

درس اول: معادله و مسائل توصیفی

صفحه ۲۶

فعالیت



با توجه به شکل زیر یک معادله طرح کنید و ریشه آن را بیابید.



عددی را بیابید که سه برابر آن به علاوه‌ی عدد یک، برابر با هفت باشد؟

$$3x + 1 = 7 \Rightarrow 3x = 7 - 1$$

$$3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

صفحه ۲۶

فعالیت



عددی بیابید که دو برابر آن به علاوه‌ی عدد یک، برابر با پنج برابر همان عدد منهای چهار باشد.

جواب: عدد موردنظر را x در نظر می‌گیریم. با توجه به فرض:دو برابر آن عدد به علاوه‌ی عدد یک معادل $2x + 1$ و پنج برابر همان عدد منهای عدد چهار معادل $5x - 4$ است که باید با یکدیگر برابر باشند یعنی:

$$2x + 1 = 5x - 4$$

با بردن جملات شامل x به یک طرف تساوی و بردن اعداد ثابت به طرف دیگر تساوی:

$$5x - 2x = 1 + 4 \Rightarrow 3x = 5$$

و با تقسیم هر طرف تساوی بر عدد سه جواب معادله به دست می‌آید:

$$x = \frac{5}{3}$$

هر معادله به صورت $ax + b = 0$ که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است را یکمعادله درجه اول می‌نامند. جواب این معادله از $x = -\frac{b}{a}$ به دست می‌آید. (چرا؟)

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

اگر در معادله به جای x ، $-\frac{b}{a}$ را قرار دهیم حاصل تساوی صفر می‌شود.

صفحه ۲۷

کار در کلاس



یک حواصیل خاکستری دسته‌ای از حواصیل‌های سفید را در جنگل حرا در جزیره قشم دید. به یکی از آنها گفت: اجازه می‌دهید من هم در گروه شما باشم و با شما پرواز کنم؟



یکی از آنها پاسخ داد: اگر معمای زیر را حل کنی تو هم در گروه ما خواهی بود و ادامه داد:
 «ما و ما و نصف ما و نصفه ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، جملگی صد می شویم.»
 لطفاً به پرنده کمک کنید تا تعداد پرندگان گروه را تعیین کند و عضوی از گروه آنها باشد. اگر «ما» را x فرض کنیم:

$$1 + \text{نصف ما} + \text{نصف ما} + \text{ما} + \text{ما} = 100$$

$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100$$

$$2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 99 \Rightarrow \frac{11}{4}x = 99 \Rightarrow x = \frac{4 \times 99}{11} = 36$$

آیا معادله به دست آمده از درجه اول است؟ چرا؟ بله، چون بزرگترین درجه x از درجه یک می باشد.

ضرایب a و b کدامند؟ $a = 11$ ، $b = 396$ ، $11x - 396 = 0 \Rightarrow 11x - 99(\times 4) = 0$

صفحه ۲۹

فعالیت



۱. عددی را بیابید که مربع آن، ۳ برابر خود همان عدد باشد.

اگر عدد مورد نظر x فرض شود، مربع همان عدد برابر x^2 و سه برابر همان عدد برابر $3x$ است که باید دو عبارت با یکدیگر برابر باشند. یعنی:

$$x^2 = 3x$$

جوابهای این معادله را می توانید حدس بزنید؟ آیا این معادله بیش از یک جواب دارد؟

بله می توانیم حدس بزنیم. بله دو جواب دارد: ۰ و ۳

از میان مقادیر زیر کدام یک می تواند جواب معادله باشد؟ چرا؟

$$x = 3 \quad \boxed{\times}$$

$$x = 4 \quad \boxed{\times}$$

$$x = -3 \quad \boxed{\times}$$

$$x = 1 \quad \boxed{\times}$$

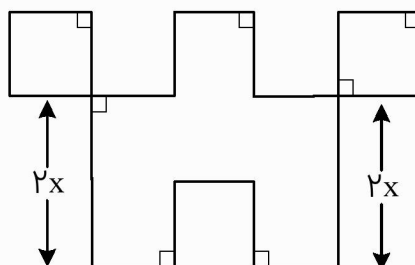
$$x = 0 \quad \boxed{\checkmark}$$

به جز روش حدس برای حل معادله فوق از روش تجزیه نیز می توانیم استفاده کنیم:

$$x^2 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \quad , \quad x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{یا} \quad x = 3$$

معادله درجه دوم، معادله ای به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ است که در آن $a \neq 0$ ضریب x^2 ، b ضریب x و c عدد ثابت است.

۲. در شکل زیر طول تمام پاره خطها به جز دو پاره خط مشخص شده در شکل برابر x است. اگر اندازه مساحت شکل برابر با اندازه محیط آن باشد. مقدار x را به دست آورید.



$$x^2 + x^2 + 2x^2 + 2x^2 + 2x^2 = 4x + 4x + 14x \Rightarrow$$

$$8x^2 = 22x \Rightarrow 4x^2 = 11x \Rightarrow 4x^2 - 11x = 0 \Rightarrow x(4x - 11) = 0$$

$$x = 0 \text{ غ ق ق } \quad 4x - 11 = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{4}$$

صفحه ۳۰

کار در کلاس



نیما از پسر عمویش کیان، سه سال بزرگتر است. اگر حاصل ضرب سن‌های این دو ۴۰ باشد، پسر عموی کوچکتر چند سال دارد؟

اگر سن نیما برابر x باشد، طبق فرض مسئله، سن کیان برابر است. بنابراین: **سن کیان $x - 3$**

$$x \times (x - 3) = 40 \Rightarrow x^2 - 3x - 40 = 0 \Rightarrow (x - 8)(x + 5) = 0$$

$$x = -5 \text{ غ ق ق } \quad x = 8 \text{ سن نیما}$$

آیا می‌توانید جواب‌های معادله فوق را حدس بزنید؟ این معادله از درجه چند است؟

بله، می‌شود حدس زد البته شاید کمی حدس زدن مشکل به نظر برسد و ۸ و ۵ دو عدد هستند که حاصل ضربشان ۴۰ و یکی از دیگری ۳ واحد بزرگتر است، این معادله از درجه ۲ می‌باشد.

این معادله چند جواب دارد؟ آیا عدد منفی هم در معادله صدق می‌کند؟ این جواب در این سوال معنی دارد؟

دو جواب دارد- بله صدق می‌کند- خیر معنی ندارد زیرا سن نمی‌تواند یک عدد منفی باشد.

صفحه ۳۰

تمرین



۱. هر کدام از عبارتهای زیر را به یک معادله تبدیل کنید.

$$5x + 2 = 3x - 2$$

الف) عددی را بیابید که پنج برابر آن به علاوه دو برابر با سه برابر آن عدد منهای دو باشد.

$$x^2 = x + 1$$

ب) مربع عددی برابر با همان عدد به علاوه عدد یک است.

۲. در یک کارخانه حقوق یک مهندس دو برابر یک فن ورز (تکنسین) و $\frac{2}{3}$ مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه ۳ مدیر بخش، ۸ مهندس و ۱۲ فن‌ورز دارد. مدیر عامل کارخانه برای این قسمت ماهیانه ۵۵٫۵ میلیون تومان حقوق پرداخت می‌کند. حقوق یک فن‌ورز در این کارخانه ماهیانه چقدر است؟

$$Z = \text{حقوق مدیر بخش} \quad y = \text{حقوق تکنسین} \quad x = \text{حقوق مهندس}$$

$$x = 2y \Rightarrow y = \frac{x}{2} \quad x = \frac{2}{3}z \Rightarrow z = \frac{3}{2}x \quad 3x + 8x + 12y = 55 / 5 \Rightarrow$$

$$3 \times \left(\frac{3}{2}x\right) + 8x + 12\left(\frac{x}{2}\right) = 55 / 5 \Rightarrow \frac{9x + 28x}{2} = 55 / 5 \Rightarrow 37x = 111 \Rightarrow$$

$$x = \frac{111}{37} = 3 \Rightarrow y = 1 / 5$$

حقوق تکنسین ۱/۵ میلیون تومان است.

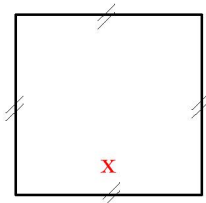
۳. با توجه به پیش‌بینی درخواست بازار آهن، کارخانه ذوب آهن اصفهان، از روز شنبه هر روز تولید خود را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به سقف ۶۴ هزار تن رسیده است. مجموع تولید فولاد در این پنج روز چقدر بوده است؟

شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	
x	$+2x$	$+4x$	$+8x$	$+16x$	$= 31x$
$16x = 64 \Rightarrow x = 4$					
$4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 124$					

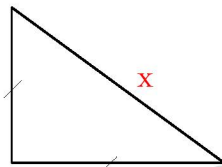
۱۲۴ هزار تن مجموع تولید فولاد در این پنج روز بوده است.

اختلاف تولید فولاد در پایان روز شنبه با تولید فولاد در پایان روز چهارشنبه چقدر است؟
 ۶۰ هزار تن اختلاف تولید فولاد در پایان روز شنبه با تولید فولاد در پایان روز چهارشنبه بوده است.

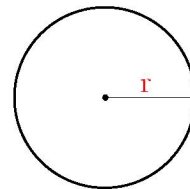
۴. اگر مجموع مساحت‌های سه شکل زیر برابر ۷ باشد، طول ضلع مربع چقدر است؟



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

$$r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x$$

$$x^2 + \frac{x^2}{4} + \pi\left(\frac{1}{2}x\right)^2 = 7 \Rightarrow x^2 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} = 7 \Rightarrow 7x^2 = 28 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

غ ق $x = -2$

طول ضلع مربع $x = 2$



بازی با حروف الفبا به کمک مدل‌سازی ریاضی (رمز نگاری)



۵. حروف الفبای فارسی از «الف» تا «ی» را به ترتیب از ۱ تا ۳۲ شماره‌گذاری کرده‌ایم. هر حرف بدون نقطه با شماره آن حرف از ۱ تا ۳۲ مشخص می‌شود. حروف نقطه‌دار به صورت ax^n مشخص شده‌اند که در آن a شماره حرف الفبا و n تعداد نقاط حرف مورد نظر است. به عنوان مثال حرف «ح» با عدد ۸ مشخص می‌شود. زیرا هشتمین حرف الفبای فارسی است و حرف «ت» با عبارت $4x^2$ مشخص می‌شود زیرا چهارمین حرف الفبا است ($a = 4$) و دارای دو نقطه است ($n = 2$).

در این روش برای نوشتن کلمات از علامت جمع به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

مثلاً برای معادل ریاضی کلمه «غنچه»:

ه	+ ج	+ ن	+ غ	غنچه:
↓	↓	↓	↓	
۳۱	+ ۷x ^۳	+ ۲۹x	+ ۲۲x	
معادل ریاضی				
غنچه → ۲۲x + ۲۹x + ۷x ^۳ + ۳۱				

حال با توجه به توضیح فوق:
الف) جدول زیر را کامل کنید:

کلمه به زبان فارسی	مدل ریاضی معادل آن
آب	$1 + 2x$
پا	$3x^3 + 1$
ذرت	$11x + 12 + 4x^2$

ب) مدل ریاضی معادل کلمه «پیامبر رحمت» را مشخص کنید.

	ر	ح	م	ت		
	↑	↑	↑	↑		
	۱۲	۸	۲۵	$4x^2$		
پ	ی	ا	م	ب	ر	$4x^2 + 48$
↑	↑	↑	↑	↑	↑	
$3x^2$	$+32x^2$	$+1$	$+28$	$+2x$	$+14$	رحمت

پ) آیا می‌توانید با این روش نام خود را با رمز ریاضی بیان کنید؟ بله به عهده دانش آموز

ت) با مدل فوق یک پیام کوتاه برای دوست خود بنویسید. به امید صلح در تمام دنیا

$2x$	$+31$	۱	$+28$	$+32x^2$	$+10$	۱۷	$+37$	$+8$	۱۰	$+12$
ب	ه	ا	م	ی	د	ص	ل	ح	د	ر
$4x^2$	$+28$	$+1$	$+28$			۱۰	$+29x$	$+32x^2$	$+1$	
ت	م	ا	م			د	ن	ی	ا	

۶. اگر در یک قالی با ابعاد $2 / 10m \times 2 / 10m$ (که عموماً 2×3 نامیده می‌شود) تعداد گره‌های قالی $5 / 880 / 000$ عدد باشد:
الف) این قالی چند رج است؟

$$2 / 10m \times 2 / 10m = \frac{280}{7} \times \frac{210}{7} = 1200$$

$$7 \times 7 = \text{تعداد گره‌ها در یک مربع} = \frac{5880000}{1200} = 4900$$

$$x \times x = 4900 \Rightarrow x \pm 70 \Rightarrow x = -70$$

$$x = 70$$

این قالی ۷۰ رج است.

ب) اگر برای هر گره $1cm$ نخ قالی یا همان خامه قالی استفاده شود، در این قالی چند متر نخ قالی استفاده شده است؟

$$\text{طول خامه مصرف شده} = 5880000 \times 1cm = 5880000cm = 58 / 800m$$

پ) یک قالی باف حرفه‌ای در یک روز می‌تواند ۶۰۰۰ گره قالی ببافد. اگر این قالی باف ۵ روز در هفته کار کند برای اتمام این قالی چند هفته باید کار کند؟

$$\text{روز } ۹۸۰ = \frac{۵۸۸۰۰۰۰}{۶۰۰۰} = \text{تعداد روزهایی که بافتن قالی طول می‌کشد.}$$

$$\text{هفته } ۱۹۶ = \frac{۹۸۰}{۵} = \text{تعداد هفته‌ها}$$

ت) اگر این قالی باف برای خرید مواد اولیه قالی شامل تار و پود، نخ قالی و... پنج میلیون و ششصد هزار تومان هزینه کرده باشد و بتواند در پایان بافت قالی، آن را به قیمت ۳۵ میلیون تومان بفروشد، این قالی باف برای هر هفته خود چه دستمزدی دریافت کرده است؟

$$\text{تومان } ۲۹۴۰۰۰۰۰ = ۳۵۰۰۰۰۰۰ - ۵۶۰۰۰۰۰ = \text{هزینه‌ها - قیمت فروش قالی} = \text{سود حاصل از بافتن قالی}$$

$$\text{تومان } ۱۵۰۰۰۰ = \frac{۲۹۴۰۰۰۰۰}{۱۹۶} = \text{دستمزد هر هفته}$$

$$\text{تومان } ۳۰۰۰۰ = \frac{۱۵۰۰۰۰}{۵} = \text{دستمزد بافنده به ازای هر روز}$$

درس دوم: حل معادله درجه ۲ و کاربردها

صفحه ۳۵

فعالیت



طرف دوم تساوی‌های زیر را به کمک اتحادهای خوانده شده (مربع دو جمله‌ای، مزدوج و جمله مشترک) کامل کنید:

$$\text{الف) } \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = 4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$$

$$\text{پ) } (x - 2y)(x + 2y) = x^2 - 4y^2$$

$$\text{ث) } \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{9}{4} = -3x$$

$$\text{ب) } (2 + 3xy)^2 = 4 + 12xy + 9x^2y^2$$

$$\text{ت) } x^2 - 8x + 12 = (x - 6)(x - 2)$$



مطابق نمونه، اتحاد جبری پیشنهادی در ستون اول که مناسب برای حل معادله درجه دوم در ستون بعدی است، با یک خط به یکدیگر وصل کنید. سپس معادله فوق را در ستون آخر حل نمایید.

ستون اول	ستون دوم	ستون سوم
اتحاد مربع تفاضل دو جمله	$x^2 + 6x = 0$	$x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x + 6) = 0$ $\Rightarrow x = 0$ یا $x = -6$ پس معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.
عامل‌یابی (فاکتورگیری)	$x^2 + 6x + 9 = 0$	$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 = 0 \Rightarrow$ $(x + 3)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = -3$ یا $x = -3$
اتحاد جمله مشترک	$x^2 - 16 = 0$	روش ۱: $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 4) = 0$ $\Rightarrow x = 4$ یا $x = -4$ روش ۲: $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$
اتحاد مربع مجموع دو جمله	$x^2 + 5x + 6 = 0$	$(x + 3)(x + 2) = 0$ $\Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$
اتحاد مزدوج و ریشه گیری	$x^2 - 10x + 25 = 0$	$x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow$ $(x - 5)^2 = 0 \Rightarrow$ $(x - 5)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 5$ OR $x = 5$

۱. با توجه به معادلات فوق در حالت کلی در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

(الف) اگر $c = 0$ از کدام روش بالا استفاده می‌کنید؟

روش فاکتورگیری (تجزیه)

(ب) در چه صورتی از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنید؟

هرگاه سه جمله داشته باشیم که دو جمله آن مربع کامل باشند و حاصل دو برابر یکی از دو جمله در دیگری نیز وجود داشته باشد.

(پ) برای حل معادله درجه دو به کمک اتحاد مزدوج یا ریشه گیری، b در چه شرطی صدق می‌کند؟ آیا علامت‌های a و c مهم است؟

ضریب b باید صفر باشد a و c مختلف علامه باشند.

^۱ در یک معادله‌ی درجه ۲، اگر دو ریشه، با هم برابر باشند اصطلاحاً می‌گوییم، معادله ریشه مضاعف است.

ت) در کدام یک از اتحادهای فوق جواب معادله ریشه مضاعف محسوب می‌شود؟

اتحادهای مربع مجموع یا تفاضل دو جمله $x^2 + 6x + 9 = 0$, $x^2 = 10x + 25 = 0$

۲. آیا می‌توانید معادله درجه دومی بنویسید که جواب نداشته باشد؟ دو نمونه آن را مشخص کنید.

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 + x + 3 = 0$$

صفحه ۳۷

کار در کلاس



با استفاده از اتحادهای بالا معادلات زیر را حل کنید:

۱) $x^2 + 3x - 4 = 0$

از اتحاد یک جمله مشترک، تساوی را تجزیه کنید:

$$\Rightarrow (x + 4)(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1) = 0 \text{ یا } (x + 4) = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{OR} \quad x = -4 \text{ یا } x = \dots\dots\dots$$

۲) $4x^2 - (2 - x)^2 = 0$

با استفاده از اتحاد مزدوج جملات سمت چپ تساوی را تجزیه می‌کنیم:

$$(2x - (2 - x))(2x + (2 - x)) = 0 \Rightarrow (2x - 2 + x)(2x + 2 - x) = 0 \Rightarrow$$

$$(3x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow 3x - 2 = 0 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

صفحه ۳۷

تمرین



معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow 2(x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow$
 $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$
 $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

ب) $(x + 2)(x - 3) = x - 3 \Rightarrow x^2 - x - 6 = x - 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

پ) $x^6 - 2x^3 = 0 \Rightarrow x^3(x^3 - 2) = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

$$x^3 - 2 = 0 \Rightarrow x^3 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt[3]{2}$$

* اگر عبارتی با توان ۲ برابر صفر باشد، خود آن عبارت را می‌توان مساوی صفر قرار داد.

$$ت) x^2 = x - \frac{1}{4} \Rightarrow 4x^2 = 4x - 1 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x - 1)^2 = 0$$

$$(2x - 1)(2x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} 2x - 1 &\Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ 2x - 1 &\Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$ث) 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad OR \quad x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$ج) x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x - 3 &= 0 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 &= 0 \Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

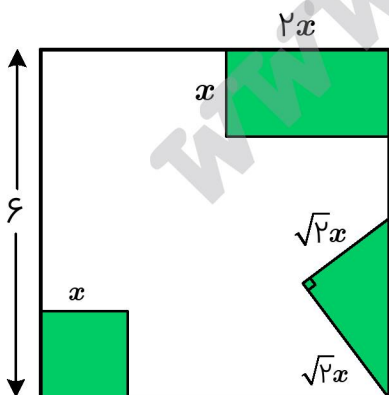
$$چ) \frac{x^2}{3} = x \Rightarrow x^2 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad OR \quad x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$ح) x^2 = 5 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$خ) x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x + 2 &= 0 \Rightarrow x = -2 \\ x + 2 &= 0 \Rightarrow x = -2 \end{aligned}$$

$$د) 9x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow (3x + 2)(3x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} 3x + 2 &= 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \\ 3x - 1 &= 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$ذ) (x - 3)^2 = 4 \Rightarrow (x - 3) = \pm 2 \Rightarrow \begin{aligned} x - 3 &= 2 \Rightarrow x = 5 \\ x - 3 &= -2 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$



۲. از مربعی به ضلع 6cm سه شکل روبه رو بریده شده است. مساحت باقی مانده 24cm^2 است. طول ضلع کوچک بریده شده چقدر است؟

(مساحت قسمت‌های هاشور خورده - مساحت کل مربع = مساحت ناحیه سفید)
(مساحت مستطیل + مساحت مربع + مساحت مثلث قائم الزاویه) - مساحت کل مربع =

$$24 = 6^2 - \left(\underbrace{x \times 2x}_{\text{مساحت مستطیل}} + \underbrace{x^2}_{\text{مساحت مربع}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sqrt{2}x \times \sqrt{2}x}_{\text{مساحت مثلث}} \right)$$

$$24 = 36 - (2x^2 + x^2 + x^2) \Rightarrow 24 = 36 - 4x^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 36 - 24 \Rightarrow 4x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = +\sqrt{3}$$

۳. معادله درجه دومی بنویسید که $x = -۳, x = ۲$ جواب‌های آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

$$x = ۲ \Rightarrow x - ۲ = ۰$$

$$x = -۳ \Rightarrow x + ۳ = ۰ \Rightarrow (x - ۲)(x + ۳) = ۰ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰$$

$$۲x^۲ + ۲x - ۱۲ = ۰$$

خیر، منحصر به فرد نیست، مثلاً:

۴. معادله درجه دومی بنویسید که $x = ۱$ ریشه مضاعف آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

$$x = ۱ \Rightarrow x - ۱ = ۰$$

$$x = ۱ \Rightarrow x - ۱ = ۰ \Rightarrow (x - ۱)(x - ۱) = ۰ \Rightarrow (x - ۱)^۲ = ۰, (۲x - ۲)^۲ = ۰$$

خیر منحصر به فرد نیست، مثلاً:

۵. در معادله $(x - 1)^۲ = K$:

الف) جواب این معادله را در صورت وجود به ازای $K = ۲, K = ۴, K = ۰, K = -۹$ به دست آورید.

$$K = ۲ \Rightarrow (x - 1)^۲ = ۲ \Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{۲} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{۲} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 + \sqrt{۲} \\ x = 1 - \sqrt{۲} \end{matrix}$$

$$K = ۴ \Rightarrow (x - 1)^۲ = ۴ \Rightarrow x - 1 = \pm ۲ \Rightarrow x = 1 \pm ۲ \Rightarrow \begin{matrix} x = ۳ \\ x = -۱ \end{matrix}$$

$$K = ۰ \Rightarrow (x - 1)^۲ = ۰ \Rightarrow (x - 1)(x - 1) = ۰ \Rightarrow \begin{matrix} x - 1 = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x - 1 = ۰ \Rightarrow x = ۱ \end{matrix}$$

سمت چپ تساوی با توجه به توان زوج یک عبارت همواره مثبت می‌باشد در حالی که سمت راست یک عدد منفی قرار گرفته است و این غیر ممکن است.

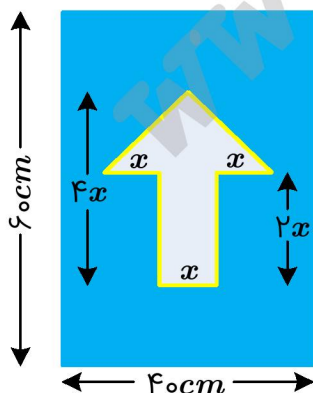
ب) به ازای چه مقادیری از k معادله ریشه مضاعف دارد؟ به ازای $K=0$ معادله ریشه مضاعف دارد.

پ) به ازای چه مقادیری از k معادله دو ریشه حقیقی دارد؟ به ازای $K>0$ معادله دو ریشه حقیقی دارد.

ت) به ازای چه مقادیری از k معادله ریشه (حقیقی) ندارد؟ به ازای $K<0$ معادله ریشه حقیقی ندارد.

۶. برای ساخت تابلوی راهنمایی «یک طرفه» بر روی یک پل، مطابق شکل زیر از برچسب‌های آبی و سفید استفاده می‌شود. هزینه $۱\text{cm}^۲$ برچسب سفید ۳۰ تومان و هزینه $۱\text{cm}^۲$ برچسب آبی ۱۰ تومان است. مجموع هزینه برچسب‌های سفید و آبی ۲۷۰۰۰ تومان شده است.

الف) اندازه x چقدر است؟



$$\text{مساحت مثلث} + \text{مساحت مستطیل} = \text{مساحت قسمت سفید} = (۲x \times x) + \frac{1}{۲}(۳x)(۲x)$$

$$\text{مساحت قسمت سفید} = ۲x^۲ + ۳x^۲ = ۵x^۲$$

$$\text{مساحت قسمت آبی} = \text{مساحت کل} - \text{مساحت قسمت سفید} = ۶۰ \times ۶۰ - ۵x^۲ = ۲۴۰۰ - ۵x^۲$$

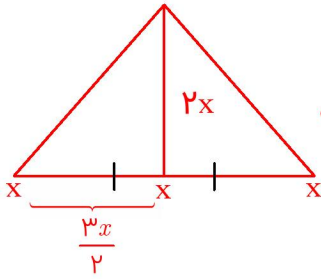
$$\text{هزینه برچسب سفید} = ۵x^۲ \times ۳۰ = ۱۵۰x^۲$$

$$\text{هزینه برچسب آبی} = (۲۴۰۰ - ۵x^۲) \times ۱۰ = ۲۴۰۰۰ - ۵۰x^۲$$

$$\text{هزینه کل} = ۱۵۰x^۲ + ۲۴۰۰۰ - ۵۰x^۲ = ۲۷۰۰۰ \Rightarrow ۱۰۰x^۲ = ۳۰۰۰$$

$$\Rightarrow x^۲ = \frac{۳۰۰۰}{۱۰۰} = ۳۰ \Rightarrow x = \sqrt{۳۰}\text{cm}$$

ب) اگر در این تابلوی راهنمایی، مطابق شکل رو به رو از خطوط برجسب شبرنگ زرد استفاده کنیم که هزینه ۱cm آن ۱۰۰ تومان است، هزینه رنگ آمیزی تابلو ۳۴۸۰۰ تومان می‌شود. در این حالت اندازه x چقدر است؟



$$\text{وتر} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}x\right)^2 + (2x)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}x^2 + 4x^2} = \sqrt{\frac{25x^2}{4}} \Rightarrow \text{طول وتر} = \frac{5}{2}x$$

$$\text{طول برجسب زرد} = x + 2x + x + \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}x + x + 2x = 12x$$

$$\text{هزینه برجسب زرد} = 12x \times 100 = 1200x$$

$$\text{هزینه برجسب زرد} + \text{هزینه برجسب سفید} + \text{هزینه رنگ آمیزی تابلو} = 348000$$

$$(24000 - 50x^2) + (150x^2) + 12x \times 100 = 348000$$

$$100x^2 + 1200x - 108000 = 0 \Rightarrow x^2 + 12x - 108 = 0$$

$$(x + 18)(x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 18 = 0 \rightarrow x = -18 \\ x - 6 = 0 \rightarrow x = 6 \end{cases}$$

صفحه ۴۲

کار در کلاس

با محاسبه مجموع زمان طی کردن پله‌های زیر برای مراحل حل معادله درجه دو در چند ثانیه می‌توانید به بالای پله برسید؟ بهترین نتیجه به دست آمده در کلاس چند ثانیه با عملکرد شما اختلاف دارد؟

۱) $2x^2 - 6x - 1 = 0$

تمرین قبل از مسابقه

$2x^2 - 6x = 1$	$x^2 - 3x = \frac{1}{2}$	$x^2 - 3x = \frac{1}{2}$ $x^2 - 2 \times \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}$ \downarrow $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ <hr/> $x^2 - 2\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{9}{4} = \frac{1}{2} + \frac{9}{4}$	$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$	$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$ $\left\{ \begin{array}{l} x - \frac{3}{2} = + \frac{\sqrt{11}}{2} \\ x - \frac{3}{2} = - \frac{\sqrt{11}}{2} \end{array} \right.$
-----------------	--------------------------	---	---	---

۲) $3x^2 - 2 = 6x$

مسابقه

$3x^2 - 6x = 2$
 $x^2 - 2x = \frac{2}{3}$
 $x^2 - 2x + 1 = \frac{2}{3} + 1$
 $(\frac{x}{2})^2 = 1$
 $x^2 - 2(\frac{x}{2}) + 1 = \frac{2}{3} + 1$
 $(x-1)^2 = \frac{5}{3}$
 $x-1 = \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$
 $x = \frac{3 + \sqrt{15}}{3}$
 $x = \frac{3 - \sqrt{15}}{3}$

صفحه ۴۳

تمرین

معادلات درجه دو زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید.

الف) $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x = -6$

$$x^2 - 5x = -6 \Rightarrow x^2 - 5x + (\frac{5}{2})^2 = -6 + (\frac{5}{2})^2 \Rightarrow x^2 - 5x + \frac{25}{4} = -6 + \frac{25}{4} \Rightarrow$$

$$(x - \frac{5}{2})^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x - \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \\ x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \end{cases}$$

ب) $9x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow 9x^2 + 3x = 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{2}{9}$

$$(\frac{x}{3})^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \quad x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} = \frac{2}{9} + \frac{1}{36} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{36} \Rightarrow$$

$$x + \frac{1}{6} = \pm \frac{\sqrt{5}}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{5}}{6} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{6} \\ x = -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{5}}{6} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{6} \end{cases}$$

پ) $x^2 + \frac{1}{4} = -x \Rightarrow x^2 + x = -\frac{1}{4} \quad \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow (x + \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow (x + \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

ریشه مضاعف

ت) $x^2 + 6x + 9 = 0$

$$(x + 3)^2 = 0 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

ریشه مضاعف

صفحه ۴۴

فعالیت



۱. جواب‌های معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

■ حل: با توجه به ضرایب معادله، به ترتیب: $c = 2$ ، $b = -3$ و $a = 1$ است.
بنابراین:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

○ $\Delta > 0$ پس معادله دارای دو جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = 1$$

۲. جواب‌های معادله $4x^2 + 7x - 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

■ حل: با در نظر گرفتن $c = -2$ ، $b = 7$ و $a = 4$:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 49 - 4 \times 4 \times (-2) = 81$$

○ $\Delta > 0$ و معادله دارای دو جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2 \times 4} = \frac{-7 \pm 9}{8} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-7+9}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ \frac{-7-9}{8} = \frac{-16}{8} = -2 \end{cases}$$

۳. جواب‌های معادله $3x^2 + x + 7 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

■ حل: با در نظر گرفتن $c = 7$ ، $b = 1$ و $a = 3$:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(3)(7) = 1 - 84 = -83$$

○ $\Delta < 0$ بنابراین معادله ریشه حقیقی ندارد.

صفحه ۴۵

کار در کلاس



معادله‌های زیر را حل کنید و با به دست آوردن ریشه‌های معادله x_1 و x_2 حاصل $x_1 + x_2$ را به دست آورید. آیا ارتباطی میان مجموع ریشه‌ها و ضرایب a ، b و c در معادله درجه دو گفته شده وجود دارد؟

الف) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

$$\Delta = 25 - 4(3)(-2) \Rightarrow \Delta = 49$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2(3)} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm 7}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

ب) $4x^2 + 3x - 7 = 0$

$$\Delta = 9 - 4(4)(-7) \Rightarrow \Delta = 9 + 112 = 121 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 11}{8} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{14}{8} = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$$

بله، مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ می‌باشد.



طرح و حل چند مسأله کاربردی از معادله درجه دو



مسأله اول:

مقدمه: در هر مسأله اقتصادی اگر X مقدار یا تعداد محصول باشد، سه تابع مهم زیر تعریف می‌شوند:

تابع هزینه (cost) یا $C(x)$: هزینه تولید x واحد کالا

تابع سود (profit) یا $P(x)$: سود حاصل از فروش x واحد کالا

تابع درآمد (Revenue) یا $R(x)$: درآمد حاصل از فروش x واحد کالا

رابطه میان ۳ تابع فوق به صورت زیر است:

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow \text{سود} = \text{درآمد (فروش)} - \text{هزینه}$$



فرض کنید شما یک دوچرخه جدید طراحی کرده‌اید و پس از آزمایش‌ها و تأییدهای اولیه می‌خواهید اقدام به تولید انبوه این دوچرخه کنید.

هزینه‌های شما شامل ۲ بخش هستند:

۱- هزینه اولیه شامل ۷ میلیون تومان برای خرید دستگاه‌های کارخانه و تبلیغات.

۲- هزینه تولید که عبارت است از ۱۱۰ هزار تومان برای ساخت هر دوچرخه.

اگر v قیمت یک دوچرخه باشد و تعداد فروش دوچرخه از رابطه $200v - 70/1000$ به دست آید:

الف) تابع سود کارخانه را به دست آورید.

ب) سود کارخانه پس از تولید چند دوچرخه حاصل می‌شود؟

■ حل:

$$R(x) = \text{درآمد} = xV = (70 / 000 - 200v)(v)$$

$$C(x) = \text{هزینه} = 7000000 + 110(70000 - 200v) = 7000000 + 7700000 - 22000v$$

$$P(x) = \text{سود} = R(x) - C(x)$$

$$= 70,000v - 200v^2 - (14,700,000 - 22,000v)$$

$$= 70,000v - 200v^2 - 14,700,000 + 22,000v$$

$$= -200v^2 + 92,000v - 147,000,000$$

مسئله دوم:

در یک کارگاه تولید چتر، سود حاصل از فروش x چتر از رابطه به دست می‌آید.

الف) اگر این کارگاه چتری نفروشد چقدر از دست می‌دهد؟



$$\text{چتر نفروشد} \rightarrow x = 0 \rightarrow P(0) = -100$$

ب) نقطه سر به سر (break-even) میزانی از تولید یک بنگاه اقتصادی را نشان می‌دهد که در آن میزان هزینه‌ها با میزان درآمدها برابر می‌شود و بنگاه در این سطح از تولید نه سود می‌کند و نه ضرر. اگر تولید بیشتر از نقطه سر به سر باشد بنگاه سود خواهد برد و اگر کمتر باشد، زیان خواهد دید. در مثال بالا به ازای چه تعداد فروش چتر، کارگاه به نقطه سر به سر خود می‌رسد؟ چندمین تولید چتر برای کارگاه سودآور است؟

$$\text{نه سود و نه ضرر} \rightarrow P(x) = 0 \rightarrow -0 / 00405x^2 + 8 / 15x - 100 = 0$$

$$\Delta = (8 / 15)^2 - 4(-0 / 00405)(-100) = 8 / 05$$

$$x = \frac{-8 / 15 \pm \sqrt{8 / 05}}{2(-0 / 00405)} = \frac{2000}{12 / 3}$$

۱۲/۳ قابل قبول نیست، زیرا تعداد چتر باید یک عدد طبیعی باشد.

صفحه ۴۷

تمرین

۱. معادله‌های درجه دوم زیر را حل کنید.

۱) $x^2 - x + 5 = 0$

$$a = 1 \quad b = -1 \quad c = 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(5) = 1 - 20 = 19 < 0 \quad \Delta < 0$$

چون Δ منفی است معادله ریشه حقیقی ندارد.

$$۲) ۲x^۲ + x - ۱ = ۰$$

$$a = ۲ \quad b = ۱ \quad c = -۱$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۱)^۲ - ۴(۲)(-۱) = ۱ + ۸ = ۹ > ۰$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۱ \pm \sqrt{۹}}{۲(۲)} = \frac{-۱ \pm ۳}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{-۱ + ۳}{۴} = \frac{۲}{۴} \\ x_۲ = \frac{-۱ - ۳}{۴} = -۱ \end{cases}$$

$$۳) ۴x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$$

$$a = ۴ \quad b = -۴ \quad c = ۱$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۴)^۲ - ۴(۴)(۱) = ۱۶ - ۱۶ = ۰$$

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-(-۴)}{۲(۴)} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

معادله ریشه مضاعف دارد.

$$۴) x^۲ + ۱۷x - ۱۸ = ۰$$

$$a = ۱ \quad b = ۱۷ \quad c = -۱۸$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (۱۷)^۲ - ۴(۱)(-۱۸) = ۲۸۹ + ۷۲ = ۳۶۱ > ۰$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۱۷ \pm \sqrt{۳۶۱}}{۲(۱)} = \frac{-۱۷ \pm ۱۹}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-۱۷ + ۱۹}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱ \\ \frac{-۱۷ - ۱۹}{۲} = \frac{-۳۶}{۲} = -۱۸ \end{cases}$$

$$۵) ۳x^۲ - x + ۴ = ۰$$

$$a = ۳ \quad b = -۱ \quad c = ۴$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = ۱ - ۴(۳)(۴) = -۴۷ < ۰$$

چون Δ منفی است معادله ریشه حقیقی ندارد.

$$۶) x^۲ + \sqrt{۳}x - ۱ = ۰$$

$$a = ۱ \quad b = \sqrt{۳} \quad c = -۱$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (\sqrt{۳})^۲ - ۴(۱)(-۱) = ۳ + ۴ = ۷$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-\sqrt{۳} \pm \sqrt{۷}}{۲(۱)} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{-\sqrt{۳} + \sqrt{۷}}{۲} \\ x_۲ = \frac{-\sqrt{۳} - \sqrt{۷}}{۲} \end{cases}$$

۲. معادله $2x^2 - 3x - 5 = 0$ را به روش Δ حل کنید. با محاسبه ریشه‌های x_1, x_2 حاصل ضرب آنها را به دست آورید.

$$a = 2, \quad b = -3, \quad c = -5 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(-5) = 9 + 40 = 49$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{3 \pm 7}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{5}{2} \times (-1) = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

۳. اگر یکی از جواب‌های معادله $2x^2 - ax + 28 = 0$ برابر -4 باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟

چون یک جواب معادله -4 است، پس می‌توانیم به جای x عدد -4 را جایگزین کنیم.

$$x = -4 \Rightarrow 2(-4)^2 - (-4)a + 28 = 0 \Rightarrow 32 + 4a + 28 = 0 \Rightarrow 4a = -28 - 32$$

$$4a = -60 \Rightarrow a = -\frac{60}{4} = -15$$

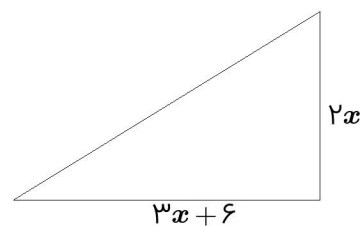
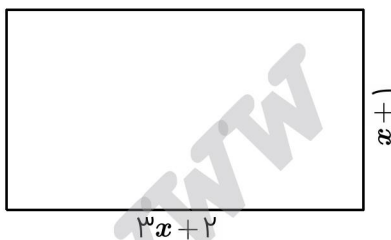
پس معادله به صورت $2x^2 - (-15)x + 28 = 0$ تبدیل می‌شود:

$$2x^2 - (-15)x + 28 = 0 \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 15 \\ c = 28 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (15)^2 - 4(2)(28) = 225 - 224 = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15 \pm \sqrt{1}}{2(2)} = \frac{-15 \pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-15 + 1}{4} = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2} \\ \frac{-15 - 1}{4} = \frac{-16}{4} = -4 \end{cases}$$

۴. در زیر مساحت مثلث و مستطیل رسم شده مساوی هستند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟



$$(x+1)(3x+2) = \frac{(3x+6)(2x)}{2} \Rightarrow 3x^2 + 2x + 3x + 2 = 3x^2 + 6x$$

$$\Rightarrow 5x + 2 = 6x \Rightarrow x = 2$$

$$x + 1 = 2 + 1 = 3 \text{ عرض مستطیل}$$

$$3x + 2 = 3(2) + 2 = 8 \text{ طول مستطیل}$$

۵. کدام یک از معادلات زیر به ازای هر مقدار a همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟

الف) $x^2 + ax - 1 = 0$

$a = 1 \quad b = a \quad c = -1$

$\Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 4(1)(-1)$

$\Rightarrow a^2 + 4 > 0 \Rightarrow \Delta > 0$

بنابراین همواره دارای جواب‌های حقیقی است.

ب) $x^2 - x + a = 0$

$a = 1 \quad b = -1 \quad c = a$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(a)$

$\Rightarrow 1 - 4a$

$1 - 4a \geq 0 \Rightarrow -4a \geq -1 \Rightarrow 4a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{4}$

بستگی به مقدار a دارد اگر $a \leq \frac{1}{4}$ انتخاب شود جواب حقیقی

وجود دارد در غیر این صورت جواب حقیقی ندارد.

۶. نشان دهید در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a + c = b$ باشد. یکی از ریشه‌های معادله برابر $x = -1$ و دیگری $x = -\frac{c}{a}$

است.

$ax^2 + (a + c)x + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (a + c)^2 - 4ac = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac = a^2 + c^2 - 2ac = (a - c)^2$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(a + c) \pm (a - c)}{2a}$

$x_1 = \frac{-a - c + a - c}{2a} = -\frac{c}{a} \quad x_2 = \frac{-a - c - a + c}{2a} = -\frac{2a}{2a} = -1$

۷. با تعیین ریشه‌های معادله نشان دهید حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ برابر $\frac{c}{a}$ است.

$\Delta = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 + 4ac)}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} - 4ac}{\cancel{4}a^2} = \frac{c}{a}$

۸. نشان دهید در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد ($a + b + c = 0$) یکی از ریشه‌های

معادله $x = 1$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است.

$a + b + c = 0 \Rightarrow b = -a - c \quad ax^2 + (-a - c)x + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-a - c)^2 - 4ac = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2 = (a - c)^2$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-a - c) \pm \sqrt{(a - c)^2}}{2a} = \frac{a + c \pm (a - c)}{2a}$

$x_1 = \frac{a + c + a - c}{2a} = \frac{2a}{2a} = 1 \quad x_2 = \frac{a + c - a + c}{2a} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$

درس سوم: معادله‌های شامل عبارتهای گویا

صفحه ۴۸

فعالیت



علی هر روز صبح با دوچرخه به مدرسه می‌رود، او از درب منزل تا سر خیابان اصلی را ۴ دقیقه رکاب می‌زند و از آنجا تا مدرسه مسافت ۲۵۰۰ متری را از مسیر ویژه دوچرخه سواری با سرعت متوسط ۱۵ کیلومتر بر ساعت طی می‌کند. می‌خواهیم با انجام فعالیت زیر مدت زمانی را که طول می‌کشد علی از منزل به مدرسه برسد را محاسبه کنیم.

۱. دستور محاسبه سرعت متوسط $v = \frac{x}{t}$ است که در آن v سرعت متوسط، x مسافت طی

شده و t مدت زمان طی مسیر می‌باشد. داده‌های مساله را در این دستور جایگزین کنید.

۲. برابری $\frac{2}{5} = 15 = \frac{2}{t}$ یک معادله شامل عبارت گویا $\frac{2}{t}$ است. از آنجا که $t \neq 0$ ، پس معادله با معناست، برای حل این معادله، دو طرف را با -15 جمع کنید.

۳. با مخرج مشترک گیری سمت چپ معادله را به صورت یک کسر بنویسید.

۴. کسری که مخرج آن مخالف صفر است، فقط وقتی برابر با صفر می‌شود که صورت آن صفر شود، بنابراین صورت کسر بالا را برابر با صفر قرار دهید.

۵. از این جا به بعد یک معادله یک مجهولی درجه اول به دست می‌آید، آن را حل کنید و مقدار t را محاسبه نمایید.

۶. مدت زمان رسیدن علی از منزل تا مدرسه چقدر است؟

$$15t = 2/5 \quad \text{زمان بر حسب ساعت} \quad t = \frac{2/5}{15} = \frac{1}{6} \quad \text{ساعت}$$

$$\text{دقیقه} \quad 14 = 10 + 4 = \text{زمان حل} \quad t = \frac{1}{6} \times 60 = 10 \quad \text{زمان بر حسب دقیقه}$$

مدت زمان رسیدن علی از منزل تا مدرسه ۱۴ دقیقه می‌باشد.

برای حل معادله‌های شامل عبارتهای گویا، ابتدا با توجه به خاصیت‌های معادله و مخرج

مشترک‌گیری، معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ به دست می‌آید. با شرط این که $Q(x) \neq 0$ ، وقتی

معادله جواب دارد که $P(x) = 0$ ، سپس ریشه‌های این معادله را به دست می‌آوریم. از بین

ریشه‌های به دست آمده، آنهایی را قبول می‌کنیم که مخرج کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را صفر نکنند. (چرا؟)

◆ مثال: معادله $\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} = 2$ را حل کنید.

■ حل: با اضافه کردن ۲- به دو طرف معادله خواهیم داشت:

$$\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - 2 = 0$$

اکنون با مخرج مشترک گیری از سمت چپ تساوی آن را به صورت یک کسر بنویسید.

$$\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - \frac{2(x-3)}{(x-3)} = 0 \Rightarrow \frac{10 - 5x + 5 - 2x + 6}{x-3} = 0 \Rightarrow \frac{21 - 7x}{x-3} = 0$$

مشاهده می‌کنیم که به معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ رسیدیم، بنابراین با شرط $x-3 \neq 0$ و با حل معادله $P(x) = 0$ ، ریشه‌های معادله را در صورت وجود پیدا می‌کنیم.

$$21 - 7x = 0 \Rightarrow x = 3$$

چون $x = 3$ مخرج کسرها را صفر می‌کند، بنابراین، این ریشه قابل قبول نیست و معادله ریشه ندارد.

◆ مثال: معادله $\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2-6x+5}{x^2-x-20}$ را حل کنید.

$$\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(x+4)}{(x-5)(x+4)} + \frac{(x-1)(x-5)}{(x+4)(x-5)} - \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+2x-8+x^2-6x+5-x^2+6x-5}{(x-5)(x+4)} = 0 \Rightarrow x^2+2x-8=0 \Rightarrow (x+4)(x-2)=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+4=0 \Rightarrow x=-4 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

$x = -4$ غیر قابل قبول است.

◆ مثال: به ازای چه مقدار a معادله $\frac{a}{x} = \frac{x+1}{x+a}$ دارای جواب $x = 1$ است.

■ حل: $x = 1$ را در معادله قرار می‌دهیم و سپس مقدار a را به دست می‌آوریم.

$$x = 1 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{a+1} \Rightarrow \frac{a}{1} - \frac{1}{a+1} = 0 \Rightarrow \frac{a(a+1)}{(a+1)} - \frac{1}{a+1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + a - 2}{a + 1} = 0 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow (a + 2)(a - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases}$$

چون $a = 1$ یا $a = -2$ مخرج کسره‌های معادله $\frac{a}{1} - \frac{2}{a+1} = 0$ را صفر نمی‌کنند، پس هر دو قابل قبول‌اند.

صفحه ۵۰

کار در کلاس



معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $1 + \frac{\lambda}{x^2} = \frac{4}{x}$

$$\frac{1(x^2)}{x^2} + \frac{\lambda}{x^2} - \frac{4(x)}{x(x)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + \lambda - 4x}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + \lambda = 0$$

$$a = 1, \quad b = -4, \quad c = \lambda \quad \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow (-4)^2 - 4(1)(\lambda) = 16 - 4\lambda = -16 < 0$$

ب) $\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$

$$\frac{x-2}{x-4} - \frac{x+1}{x+3} = 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x+3)}{(x-4)(x+3)} - \frac{(x+1)(x-4)}{(x+3)(x-4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + x - 6 - x^2 + 3x + 4}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{4x - 2}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow 4x - 2 = 0 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

پ) $\frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$

$$\frac{24}{10+m} + 1 - \frac{24}{10-m} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{24(10-m)}{(10+m)(10-m)} + \frac{(10+m)(10-m)}{(10+m)(10-m)} - \frac{24(10+m)}{(10-m)(10+m)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{240 - 24m + 100 - m^2 - 240 - 24m}{(10+m)(10-m)} = 0 \Rightarrow \frac{-m^2 - 48m + 100}{(10+m)(10-m)} = 0$$

$$\Rightarrow -m^2 - 48m + 100 = 0 \Rightarrow m^2 + 48m - 100 = 0$$

$$(m + 50)(m - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m + 50 = 0 \Rightarrow m = -50 \\ m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2 \end{cases}$$

$$\text{ت) } \frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y}$$

$$\begin{aligned} \frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{(y-3)(y+3)} - \frac{y-1}{y-3} - 1 &= 0 \\ \frac{(y+2)(y-3)}{(y+3)(y-3)} - \frac{y^2}{(y-3)(y+3)} - \frac{(y-1)(y+3)}{(y-3)(y+3)} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{y^2 - y - 6 - y^2 - y^2 - 2y + 3 - y^2 + 9}{(y+3)(y-3)} &= 0 \Rightarrow \frac{-2y^2 - 3y + 6}{(y+3)(y-3)} = 0 \Rightarrow \\ -2y^2 - 3y + 6 = 0 \Rightarrow 2y^2 + 3y - 6 = 0 \quad a=2, b=3, c=-6 \\ \Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(2)(-6) = 9 + 48 = 57 \quad y &= \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{4} \Rightarrow \\ y_1 = \frac{-3 + \sqrt{57}}{4}, \quad y_2 = \frac{-3 - \sqrt{57}}{4} \end{aligned}$$

ث) به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است.

$$\begin{aligned} \frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} - \frac{a}{2} &= 0 \Rightarrow \frac{2 \times 2}{2(a-2)} + \frac{(a-2)(a-2)}{2(a-2)} - \frac{a(a-2)}{2(a-2)} = 0 \\ \Rightarrow \frac{4}{2(a-2)} + \frac{a^2 - 4a + 4}{2(a-2)} - \frac{a^2 - 2a}{2(a-2)} &= 0 \Rightarrow \frac{4 + a^2 - 4a + 4 - a^2 + 2a}{2(a-2)} = 0 \\ \Rightarrow \frac{-2a + 8}{2(a-2)} = 0 \Rightarrow -2a + 8 = 0 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \end{aligned}$$

صفحه ۵۲

تمرین



۱. معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \frac{3x-5}{x+3} = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{3x-5}{x+3} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{3x-5}{x+3} - \frac{x+3}{x+3} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{3x-5-x-3}{x+3} = 0 \Rightarrow \frac{2x-8}{x+3} = 0 \Rightarrow 2x-8 = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$$

$$\begin{aligned} \frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} - 5 = 0 \Rightarrow \frac{(3x-2)(x+3)}{x(x+3)} + \frac{(2x+5)x}{x(x+3)} - \frac{5x(x+3)}{x(x+3)} &= 0 \\ \frac{3x^2 + 7x - 6 + 2x^2 + 5x - 5x^2 - 15x}{x(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{-3x - 6}{x(x+3)} = 0 \\ \Rightarrow -3x - 6 = 0 \Rightarrow -3x = 6 \Rightarrow x = -2 \end{aligned}$$

پ) $\frac{۲}{x+۲} + \frac{x}{x+۲} = x + ۳$

$$\frac{۲}{x+۲} + \frac{x}{x+۲} - (x+۳) = ۰$$

$$\frac{۲}{x+۲} + \frac{x}{x+۲} - \frac{(x+۳)(x+۲)}{(x+۲)} = ۰ \Rightarrow \frac{۲+x-x^۲-۵x-۶}{(x+۲)} = ۰ \Rightarrow \frac{-x^۲-۴x-۴}{(x+۲)} = ۰$$

$$\Rightarrow -x^۲-۴x-۴ = ۰ \Rightarrow x^۲+۴x+۴ = ۰ \Rightarrow (x+۲)^۲ = ۰$$

$$x+۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲$$

ت) $\frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x} - \frac{۱+x}{x} = \frac{x-۱}{x-۲}$

$$\frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x} - \frac{۱+x}{x} - \frac{x-۱}{x-۲} = ۰ \Rightarrow$$

$$\frac{x^۲-۲x+۲}{x(x-۲)} - \frac{(۱+x)(x-۲)}{x(x-۲)} - \frac{(x-۱)x}{(x-۲)x} = ۰ \Rightarrow \frac{x^۲-۲x+۲-x^۲+x+۲-x^۲+x}{x(x-۲)} = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۴-x^۲}{x(x-۲)} = ۰ \Rightarrow ۴-x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$$

ث) $\frac{۳}{x-۱} - \frac{۲}{x+۳} = \frac{۴}{x-۲}$

$$\frac{۳}{x-۱} - \frac{۲}{x+۳} - \frac{۴}{x-۲} = ۰ \Rightarrow$$

$$\frac{۳(x+۳)(x-۲)}{(x-۱)(x+۳)(x-۲)} - \frac{۲(x-۱)(x-۲)}{(x+۳)(x-۱)(x-۲)} - \frac{۴(x-۱)(x+۳)}{(x-۲)(x-۱)(x+۳)} = ۰ \Rightarrow$$

$$\frac{۳x^۲+۳x-۱۸-۲x^۲+۶x-۴-۴x^۲-۸x+۱۲}{(x-۱)(x+۳)(x-۲)} = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{-۳x^۲+x-۱۰}{(x-۱)(x+۳)(x-۲)} = ۰ \Rightarrow -۳x^۲+x-۱۰ = ۰$$

$$۳x^۲-x+۱۰ = ۰ \quad a = ۳, b = -۱, c = ۱۰$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac \Rightarrow \Delta = (-۱)^۲ - ۴(۳)(۱۰) = ۱ - ۱۲۰ = -۱۱۹ \quad \Delta < ۰$$

معادله ریشه حقیقی ندارد.

ج) $\frac{۱۱}{x^۲-۴} + \frac{x+۳}{۲-x} = \frac{۲x-۳}{x+۲}$

$$\frac{۱۱}{(x-۲)(x+۲)} - \frac{x+۳}{x-۲} - \frac{۲x-۳}{x+۲} = ۰ \Rightarrow$$

$$\frac{۱۱}{(x-۲)(x+۲)} - \frac{(x+۳)(x+۲)}{(x-۲)(x+۲)} - \frac{(۲x-۳)(x-۲)}{(x-۲)(x-۲)} = ۰ \Rightarrow \frac{۱۱-x^۲-۵x-۶-۲x^۲+۷x-۶}{(x-۲)(x+۲)} = ۰$$

$$\frac{-۳x^۲+۲x-۱}{(x-۲)(x+۲)} = ۰ \Rightarrow -۳x^۲+۲x-۱ = ۰ \quad a = -۳, b = ۲, c = -۱$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac \Rightarrow \Delta = (۲)^۲ - ۴(-۳)(-۱) = ۴ - ۱۲ = -۸ \Rightarrow \Delta < ۰$$

معادله ریشه حقیقی ندارد.

۲. مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{5}{12}$ است، آن دو عدد را پیدا کنید.

$$x, x+2 \rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{x+2+x}{x(x+2)} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{2x+2}{x^2+2x} = \frac{5}{12} \Rightarrow 5x^2 + 10x = 24x + 24$$

$$5x^2 - 14x - 24 = 0$$

$$5A = (5x)^2 - 14(5x) - 120$$

$$5A(5x-20)(5x+6)$$

$$5A = 5(x-4)(5x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \rightarrow x+2=6 \\ 5x+6=0 \Rightarrow x=-\frac{6}{5} \end{cases}$$

۳. هنگامی که دو چاپگر با هم کار می‌کنند، فیش حقوق کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می‌شود. اگر چاپگر قدیمی‌تر به تنهایی برای این کار، ۳ ساعت زمان بیشتر نسبت به چاپگر جدیدتر نیاز داشته باشد، در این صورت هر کدام از چاپگرها به تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می‌کنند.

ساعت $x =$ مدت زمانی که طول می‌کشد تا چاپگر قدیمی به تنهایی صفحات را چاپ کند.

ساعت $x-3 =$ مدت زمان لازم برای چاپ صفحات با چاپگر جدید

$\frac{1}{4} =$ مقدار صفحات چاپ شده توسط چاپگر قدیمی و جدید از کل صفحات در مدت ۱ ساعت

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{4x-12+4x-x^2+3x}{4(x)(x-3)} = 0 \Rightarrow -x^2+11x-12=0$$

$$x^2-11x+12=0 \quad \Delta=121-48=73 \quad x = \frac{11 \pm \sqrt{73}}{2} \simeq \frac{11+8.54}{2} \quad x_1 = 9.77 \text{ hour}$$

$$x_2 = 1.23 \text{ hour}$$

۴. به ازای چه مقدار k ، معادله $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}$ دارای جواب $t = -3$ است.

$$\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68} \Rightarrow \frac{4-(-3)}{2-2(-3)} = \frac{3(-3)^2+k}{((-3)^2+1)^2-68} \Rightarrow$$

$$\frac{7}{8} = \frac{27+k}{100-68} \Rightarrow \frac{7}{8} = \frac{27+k}{32} \Rightarrow 7 = \frac{27+k}{4} \Rightarrow 28 = 27+k \Rightarrow k = 1$$