸,۵۸

زمانی که میلیارد وارد انجمن خیریه می‌شود، انحراف معیار داده‌ها برابر است با ..... ۱۵۱۸. این دو مقدار باهم اختلاف زیادی دارند. چرا و چه باید کرد؟ زمانی را به خاطر بیاورید که ما معیار گرایش به مرکز را برای این داده‌ها محاسبه کردیم. ما برای رفع آن مشکل بهجای میانگین، میانه را به کار بردیم. مشابه همان کار را می‌توانیم انجام دهیم. معیار برآکندگی که تعریف می‌شود، انحراف معیار نیست. ما آن را دامنه میان چارکی، که با  $IQR$  نشان می‌دهیم، می‌نامیم. «میانه» جایی در وسط داده‌هاست؛ به طور مشابه، چارک‌ها هم یک چهارم و سه‌هارم مشاهدات هستند. به عبارت ساده‌تر اگر برای داده‌های مرتب شده قبل از میانه، یک میانه حساب کنیم، همان چارک اول است و به همین صورت میانه داده‌های بعد از میانه، چارک سوم خواهد بود. برای سادگی از نمادهای  $Q_1$  و  $Q_3$  به ترتیب برای چارک اول، میانه (چارک دوم)، و چارک سوم استفاده می‌شود.

جدول زیر را برای مثال خیرین مدرسه تکمیل کنید.

$\sigma$ انحراف معیار	$IQR = Q_3 - Q_1$ دامنه میان چارکی	$Q_3$ چارک سوم	$Q_1$ میانه	$Q_1$ چارک اول	درآمد ماهیانه اعضای خیریه
	۱۵				درآمد بعداز ورود میلیارد
	۱۲,۵				

این اعداد امکان مشاهده چند چیز را به شما می‌دهند: میلیارد مسیب درهم ریختنگی میانگین درآمد و انحراف معیار بوده است. اما میانه و دامنه میان چارکی همچنان ثابت مانندند. این یکی از دلایلی است که ما می‌گوییم، اگر داده دورافتاده داشته باشیم، از میانه (و در نتیجه دامنه میان چارکی) بهجای میانگین استفاده کنید، در این صورت نتیجه بهتری از داده‌ها به دست می‌آورید. زمانی که تعداد داده‌ها زیاد باشد، به نحو دیگری می‌توان از تفاوت معیارهای گرایش به مرکز و برآکندگی نتیجه بگیرید که داده دورافتاده وجود داشته است.

دلیل دیگر استفاده از میانه و دامنه میان چارکی تفسیر ساده آنها در مقابل تفسیر میانگین و انحراف معیار است. اگر نتایج مطالعات مربوط به سرطان را مطالعه کیم، اولین چیزی که در گزارش‌ها مشاهده می‌کنیم، شخصات عمومی بیماران مورد مطالعه است: آنها چند سال سن دارند؟ نسبت مردان به زنان چقدر است؟ چند نفر بیماری‌شان زود تشخیص داده شده و در مراحل ابتدایی است و چند نفر بیماری‌شان عود کرده است؟ اگر در گزارش، میانگین و انحراف معیار را ذکر کنیم، هر خواسته‌ای می‌تواند از روی اطلاعات داده شده با توجه به دو قانون ذکر شده نحوه توزیع سنین بیماران را به دست آورد. اما نکته در اینجاست که، آنها این کار را نخواهند کرد. به ندرت می‌توانید یک پژوهش مخصوص سرطان بسیار پرمتشغله را در حال فکر کردن به این مسئله بینید که، «خوب میانگین  $64\frac{2}{3}$  و انحراف معیار  $9\frac{8}{8}$  است؛  $64\frac{2}{3} \pm 9\frac{8}{8}$ ، که می‌شود، یک لحظه صبر کنید، ماشین حساب کجاست؟» شما تنها می‌توانید با نگاهی سریع به میانه و دامنه میان چارکی تصور خوبی نسبت به توزیع داده‌های پیش رویتان به دست آورید. به عبارت دیگر، میانه و دامنه میان چارکی در توصیف مجموعه داده‌ها بسیار مفیدند و این دقیقاً همان کاری است که ما از آنها انتظار داریم انجام دهند:

عنوان آمار توصیفی شناخته می‌شوند.

## کار در کلاس



جملات زیر را کامل کنید:

۱. میانگین‌ها و میانه‌ها برای توصیف مجموعه داده‌ها مفیدند. ... **میانگین** ... و ... **میانه** ... انواعی از معیارهای گرایش به مرکزی هستند.
۲. شما معمولاً آنها معدل یک مجموعه را می‌خواهید، بلکه میزان تغییرات حوالی آن نقطه را هم نیاز دارید که آن معیار **میانگشت پنجمین** است. **انحراف رزمند**
۳. معیار برآکندگی که معمولاً با میانگین بیان می‌شود، ... **انحراف همای** است.
۴. معیار برآکندگی که معمولاً با میانه بیان می‌شود **دامنه میانه** کام دارد. **IQR**
۵. **میانه** ... و **دامنه** ... اطلاعات سرعی درباره داده‌ها بدون نیاز به هرگونه محاسبه می‌دهند.
۶. آماری که برای توصیف یک مجموعه داده، میانگین‌ها و میانه‌ها، انحرافات معیار و دامنه‌های میان چارکی به کار می‌رود، **آن روشیست** دارد.
۷.  $5^{\circ}$  درصد داده‌ها قبل از ... **میانه** ... و  $5^{\circ}$  درصد داده‌ها بعد از ... **میانه** ... قرار دارند.
۸.  $75^{\circ}$  درصد داده‌ها قبل از **چهارمین** ... یا بعد از **پنجمین** ... قرار دارند.
۹.  $25^{\circ}$  درصد داده‌ها قبل از **چهارمین** ... یا بعد از **چهارمین** ... قرار دارند.
۱۰.  $5^{\circ}$  درصد داده‌ها بین **چهارمین** ... و **چهارمین** ... قرار دارند.

شالیسهه هست تمنی اخناف سرده که روان کلزم هست رامنه  
میان چارکی نزدیک میلبم سرده.

### دو اخناف مهار

۱۱. تقریباً ۹۶ درصد مشاهدات در فاصله ... از میانگین هستند.

۱۲. تقریباً ۶۸ درصد مشاهدات در فاصله **بین اخناف مهار** از میانگین هستند.

### تمرین

شعارهای برتر  
سال جهانی آمار



آمار دقيق،  
برنامه‌گیری بهتر،  
آینده روسن  
\*\*\*  
آمار سیمای واقعیت،  
ابزار مدیریت

۱. یک نمونه ۲ تابی از بین اعداد ۱ تا ۶ انتخاب کنید. اگر بخواهید این نمونه حتماً تصادفی باشد، چه راهی را پیشنهاد می‌کنید. اگر بخواهید اعضای انتخابی این نمونه تصادفی، تکراری نباشند، چگونه این کار را انجام می‌دهید؟

**پرسنله از ساس پرتاب جدد در صورتی که تکرار**

۲. سؤال ۱ را برای اعداد ۱ تا ۳۶ تکرار کنید. (راهنمایی: می‌توانید از پرتاب دو تاس به عنوان روشی برای انتخاب اعداد ۱ تا ۳۶ استفاده کنید) **دو تاس حمزه‌انه پرتاب چکنیم.**

۳. مجموعه افراد فامیل درجه اول و درجه دوم خود را بتویسید و آنها را شماره‌گذاری کنید. سپس یک نمونه ۴ تابی از این جامعه انتخاب کنید. موضوع‌های زیر را در نظر بگیرید. درباره بهترین روش جمع‌واری داده برای این فرضیه‌ها تصمیم بگیرید:

(الف) بیشتر مردم فکر می‌کنند «حداکثر سرعت در اتوبان‌ها باید تعیین شود».

(ب) آیی، رنگ مورد علاقه بیشتر مردم برای ماشین است.

(پ) در زمان مطالعه، گوش دادن به موسیقی کلاسیک به یادگیری کمک می‌کند.

(ت) بیشتر تصادفات اتومبیل‌ها را رانندگان با سن کمتر از ۲۵ سال مرتکب می‌شوند.

(ث) رژیم گرفتن، باعث گاهش هوش می‌شود.

۴. دو موضوع برای هر یک از روش‌های جمع‌واری داده بیان کنید.

(الف) از طریق مصاحبه (ب) از طریق مشاهده (پ) از طریق دادگان (ث) از طریق پرسش نامه

۵. کدام یک از نمونه‌گیری‌های زیر، یک نمونه‌گیری تصادفی است. در هر یک واحدهای آماری، جامعه و نمونه را مشخص کنید.

(الف) باتمام پلیس‌های یک پاسگاه پلیس برای پیدا کردن نظر آهار ارجع به تخلفات مصاحبه شد.

(ب) با بجهه‌هایی که وارد یک پارک بازی می‌شدند، پنج در میان مصاحبه شد تا وسیله بازی مورد علاقه کودکان بررسی شود.

(پ) برای بررسی PH شامپوهای تولیدی یک کارخانه، شامپوها را صد در میان مورد آزمایش قرار دادیم.

۶. برای تحقیقات و بررسی‌های زیر جامعه را مشخص کرده و روش نمونه‌گیری پیشنهاد کنید.

(الف) پیدا کردن درصد بیکاران استان مازندران. (ب) مردان کدام شامپو را بیشتر ترجیح می‌دهند؟

۷. می‌خواهیم مدت زمانی را که دانش آموزان کلاس شما در طول یک هفته صرف مطالعه کتاب‌های غیر درسی می‌کنند، آمارگیری کنیم.

(الف) در این آمارگیری جامعه را مشخص کنید.

حل مسئله ۲ به بعد پیشتر بگه

۳

اسامی آنها را روی کاغذهای پلیسان می نویسیم و سپس به قید کرده ۴ نفر آنها را انتخاب می کنیم.  
کمترین نیاز استفاده از اعداد نهاده خواهد بود.

بعنوان ۳ که به نظری رسیده این ترتیب مرتب است.

(الف) پرسش نامه ب) پرسش نامه پ) مشاهده (آزمایش)

ت) دادگان ث) آزمایش (مشاهده)

۴

(الف) بررسی علل موقوفت مدیر (بررسیات) - بررسی عوامل موقوفت کسر فرد در تئور سراسری

ب) بررسی میزان استفاده از کمربند ایندی رجارد دها توسط رانندگان

بررسی زمان روز آموزه در هفته وقت استفاده آنها

ب) بررسی میزان تصادف در سطحی خاصی در شهر - بررسی غلات روز آموزه رسته کار در هم

ث) نظر خواهی در مورد ریاضی آموزی سطح توسعه مدیر - نظر خواهی در مورد رخات متران از بخورد طایف  
فرسلطه

۵

مفهوم	حاجمه	واحد اماری	روشن آماری
-	مجموعی کل پرسش ها پاسخهای با سطح	هر کس از پرسش ها پاسخه	این محل سرشماری را کم و نیز تواند غونه هایی باشد.
نحوه های ردیفه ای با آنها نمایه شد.	کل جمهوری دارد که به پارک	هر کس از کمینه ها وارد شده به پارک	نحوه هایی که از (منتظم، مستحکم) هستند
شایمیوهای بررسی شده	کل شایمیوهای توکلی	هر کس از شایمیوهای توکلی	نحوه هایی که از (منتظم)

۶

(الف) مجموعی کل سائنس است مازندران مسحه دار - تنهایی پرسش نامه و توزیع آن بنابرار معنی از  
خانوارهایی شده ای انتخاب (نهاده) که ملاک مهل آنها  
محدود ۳ باشد.

(ب) مجموعی کل مردم سفر که شایمیوهای معرفتی هستند.

نهایی پرسش نامه و توزیع آن به متریان شایمیوهای تمهیل

- (ب) یک روش نمونه گیری برای انتخاب نمونه معرفی کنید.

(ب) از چه روشی برای گردآوری اطلاعات استفاده می کنید؟

(ت) اندازه (تعداد) این جامعه چقدر است؟

(ث) اندازه نمونه مورد بررسی چقدر است؟ آیا این تعداد برای بررسی مورد نظر مناسب است؟ در صورت مناسب بودن، روش نمونه گیری و نمونه خود را اصلاح کنید.

(ج) متغیر مورد مطالعه در این مسئله چیست؟ توضیح دهید.

(ج) متغیر مورد مطالعه از چه نوعی است؟

✓  
6251

۸. نوع هر یک از متغیرهای زیر را مشخص و بهترین مقیاس اندازه‌گیری آنها را ذکر کنید.

(الف) رنگ اتومبیل‌های موجود در یک نمایشگاه اتومبیل      (ب) درجه حرارت کلاس شما در روزهای سال

(ت) تعداد تسبکایات رسیده شده به یک پاسگاه بلیس      (پ) گنجایش آب یک باری محترنی (تانکر)

(ج) وضعیت تأهل کارمندان یک شرکت      (ز) درآمد دانشجویان شاغل به کار

چ) سن دانشجویان شرکت کننده در یک دوره هنری

۹. مذاق برداخت حقوق در یک شرکت خصوصی در حدول زیر آمده است :

سیستم	مدیر شرکت	معاون	حسابدار	بازاریاب	نفر فروشنده	منسی	مستخدم
حقوق میلیون ریال	۱۰۰	۶۰	۳۰	۲۰	۲۰	۱۲	۸

مدیر شرکت در آگهی دعوت به همکاری در روزنامه اعلام می‌دارد که میانگین برداخت حقوق در این سرکت بیشتر از **۲۵۷** ریال است. آیا این رقم می‌تواند دلیلی برای برداخت حقوق بالادر این شرکت باشد؟ **خواه**  
حراء؟ کدامیک از معیارهای گرایش به مرکز برای نشان دادن وضع برداختی کارکنان این شرکت مناسب‌تر است **نمایه**

پسندیده فرد  
دارد.  
کذا دوستی دارد.

- لطف) میانه و میانگین را برای نمرات این دانش آموز حساب کنید.

ب) کدام یک از شناختهای فوق، بیانگر وضع این دانش آموز در درس فیزیک است؟

ب) اگر معلم درس فیزیک این دانش آموز، برای جبران نمره ۷، امکان امتحان مجدد را به او بدهد، برای اینکه میانگین وی در این درس بسترهای ۱۸ شود، او در این امتحان چه نمره‌ای باید کسب کند؟

د) دسته داده‌ذهن قیمت کالاها را در دو بازار، حداکثر ۱۰ حسب هزار، با نشان مرده.

٨	١٢	٩	١٢	١٠	١١	١٢	٩	١٠	١١	١٠	٦
١٠	١٢	٨	١٠	٩	١١	١٠	١٠	١١	٩	١٠	٦

$$18 = 14 + 19 + 11 + 9 + 11 + 19$$

9

$\rightarrow \sigma^{\lambda^{\prime} \mu}$

- الف) در کدام دسته پر اکندگی بیشتر است؟

ب) دامنه تغیرات را محاسبه کنید.

پ) آیا دامنه تغیرات با پر اکندگی مساهده شده در «الف» همخوانی دارد؟

ت) ترجیح می‌دهید از کدام بازار خرید کنید؟ جرا؟

ب) اگر داده‌ها در اختیار نداشته باشید، فقط به صرف داشتن دامنه تغیرات می‌توانید تصمیم گیری کنید؟

قبل این کثره راهنمایی های میراث نداشته.

٧

الف) مجموعی کل راست آموزن  $\text{ج} \text{س}$

ب) انتخاب نعدادی از راست آموزن  $\text{ج} \text{س}$  به طور معاذن (مثل "راست آموزن" که شماره رین آنها در سی  $\text{ج} \text{س}$  عدد فرد باشد)

۱ ساعت  $\text{O}$

۲ ساعت  $\text{O}$

۳ ساعت  $\text{O}$

:

ت) نعداد راست آموزن  $\text{ج} \text{س}$

ث) نعداد راست آموزن (نها ب شده، هرچه جامعه کوچک باشد هر کس سرمه ری را جایگزین  
عنوانه نمایی کنیم.

ج) میزان ساعت مطالعه کتب غیر درسی

چ) کمی، با مقدار نسبتی

ج) کمی کمی

پ) کمی نسبتی

الف) کمی نسبتی

ب) کمی فاصله ای

پ) کمی نسبتی

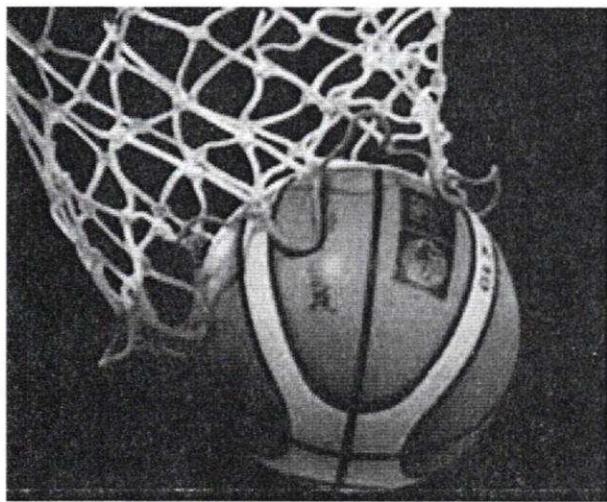
ت) کمی نسبتی

ث) کمی نسبتی

٨

## فصل پنجم

# نمایش داده‌ها

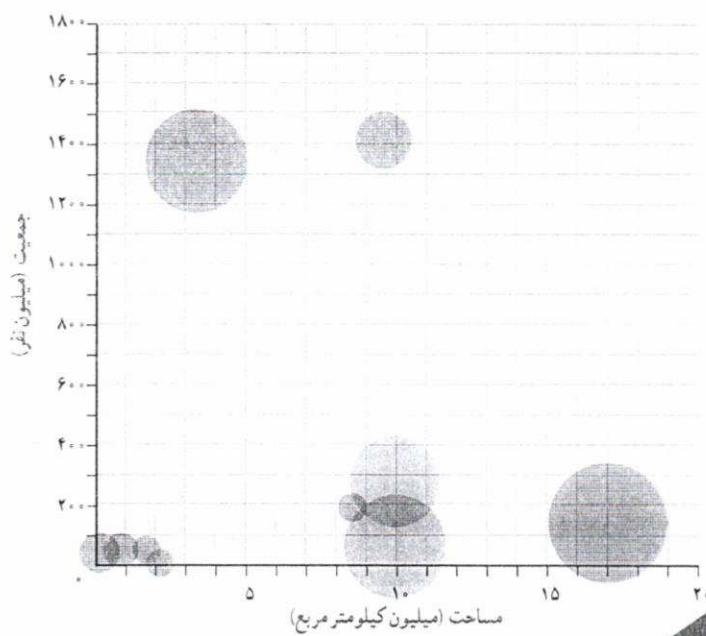
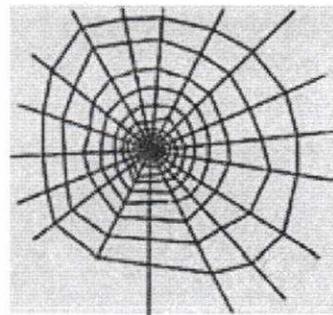


نمودارهای یک متغیره

درس ۱

نمودارهای چندمتغیره

درس ۲



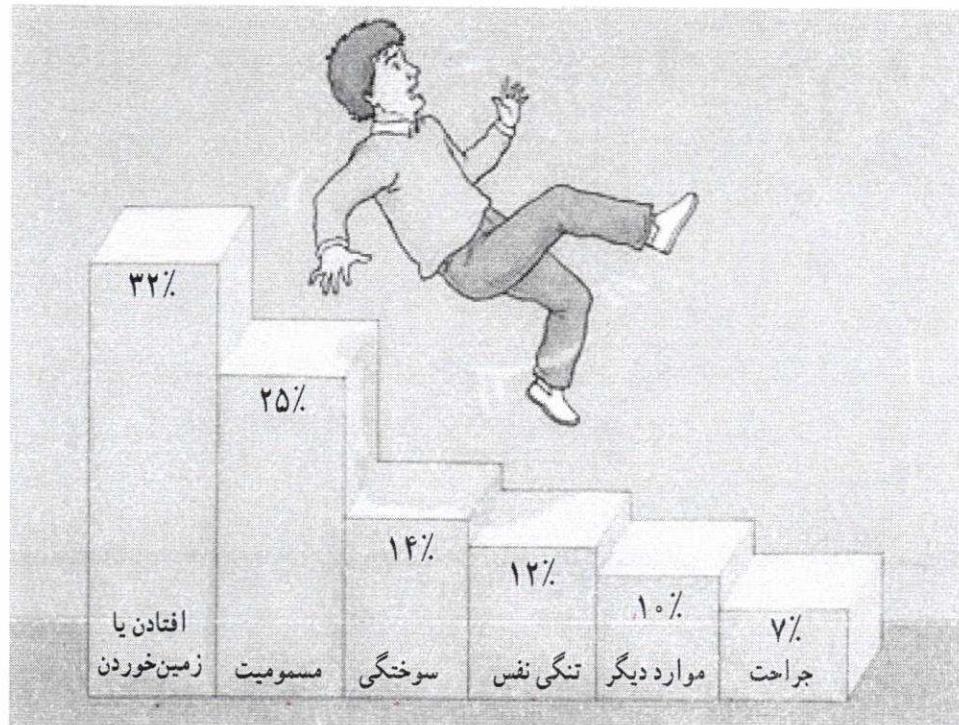
# درس ۱

## نمودارهای یک متغیره

### فعالیت



در کلاس قرار شد هر دانشآموز با توجه به داده‌های موجود در رسانه‌ها، درباره یک موضوع اجتماعی یا فرهنگی گزارشی در قالب یک شکل ارائه کند. مثلاً حسن در مورد موضوع علل آسیب‌دیدگی ۲۰ نفر در منازل اطلاعاتی کسب کرده بود. او گزارش خود را در یک شکل خلاصه کرده است. او با اطلاعاتی که در اختیار داشته است، ابتکار جالبی به خرج داده و نمودار زیر را رسم کرده است. از این نمودار چه اطلاعاتی می‌توان کسب کرد؟ به عنوان مثال، بیشترین آسیب‌دیدگی در منازل بر اثر افتادن یا زمین خوردن است.

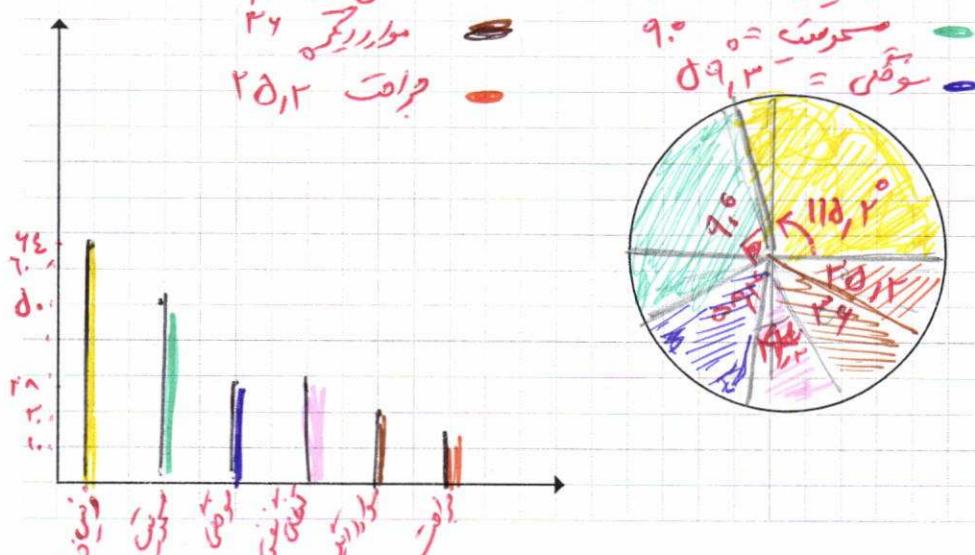


$$y = 2x + 2 \Rightarrow 2x - y = 14 - 2 \\ \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{28} \quad \boxed{14} \quad \boxed{2} \quad \boxed{14}$$

معلم از موضوع انتخابی و نمایش ترتیبی مکعب‌ها بر حسب طول آنها رضایت کامل داشت؛ ولی از دانش‌آموzan درخواست کرد که اگر می‌توانند پیشنهادی برای بهتر شدن آن ارائه کنند. آیا شما قبل از دیدن نظرها می‌توانید چند پیشنهاد برای بهبود نمودار ارائه کنید؟

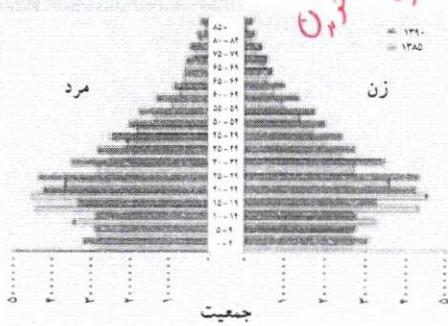
نمودار میله‌ای انواع آسیب‌دیدگی را، بر حسب تعداد رسم کنید. مراحل رسم نمودار دایره‌ای را به ياد بیاورید و آن را در چند گام خلاصه کنید. نمودار دایره‌ای در صد آسیب‌دیدگی‌ها را نیز رسم کنید.

$$\begin{aligned} \text{رصن فورن} &= 118,2^\circ \\ \text{تئر نفن} &= 43,2^\circ \\ \text{مادر رکه} &= 9,0^\circ \\ \text{براهت} &= 28,1^\circ \\ \text{سوچل} &= 59,3^\circ \end{aligned}$$



جمع‌بندی پیشنهادها براساس آموخته‌های ما در سال‌های گذشته، به صورت زیر است:

- ✓ رسم مکعب مستطیل به جای مستطیل خوب نیست، چون ممکن است اطلاعات دقیق را به یعنی‌دهن ندهد.
- ✓ برای متغیرهای نمودار میله‌ای بهتر از بافت نگاشت (هیستوگرام) است.
- ✓ زمانی که درصد را گزارش می‌کنیم، بهتر است از نمودار دایره‌ای استفاده کنیم تا بهتر بتوانیم مقایسه انجام دهیم. البته به شرطی که بیشتر از ۶ مقدار نداشته باشیم.



مقایسه هرم سنی جمعیت ایران  
سال‌های ۱۳۹۰ و ۱۳۸۵

## کار در کلاس

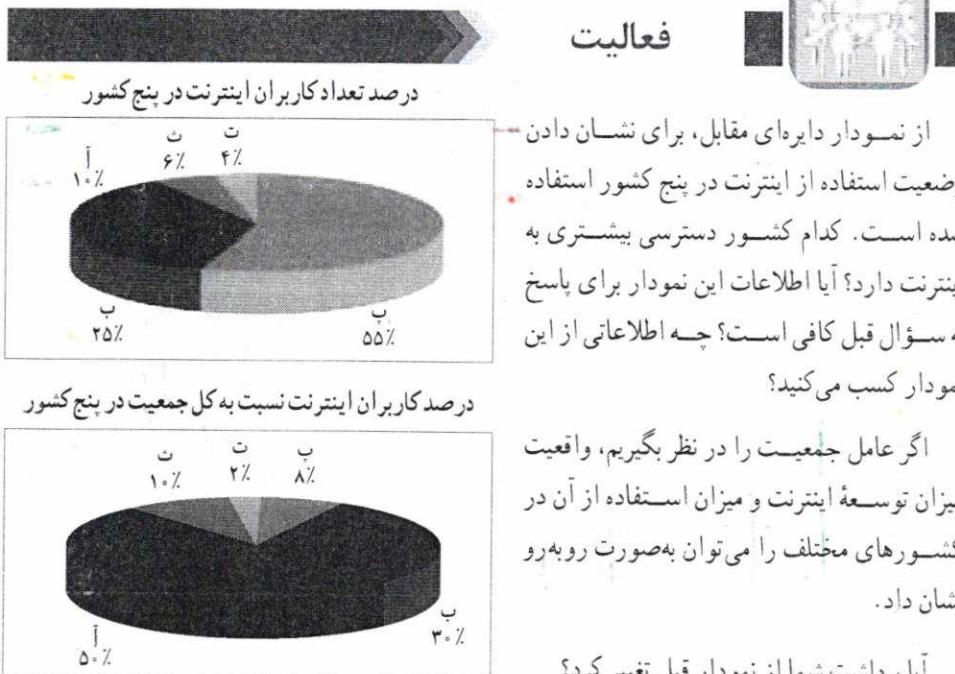


در کلاس درس خود متوسط مصرف روزانه انواع میوه‌ها یا سبزی‌های را به یکی از روش‌های فصل قبل جمع‌آوری کنید و آنها را با یک نمودار مناسب نمایش دهید. مثلاً اگر در روز شنبه ۲، یکشنبه ۶، دوشنبه ۵، سه‌شنبه ۴، چهارشنبه ۳، و پنج‌شنبه ۷ و جمعه ۸ نوع میوه یا سبزی خورده باشید، میانگین آنها برابر  $5/14$  است که آن را ۵ در نظر می‌گیریم.

## نمایش داده‌ها

نمایش داده‌ها، روشی برای کمک به استخراج اطلاعات از داده‌ها با حس بینایی است.

### فعالیت

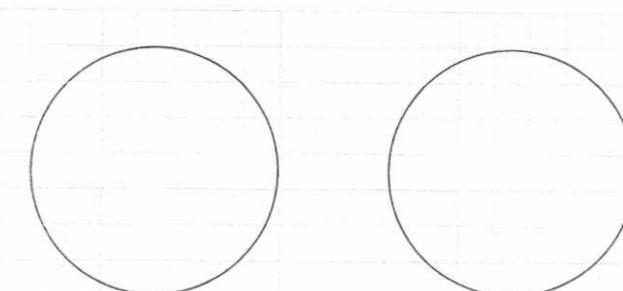


از نمودار دایره‌ای مقابل، برای نشان دادن وضعیت استفاده از اینترنت در پنج کشور استفاده شده است. کدام کشور دسترسی بیشتری به اینترنت دارد؟ آیا اطلاعات این نمودار برای پاسخ به سؤال قبل کافی است؟ چه اطلاعاتی از این نمودار کسب می‌کنید؟

اگر عامل جمعیت را در نظر بگیریم، واقعیت میزان توسعه اینترنت و میزان استفاده از آن در کشورهای مختلف را می‌توان به صورت رو به رو نشان داد.

آیا برداشت شما از نمودار قبل تغییر کرد؟

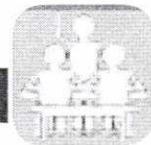
به نظر شما رسم نمودار دایره‌ای به صورت دو بعدی که در سال‌های گذشته با آن آشنا شده‌اید، بهتر است یا سه بعدی؟ مانند دو نمودار قبلی.



انتقال اطلاعات از طریق نمایش داده‌ها بسیار جذاب‌تر و سریع‌تر از ارائه همان اطلاعات در جدول‌هاست. نمودارها باید به گونه‌ای رسم شوند که از آنها سوء برداشت نشود و بی‌طرفی را حفظ کنند. می‌گویند ارزش یک تصویر به اندازه هزار کلمه است.

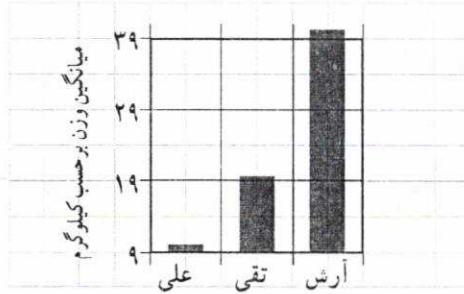
## خواهد

## کار در کلاس



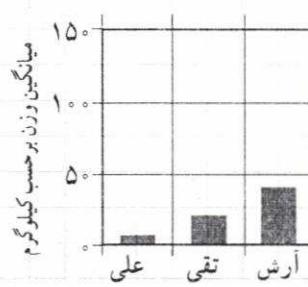
### بازی با نمودارها

۳. اگر نقطه شروع محور عرض ها را از صفر به عدد ۹ تغییر دهیم، چه تغییری در نتیجه حاصل می شود؟



در واقع اعداد همان اعداد قبلی اند، اما محور عرض ها تغییر کرده است. اکنون این طور به نظر می رسد که کدو تبل های **بیخ علی وزن سیز را پر کرده اند**.

۴. اینک اگر کسی بخواهد دیگران را مقاعده کند که همه کدو تبل ها حدوداً به یک اندازه اند، **(زنده) کاری** می تواند بکند؟ به این نمودار نگاه کنید:



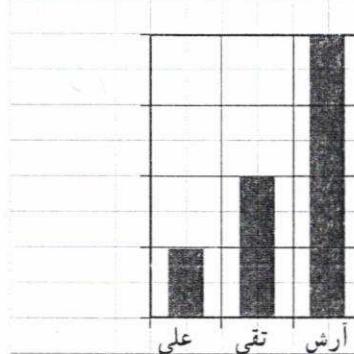
اعداد تغییری نکرده اند؛ اما محور عمودی دوباره تغییر کرده است. چه تغییری کرده است؟

**میانگین وزن ها نیز متغیر شد**

115

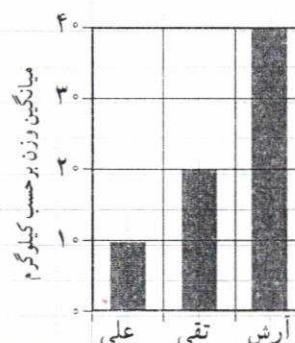
به کارگیری غلط نمودارها، راه ساده‌ای برای گمراه کردن افراد است. افراد مایل‌اند به نمودارها به عنوان روشی سریع برای ارزیابی مجموعه‌ای از اعداد بنگرنند. اما مراقب باشید که فریب نخورید.

۱. باید از کدو تبل های با غلهای آرش، تerci و علی استفاده کنیم. اولین نمودار به صورت زیر است:



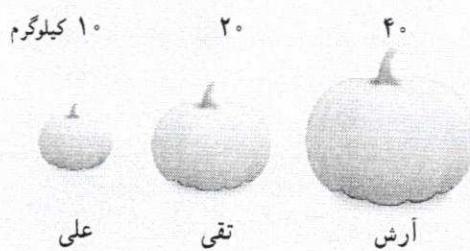
این نمودار چه چیزی را نمایش می دهد؟ وزن، حجم، پهنا یا ارتفاع کدو تبل هارا؟ **نمودار**

۲. نمودار زیر چه تفاوتی با نمودار بالا دارد؟



این نمودار به چه اطلاعات بیشتری اشاره می کند؟

**معنی لذتمندی وزن کدو تبل ها را نمودار**  
بیانی از آنچه میگذرد تقریباً **وزن**  
از علی است.



گاهی برای نمایش داده‌ها از یک تصویر استفاده می‌شود، مانند شکل رو به رو.

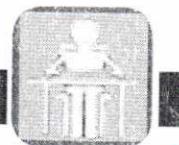
این تصویر، داده‌ها را از شکل طبیعی خارج می‌کند. برای نمایش نفایت میانگین وزن‌ها، این تصویر ارتفاع هر کدو تبل را، برای نشان دادن وزنش، تغییر می‌دهد. ارتفاع

کدو تبل نقی (با وزن ۲۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدو تبل علی (۱۰ کیلوگرم) است؛ ارتفاع کدو تبل آرش (۴۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدو تبل نقی و چهار برابر ارتفاع کدو تبل علی است. آیا این شکل اطلاعات مورد نظر را به درستی به بیننده منتقل می‌کند؟ (راهنمایی: فرمول‌های محاسبه و مساحت را به بادآورید؛ مساحت مستطیل = طول  $\times$  عرض و مساحت دایره =  $\pi r^2$ )

شما چگونه این شکل را رسم می‌کنید تا اطلاعات موجود را بهتر نمایش دهد؟ «برای من نور»



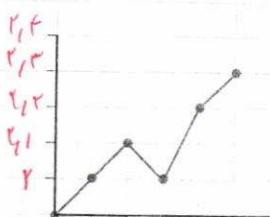
### تمرین



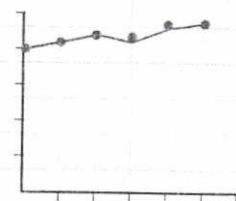
۱. سود خالص یک شرکت خدماتی در شش ماه نخست سال بر حسب میلیارد ریال به صورت زیر است:

شهریور	مهرداد	تیر	خرداد	اردیبهشت	فروردین
۲/۴	۲/۳	۲/۱	۲/۲	۲/۱	۲/۰

خریدار و فروشنده سهام این شرکت، نمودارهای زیر را رسم کردند. اعداد روی محورها را مشخص کنید:



نمودار از دید فروشنده



نمودار از دید خریدار

به نظر شما کدامیک منطقی‌تر است؟ آیا می‌توانید نموداری بهتر از این دو نمودار رسم کنید؟



نمودار از دید خریدار

۲. اگر در صدی یا فراوانی متغیرهایی که نمودارهای آنها را رسم می‌کنیم، تزدیک به هم باشند، آیا نمودار میله‌ای دایره‌ای برای مقایسه مناسب‌تر است؟

**۶** دایره‌ای برای مقایسه مناسب‌تر است؟

۳. رسم نمودارهای میله‌ای و دایره‌ای برای داده‌های کمی مناسب‌تر است یا برای داده‌های کیفی؟



مربی گروه (تیم) بسکتبال شهر می خواهد بر اساس نتایج بازی های قبلی دو بازیکن، نسبت به حضور یکی از آنها در بازی بعدی تصمیم بگیرد. امتیاز های کسب شده توسط این دو بازیکن به صورت زیر است.

۱۱ بازیکن الف:

۱	۱	۱	۳	۲	۱	۲	تعداد بازی‌ها
۳۰	۱۳	۱۱	۱۰	۷	۶	۳	امتیاز کسب شده

۱۰ بازی بازیکن ب:

۱	۱	۲	۲	۲	۱	۱	تعداد بازی‌ها
۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	امتیاز کسب شده

می‌توان داده‌های مرتب شده را به صورت زیر نشان داد:

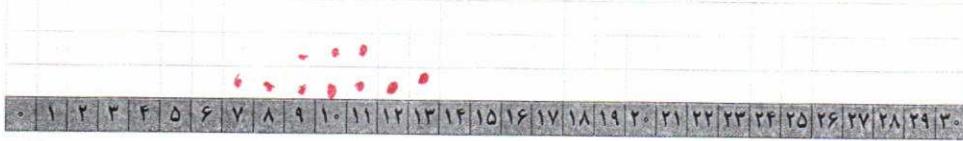
۷	۸	۹	۹	۱۰	۱۰	۱۱	۱۱	۱۲	۱۲	۱۳	بازیکن ب
---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----------



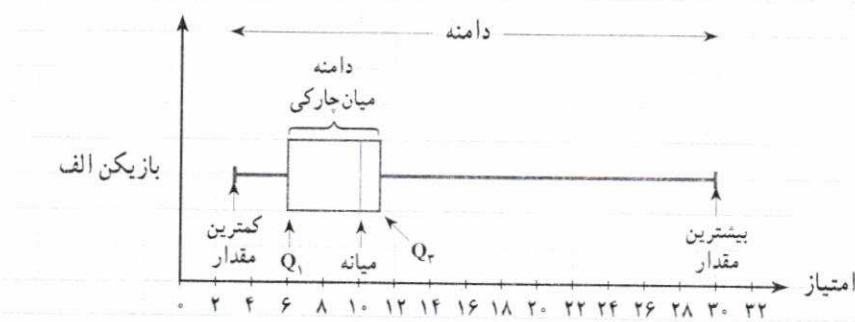
اگر هر یک از اعداد را به صورت نقطه بالای یک محور علامت بزنیم، به نمودار حاصل نمودار نقطه‌ای داده‌ها می‌گویند. نمودار نقطه‌ای امتیاز‌های بازیکن الف را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.



نمودار نقطه‌ای داده‌ها را برای بازیکن ب بر روی محور نمایش دهد.



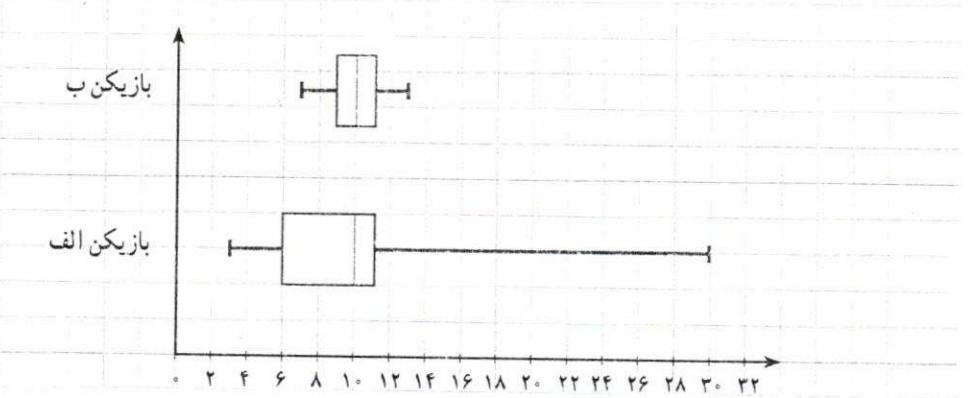
به نظر شما کدام بازیکن بهتر است؟ البته سؤال کلی است و اگر به شما بگوییم این بازی آخر است یا گروه مقابل تیمی است که تاکنون امتیاز بیشتری نسبت به گروه شهر کسب کرده، ممکن است پاسخ سؤال عوض شود. در فصل گذشته برای تصمیم درست‌تر، از معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی به طور همزمان استفاده می‌شد. پس خالی از لطف نیست که معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی مجموعه‌های گوناگون از داده‌ها را به شکل تصویری مورد مقایسه قرار دهیم. امتیاز‌های بازیکن الف را در نظر بگیرید. برای این منظور کمترین مقدار، چارک اول، میانه، چارک سوم و بیشترین مقدار را محاسبه کنید و روی یک محور نمایش دهد. برای مشخص کردن حدود دامنه میان چارکی، یک جعبه به عرض دلخواه رسم می‌کنیم. برای مشخص کردن دامنه دو خط، از دو طرف جعبه به کمترین مقدار و بیشترین مقدار داده‌ها وصل می‌کنیم. با مشخص کردن میانه روی جعبه، نمودار جدیدی ارائه کرده‌ایم به نام نمودار جعبه‌ای. برای این منظور خطی عمودی بکشید تا میانه مشخص شود.



این نمودار دامنه، دامنه میان چارکی و میانه مجموعه داده‌ها را به طور همزمان نشان می‌دهد. بیش از یک مجموعه داده را می‌توان در یک نمودار نشان داد. این بدان معناست که این روش برای مقایسه داده‌ها بسیار عالی است.

اگر داده‌ها در برگیرنده داده دور افتاده بودند، دامنه وسیع‌تر می‌بود. در نمودار جعبه‌ای، طول سبیل‌ها با توجه به مرزهای بالا و پایین افزایش  $\propto$  می‌باید. با نگاه کردن به سبیل‌های نمودار جعبه‌ای، می‌توانید به نامتقارن بودن داده‌ها بی‌پیرید.

نمودار جعبه‌ای دو بسکتالیست در اینجا نشان داده شده است. دامنه این امتیازات را مقایسه کنید. اگر مجبور بودید از بین این دو بازیکن، یک نفر را انتخاب کنید، کدام را انتخاب می‌کردید؟ اگر بتوانید به سؤال قبل در وضعیت‌های مختلف گروه مقابله با حساسیت بازی تصمیم‌گیری کنید.



از آنچه دو خط دوطرف جعبه شبیه سبیل گریه است. بعضی موافق به آن نمودار جعبه و سبیل گفته می‌شود.

بازیکن ب دامنه نسبتاً کوچکی دارد، ولی میانه هر دو برابر با ۱۰ است. بازیکن الف دامنه امتیازات بزرگی دارد. گاهی این بازیکن، امتیازاتی بسیار بیشتر از بازیکن ب می‌آورد، و گاهی هم بسیار کمتر. بازیکن ب ثبات بیشتری دارد و معمولاً امتیازاتش از بازیکن الف بیشتر است (میانه‌ها و دامنه میان چارکی را با هم مقایسه کنید)، پس بهتر است بازیکن ب را انتخاب کنیم.

نمودار جعبه‌ای، روشی سسودمند برای نمایش دامنه‌ها و چارک‌های داده‌است. یک جعبه، مکان قرارگیری چارک‌ها و دامنه  $\square$  میان چارکی را نشان می‌دهد و سبیل‌ها کمترین و بیشترین داده را نشان می‌دهند. در یک نمودار جعبه‌ای بیش از یک مجموعه داده را می‌توان نشان داد؛ پس این نمودار برای مقایسه مناسب است.

دامنه میان چارکی به نظر مفید می‌رسد. این دامنه در مورد بازیکنانی که گاه‌گاهی امتیازات بسیار باینی کسب می‌کنند چطور؟ اگر بازیکنی در روز مسابقه، بد بازی کند، برای ما به قیمت از دست دادن قهرمانی در تیم‌گان (لیگ) تمام می‌شود. مطمئن نیستیم که دامنه یا دامنه میان چارکی برای ما مشخص می‌کند که کدام بازیکن واقعاً ثبات بیشتری دارد.

مربی نباید فقط دامنه امتیازات بازیکنان را مقایسه کند. او به راهی نیاز دارد تا به طور دقیق از روی مقادیر موجود محاسبه کند که کدام بازیکن در روز مسابقه ثبات بیشتری دارد. به عبارت دیگر، او باید بازیکنی را پیدا کند، امتیازاتش کمترین تغییرات را داشته باشد.

مشکل دامنه و دامنه میان چارکی این است که فقط تفاوت بین مقادیر کم و زیاد را به شمامی گویند؛ اما نمی‌گویند که چند وقت به چند وقت بازیکنان این امتیازات کم و زیاد را در مقابل امتیازات تزدیک به میانه کسب می‌کنند. این برای مربی مهم است.



## کار در کلاس

برای مجموعه داده‌های زیر نمودار جعبه‌ای بکشید.

۱۲۵ ۱۵۱ ۲۰۳ ۲۵۳ ۳۱۳ ۳۲۴ ۴۲۵ ۴۷۱ ۱۱۲۵ ۱۲۵ ۲۰۳ ۲۵۳ ۳۱۳ ۳۲۴ ۴۲۵ ۴۷۱ ۱۱۲۵ ۱۵۱

برای نمودار

۱۵۱

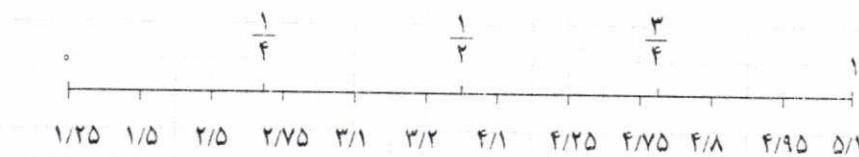


گام اول: کمترین مقدار و بیشترین مقدار را مشخص کنید.

از آنجا که اعداد به ترتیب چیده شده‌اند، اولین عدد **۱۵۱** مقدار است و آخرین عدد **۴۷۱** مقدار.

گام دوم: چارک‌هارا مشخص کنید.

در این مجموعه ۱۲ عدد وجود دارد. می‌توانیم از شکل زیر یا از فرمول برای تعیین چارک‌ها استفاده کنیم.



۱۵۱  
۴۷۱  
۱۲۵  
۲۰۳  
۲۵۳  
۳۱۳  
۳۲۴  
۴۲۵  
۴۷۱  
۱۱۲۵  
۱۲۵  
۱۵۱

بانگاه به شکل بالا درمی‌باییم که میانه بین مقادیر **۳/۲** و **۴/۱** است، بنابراین، مقدار میانه می‌شود: **۳/۹۰**.

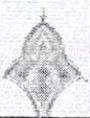
چارک اول، بین مقادیر **۱/۵** و **۲/۵** قرار می‌گیرد. بنابراین، مقدار اولین چارک می‌شود:

**۱/۴۲۵**. چارک سوم بین مقادیر **۴/۸** و **۴/۹۵** قرار می‌گیرد. بنابراین، مقدار سومین چارک می‌شود:

# دریب سوال ۳

۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲

گام سوم: نمودار جعبه‌ای رسم کنید.



نمودارهای مبله‌ای افقی  
درست شبیه نمودارهای  
مبله‌ای عمودی‌اند، با این  
فرق که محورها چرخیده‌اند.  
در نمودارهای مبله‌ای  
افقی، رددها روی محور  
عمودی و درصد یا فراوانی  
روی محور افقی نشان  
داده‌می‌شوند.

نمودارهای مبله‌ای عمودی  
مرسوم‌ترند، اما نمودارهای  
مبله‌ای افقی در صورتی  
که اسم رددها طولانی  
باشد، مفید واقع می‌شوند.  
آنها برای نمایش اسامی  
رددها، بدون نیاز به عمودی  
نوشتن، فضای زیادی را در  
اختیار مان می‌گذارند.

۲۵/۵

۲۵/۵

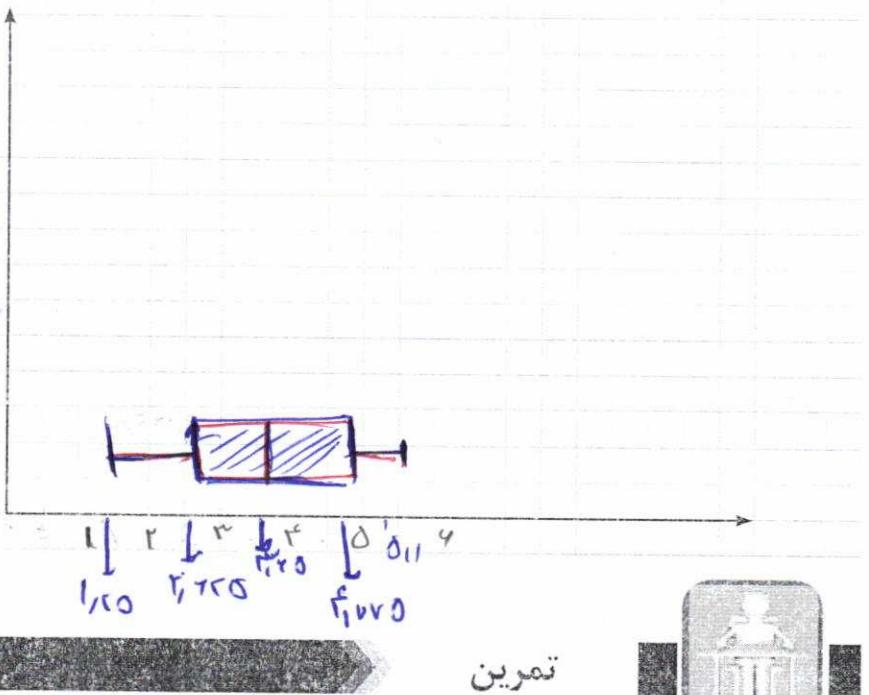
۲۵/۲۹

۲۲

۲۵/۱۰

۲۰

۲۷



تمرین



- نمودارهای مبله‌ای فراوانی یا درصدها را نشان می‌دهند. چه زمانی باید از فراوانی‌ها و چه زمانی از درصدها استفاده کرد؟ **وقتی که فراوانی درجه کمتر است → فرازان**
- نمودارهای مبله‌ای افقی درست شبیه نمودارهای مبله‌ای عمودی هستند. **با این فضای بزرگ محورها چرخیده‌اند. نمودارهای مبله‌ای عمودی مرسوم‌تر هستند. به نظر شما سیم نمودارهای مبله‌ای افقی چه زمانی مفید است؟ وقتی که اسم رددها طولانی هستند.**
- سن بازیکنان تیم ملی فوتبال یک کشور به شرح زیر است:

۲۷|۲۴|۲۶|۲۶|۲۹|۱۹|۳۱|۱۸|۲۳|۲۵|۲۶|۲۷|۲۳|۲۵|۲۵|۳۳|۳۱|۲۱|۲۶|۲۵

الف) نمودار نقطه‌ای رسم کنید و مقادیر میانگین، مد و میانه سن بازیکنان این تیم روی محور افقی نشان دهید.

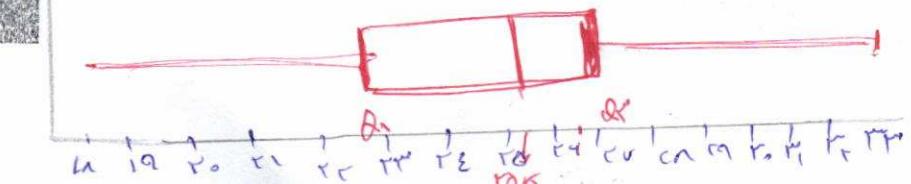
ب) نمودار جعبه‌ای داده‌ها را رسم کنید.

پ) تعداد بازیکنانی که سن آنها بیشتر از میانگین است، بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها از میانگین کمتر است؟ **بیشتر میانگین (۱۱.۱) کمتر میانگین (۱۰.۸)**

ت) تعداد بازیکنانی که سن آنها بالاتر از میانه است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها از میانه کمتر است؟ میانه و میانگین را در این بررسی مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ **۱۰**

ث) چه تعداد از بازیکنان سن آنها بین چارک اول و سوم قرار دارد؟ آیا بدون محاسبه چارک‌ها می‌توانستید

به این سؤال پاسخ دهید؟ **بیش از ۱۰٪ از افراد میانگین را در بین چارک اول و سوم حداکثر**



# درس ۲

## نمودارهای چندمتغیره

### فعالیت

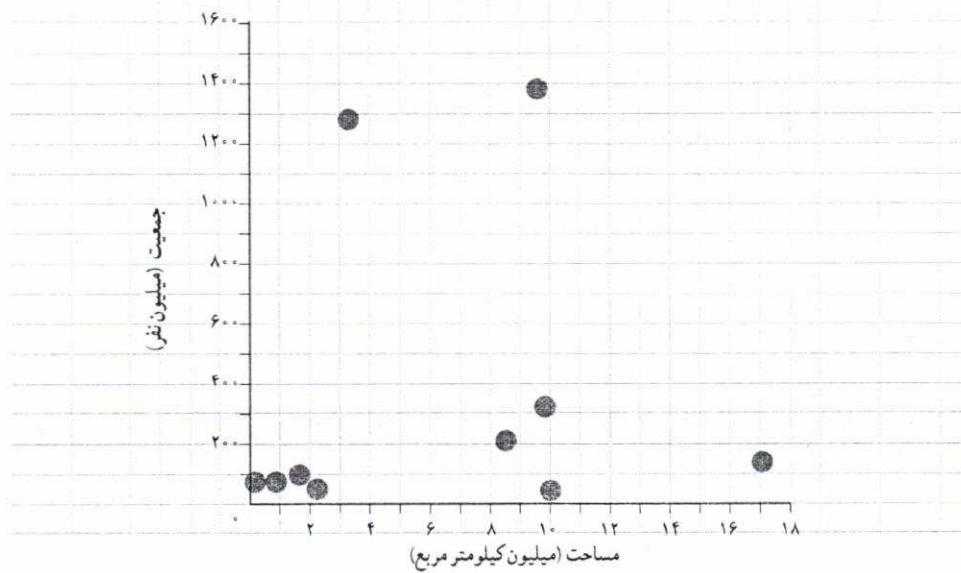


پوریا علاقه زیادی به جغرافیا دارد. او فهرستی از مقادیر سه متغیر مربوط به ۱۰ کشور را تهیه کرده است:

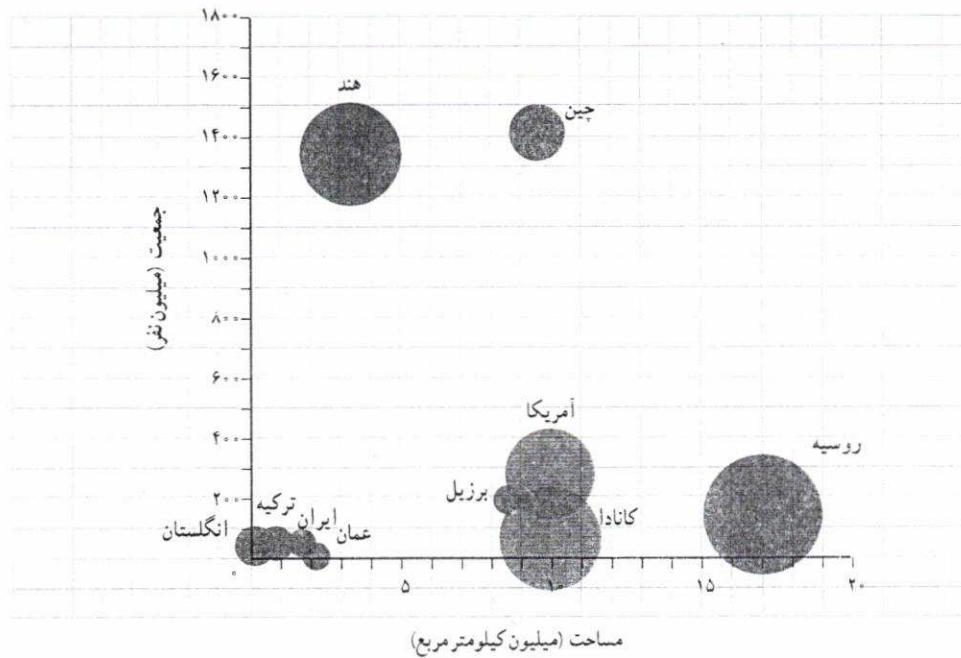
نام کشور	جمعیت (نفر)	مساحت (کیلومتر مربع)	آب‌ها (درصد)
ایران	۷۹,۲۰۰,۰۰۰	۱,۶۴۸,۱۹۵	۰/۷۰
آمریکا	۳۲۲,۳۶۹,۳۱۹	۹,۸۵۷,۳۰۶	۷/۱۰
انگلستان	۶۴,۷۱۶,۰۰۰	۲۴۲,۴۹۵	۱/۳۴
برزیل	۲۰۵,۳۳۸,۰۰۰	۸,۰۵۰,۷۶۷	۰/۶۵
ترکیه	۷۹,۴۶۳,۶۶۳	۸۱۴,۰۷۸	۱/۳۰
چین	۱,۳۷۶,۰۴۹,۰۰۰	۹,۰۵۶,۹۶۱	۲/۸۰
روسیه	۱۴۴,۱۹۲,۴۵۰	۱۷,۰۹۸,۲۴۲	۱۳/۰۰
عمان	۳۰,۷۷۰,۳۷۵	۲,۱۴۹,۶۹۰	۰/۷۰
کانادا	۳۶,۰۴۸,۰۵۲۱	۹,۹۸۴,۶۷۰	۸/۹۲
هند	۱,۲۷۶,۲۶۷,۰۰۰	۳,۲۸۷,۲۶۳	۹/۶۰

پوریا می‌داند که برای هر کدام از متغیرهای مربوط به کشورها؛ یعنی مساحت و جمعیت و درصد آب‌ها، می‌تواند نموداری میله‌ای رسم کند. برای هر چهت از این متغیرها هم می‌تواند پراکنش نگاشت رسم کند (متلاً نمودار جمعیت در مقابل مساحت): اما این سؤال برایش مطرح است که آیا راهی وجود دارد تا هر سه متغیر مربوط به این کشورها را به طور همزمان فقط در یک نمودار نشان دهد؟

## برآکنش نگاشت جمعیت در مقابل مساحت کشورها



پوریا همین طور که به برآکنش نگاشت جمعیت در مقابل مساحت کشورهای نگاه می کرد، ناگهان به این فکر افتاد که اندازه نقطه های نمودار را متناسب با درصد آب های کشورهای رسم کند. پس نموداری به شکل زیر کشید:



به این ترتیب، او موفق شد سه متغیر مربوط به کشورها را در یک نمودار، نمایش دهد. نموداری که پوریا رسم کرد، به نام نمودار حبابی معروف است.



هر نقطه یا دایره در نمودار حبابی، در واقع یک سه‌تایی مرتب به صورت (۷۱، ۷۲، ۷۳) را مشخص می‌کند،  
که در آن داریم:

۷۱: موقعیت نقطه روی محور افقی،

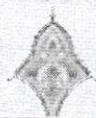
۷۲: موقعیت نقطه روی محور عمودی،

۷۳: اندازه نقطه (مساحت دایره).

نمودارهای حبابی را می‌توان گونه خاصی از پراکنش نگاشت دانست که برای نمایش همزمان سه متغیر عددی به کار می‌روند و در آنها به جای نقطه از دایره‌های توپر استفاده می‌شود.

سیستم بینایی انسان به طور طبیعی اندازه یک دایره را بر اساس مساحت آن در نظر می‌گیرد. مساحت دایره هم بر خلاف قطر یا محیط آن، متناسب با شعاع دایره نیست؛ بلکه متناسب با توان دوم شعاع است. پس اگر شعاع دایره‌ها را دقیقاً متناسب با مقادیر متغیر سوم در نظر بگیریم، اختلاف ظاهری اندازه دایره‌ها غیر واقعی و گمراه کننده خواهد بود. برای برطرف کردن این مشکل باید شعاع دایره‌ها را متناسب با جذر مقادیر متغیر سوم در نظر گرفت.

توجه: متغیر سوم در نمودارهای حبابی باید دارای مقادیر منفی با صفر باشد.



اطلاعات اضافی درباره  
واحدهای آماری (علاوه بر  
سه متغیر اصلی) را می‌توان  
با استفاده از رنگ‌ها و  
طرح‌های متفاوت دایره‌ها  
کرد. مثلاً در نمودار مربوط  
به درصد آب‌های کشورها  
می‌توان فاره‌های مختلف را  
با رنگ‌های متفاوت دایره‌ها  
مشخص کرد. اگر علاوه  
بر آن بخواهیم زبان رسمی  
کشورها را هم در نمودار  
مشخص کنیم، چه راهی  
بسیه‌هایی کنید؟

## کار در کلاس

قد و وزن و نمره درس‌های ریاضی و ادبیات فارسی دانش‌آموزان کلاس را مشابه آنچه در فعالیت دیدید، در یک جدول یادداشت کنید.

برای هر کدام از دسته‌های سه‌تایی متغیرهای زیر، نمودار حبابی رسم کنید:

(الف) قد، وزن، نمره ادبیات فارسی

(ب) قد، وزن، نمره ریاضی

(پ) قد، نمره ریاضی، نمره ادبیات فارسی

سپس در هر نمودار، جای متغیرهای اچنان عوض کنید؛ به طوری که دایره‌ها هر بار، نشان‌دهنده یکی از متغیرهای باشند.

## تمرین



۱. مقدار متغیر سوم در نمودار حبابی، متناسب با کدام یک از موارد زیر است؟

(الف) شعاع دایره‌ها

(ب) قطر دایره‌ها

✓ (ت) مساحت دایره‌ها

(پ) محیط دایره‌ها

۲. نمودارهای حبابی برای نمایش چند متغیر عددی در یک نمودار به کار می‌روند؟

(الف) یک متغیر

(ب) دو متغیر

✓ (ت) محدودیتی ندارد

(پ) سه متغیر

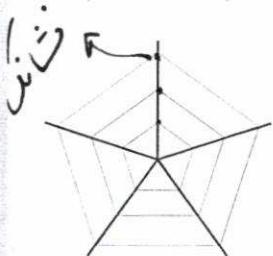
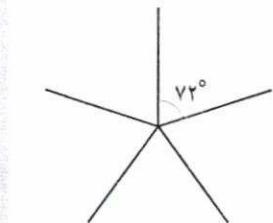


## فعالیت

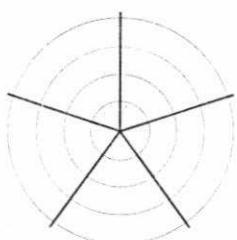


نمودار راداری، روشی برای نمایش داده‌های چندمتغیره در قالب نموداری دوبعدی است، که در آن سه متغیر کمی یا بیشتر بر روی محورهای نشان داده می‌شوند که نقطه شروع همه آنها یکی است. محل قرارگیری و زاویه محورها نسبت به یکدیگر، هیچ اطلاعات خاصی را بیان نمی‌کند.

نمودار راداری از چند خط (به طور دقیق‌تر: نیم‌خط) به‌شکل پرده‌های چرخ دوچرخه تشکیل می‌شود که در نقاطی مرکزی به یکدیگر اتصال دارند و با زاویه‌های یکسان بین هم، گردانید آن نقطه قرار گرفته‌اند. هر کدام از این خطوط، در واقع یک محور و نشان دهنده یک متغیر است؛ پس می‌توانند درجه‌بندی شوند. به این خطوط، اصطلاحاً شعاع‌های نمودار راداری می‌گویند.



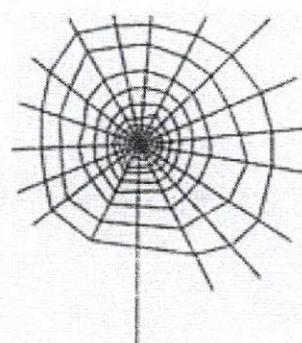
اگر درجه‌بندی شعاع‌ها به گونه‌ای انجام گیرد که فاصله بین نشانک‌های متواലی بر روی همه شعاع‌ها یکسان باشد، می‌توان خطوط راهنمای مقادیر را هم رسم کرد؛ به‌شرطی که باعث شلوغی نمودار نشود.

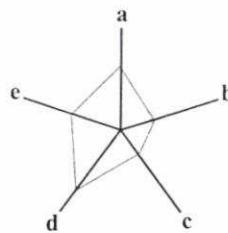


گاهی این خطوط راهنمای راست‌خط به صورت خط خم و دائرة رسم می‌کنند. در این حالت، نمودار واقعاً شبیه صفحه نمایش رادار می‌شود.

## خواندنی

از آنجا که نمودار راداری گاهی شبیه تار عنکبوت است، عده‌ای به آن «نمودار تار عنکبوتی» هم می‌گویند. اگر خطوط راهنمای رسم شوند، این نمودار ممکن است شبیه یک ستاره شود. به همین دلیل، آن را «نمودار ستاره‌ای» هم می‌نامند. البته نام‌های دیگری هم برای این نمودار وجود دارد.





نسبت مقدار یک متغیر، برای یک مشاهده به بیشینه آن متغیر بازی همه مشاهده‌ها، اندازه آن مقدار روی شعاع مربوط را مشخص می‌کند.  
این کار را برای همه متغیرها و بر روی همه شعاع‌ها انجام می‌دهیم. سپس نقاط مشخص شده روی شعاع‌های مجاور به ازای هر مشاهده را به هم وصل می‌کنیم. به این ترتیب، نمودار راداری برای یک مشاهده به دست خواهد آمد. اگر نمودار مربوط به دو یا چند مشاهده را روی هم بینازیم، می‌توانیم مشاهده‌ها را با هم مقایسه کنیم.

نمودار راداری به ما می‌گوید:

- کدام مشاهده‌ها شبیه به یکدیگرند؟
- آیا داده دورافتاده‌ای وجود دارد؟
- مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به متغیرهای دیگر بیشتر یا کمتر است؟
- مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به مشاهده‌های دیگر بیشتر یا کمتر است؟

از این نمودار در ورزش برای شناساندن میزان قدرت و ضعف بازیکنان نسبت به یکدیگر استفاده می‌شود.



**یادآوری:** منظور از مشاهده یا نقطه داده‌ای در آمار، مجموعه‌ای است شامل یک یا چند مقدار اندازه‌گیری شده برای یک عضو جامعه آماری (= واحد آماری).

مثلًاً اگر واحدهای آماری، دانش‌آموزان کلاس باشند و سن و قد و وزن و گروه خونی آنان را ثبت کنیم، مجموعه مقادیر این متغیرها برای هر کدام از دانش‌آموزان، یک «مشاهده» است.

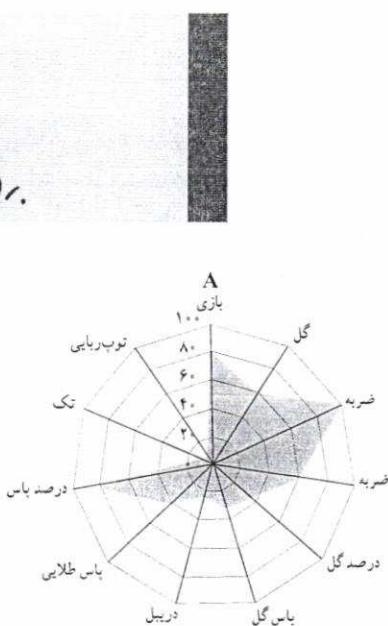
❖ مثال: نامزدهای نهایی دریافت جایزه «توب طلا» در سال ۲۰۱۳ میلادی سه بازیکن A و B و C بودند که در نهایت، جایزه به بازیکن A تعلق گرفت.

برای اینکه بینیم آیا این انتخاب عادلانه بوده است یا نه، داده‌های گردآوری شده از این سه بازیکن در طول فصل ۱۳-۲۰۱۲ را بررسی می‌کنیم. (همه داده‌ها، به جز تعداد بازی، به صورت میانگین مقادیر اندازه‌گیری شده در طول هر ۹۰ دقیقه محاسبه شده‌اند.)

توب طلای فدراسیون بین‌المللی فوتیال (فیفا)، جایزه‌ای است که هر سال توسط فیفا و مجله فرانس فوتیال به بهترین بازیکن فوتیال مرد داده می‌شود. انتخاب بهترین بازیکن بر اساس رأی گیری از نایندگان رسانه‌های بین‌المللی و سراسریان و کاپیتان‌های تیم‌های ملی فوتیال صورت می‌گیرد.

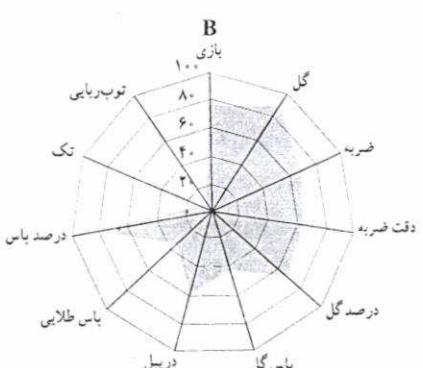
متغیر	A	B	C	بیشینه
تعداد بازی	۳۰/۱	۲۹/۱	۲۲/۵	۳۸
گل زده (غیر از پنالتی)	۰/۹۳	۱/۴۴	۰/۴۳	۱/۶
ضریبه به سمت دروازه	۷/۷۸	۵/۶	۲/۷۷	۸
دقت ضربه (درصد)	۴۴/۶	۴۹/۱	۴۷/۷	۷۵
ضریبهای گل شده (درصد)	۱۴/۵	۲۸	۱۵/۳	۴۰
پاس گل	۰/۲۳	۰/۴۱	۰/۶	۱
دریبل موفق	۱/۸۹	۴/۱۹	۵/۲	۷
پاس طلای (مهم)	۲/۰۵	۱/۰۸	۲/۶۶	۵
پاس‌های موفق (درصد)	۷۶/۸	۸۵	۸۷/۸	۹۵
تک (نکل)	۰/۴۶	۰/۶۵	۱/۱۵	۶
توب‌ریابی	۰/۳	۰/۲۴	۰/۸۹	۶

نوروز  
نوروز  
نوروز  
نوروز



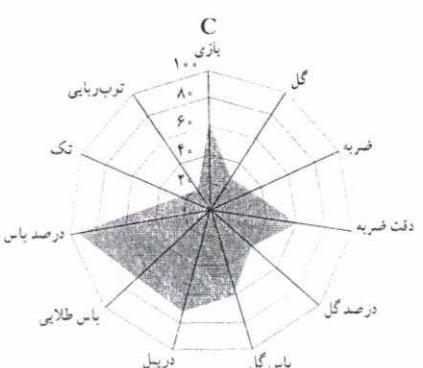
اکنون نمودار راداری مربوط به هر سه بازیکن را رسم می‌کنیم.

مالحظه می‌شود که تعداد ضربه‌های بازیکن A به سمت دروازه، تقریباً به حدنهایی نمودار رسیده است. یعنی تعداد ضربه‌های او به سمت دروازه، بیشتر از هر بازیکن دیگری در جهان بوده است؛ اما از سوی دیگر، تعداد دریبل‌های موفق او بهویره نسبت به دو نامزد دیگر، خیلی کم است.

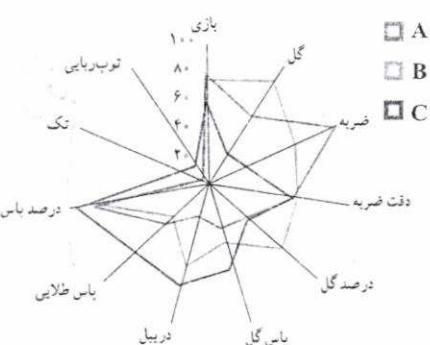


تعداد گل‌های زده بازیکن B در جریان بازی، تزدیک به حدنهایی نمودار شده و از این لحاظ، او جزء برترین‌های جهان بوده است. درصد ضربه‌هایی هم که او به سمت دروازه زده و گل شده (درصد گل)، بسیار زیاد است. بهطور کلی، ناحیه مربوط به گل زدن در نمودار B، وسعت زیادی دارد.

نمودار C به‌شکل جدایی کاملاً متفاوت با نمودار دو نامزد دیگر است. علت این موضوع، نقش متفاوت او در زمین است.



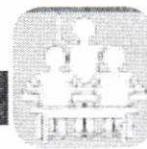
نمودارهای A و B شباهت زیادی به هم داشت. آنان از بزرگ‌ترین گلزنان اند؛ اما بازیکن C یک «گل‌ساز» بزرگ است. با اینکه آمار تعداد گل‌های او برای یک هافبک کناری، بسیار خوب است و درصد ضربه‌هایی گل شده‌اش نیز عالی است، درخشش اصلی او در آمار پاس و دریبل است. بینندگی ناحیه مربوط به پاس و دریبل در نمودارش چه وسعت زیادی دارد.



اگر داده‌های مربوط به هر سه نفر را در قالب یک نمودار رسم کنیم، شاید مقایسهٔ بین آنان آسان‌تر شود. اکنون آیا می‌توانید بگویید که کدام بازیکن، شایستگی بیشتری برای دریافت توب طلای سال ۲۰۱۳ میلادی داشت؟

D

## کار در کلاس

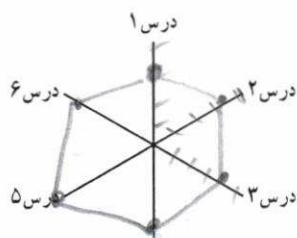


آموزگاران شش درس را انتخاب و برای شما به صورت زیر فهرست می‌کند:

- ۱. ریاضی دوازدهم ..... ۱۶
- ۲. حفظ ..... ۱۵
- ۳. عربی ..... ۱۷
- ۴. مکانیک ..... ۱۸
- ۵. فیزیک ..... ۱۹
- ۶. ادبیات ..... ۲۰

(الف) نمودار راداری نمره‌های خود را به صورت

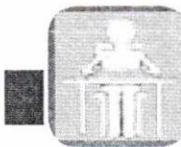
مقابل رسم کنید:



(ب) نمودار خود را با یکی دیگر از دانش آموزان  
ادغام کنید و با کمک یکدیگر، نمودار جدیدی  
رسم کنید.

(پ) به نظر شما نمره‌های کدامتان بهتر است؟ **حرنمودار را در روزی که بفرز**.

## تمرین



۱. نمودار راداری برای نمایش داده‌های چند متغیر کمی به طور همزمان به کار می‌رود؟ **۳ یا سه**
۲. زاویه بین شعاع‌های مجاور در نمودار راداری، چه چیزی را نشان می‌دهد؟ **واکسے میانگین متغیرهاست**
۳. نمودار راداری چه چیزی به ما می‌گوید؟ **نمودار حاصل را مشخص نمی‌کند**
۴. کاربرد نمودار راداری در ورزش چیست؟ **قدرت و حفظ بزرگی**
۵. اگر زاویه بین دو شعاع مجاور در نمودار راداری،  $40^\circ$  درجه باشد، چند متغیر در نمودار حضور دارد؟
۶. داده‌های زیر را که مربوط به شاخص‌های سلامت است، در قالب یک نمودار راداری نمایش دهید:

متغیر	ایران	پاکستان	ترکیه	بیشینه
عمر مورد انتظار در بدو تولد (سال)	۸۴	۷۵/۸	۶۶/۴	۷۵/۵
نسبت متخصصان سلامت (به ازای هر ۱۰ هزار نفر جمعیت)	۲۴۵	۴۱/۱	۱۴/۰	۲۳/۰
نسبت ولادت‌ها به وسیله متخصصان سلامت (درصد)	۱۰۰	۹۷	۵۲	۹۶
نسبت جمعیت دارای دسترسی به شبکه فاضلاب	۱۰۰	۹۵	۶۴	۹۰
شاخص آمادگی اجرای مقررات بین‌المللی سلامت	۱۰۰	۷۸	۴۳	۸۵

مجموع

(داده‌ها برگرفته از گزارش آماری سازمان جهانی بهداشت، سال ۲۰۱۶ میلادی)

- \* منابع
۱. آنسته (۱۳۹۵)، ترجمه‌ها و سوابق آماری، جانه آمار اصفهان
  ۲. ج. بهبودسان (۱۳۹۳)، آمار و احصای مقدماتی، انتشارات استان قليس
  ۳. گسروه مولفان (۱۳۹۵)، آمار و مدل‌سازی، وزارت آموزش و پرورش
  ۴. C. H. Brase and C. P. Brase (2012). Under-standable Statistics, Brooks/Cole.
  ۵. D. Griffiths (2009). Head First Statistics, O'Reilly Media.
  ۶. S. McKillup (2004). Statistics Explained: An Introductory Guide for Life Scientists, Cambridge Univ. Press.
  ۷. A. J. Vickers (2009). What is a p-value anyway? 34 Stories to Help You Actually Under-stand Statistics, Pearson.
  ۸. Written by Volunteers (2014). Everything Maths: Grade 10 and 11 Mathematical Literacy, Siyavula.



در ۳: کدام سه شرط هستند که باید در رادار رجروار - مقدار کدام متغیر برای بزرگی داشتند تا مجموعه‌ای رگرسیونی باشد. مقدار کدام متغیر لیست شده‌ها که در رادار رجروار بزرگ است