

آذان و نمازی، نهاد معلمان سرمهد معلمان

«أَلْ هاتو بِرَهَنُوكْمَ إِنْ كُنْتُمْ حَادِقِينَ»  
آیه ۶۴ سوره تبل  
«بِكُوْ اگر راست می گویید  
دلیل خود را بیاورید»

# ۱ آشنايى با مبانى رياضيات

- ۱ آشنايى با منطق رياضى
- ۲ مجموعه - زير مجموعه
- ۳ قوانين و اعمال بين مجموعه ها - جبر مجموعه ها



حل کارد در کلاس ها و فعالیت ها به همراه

پاسخ تمرین های فصل اول کتاب آمار و احتمال

رشته ریاضی فیزیک

چاپ تابستان ۱۳۹۶

گروه ریاضی استان خوزستان

تهیه و تنظیم: افشین ملاسعیدی

## هزینه استفاده، صلوانی بجهت سلامتی امام زمان (عج)

مقدمه:

فایلی که در اختیار شما قرار گرفته توسط اینجانب - افشین ملاسعیدی - در تیرماه ۱۳۹۶ نوشته و تنظیم شده است و امیدوارم دارای کمترین خطای بوده و مفید فایده برای شما باشد.

از همکاران ذیل ، استاد محترم آقایان عزیز عسکری ، احمد عامری ، عبدالامیر عباس زاده ، جابر عامری و خانم ها ژیلا باقری و آزاده حاجی هاشمی که در تهیه این مجموعه با من همکاری داشته اند کمال تشکر می نمایم .

از همکاران عزیز تقاضا می کنم در صورت مشاهده ای هر گونه اشتباه اعم از علمی یا تایبی بنده را مطلع ساخته تا در جهت رفع آن اقدام نموده و بتوانم از تجربیات شما استفاده کنم .

جهت ارتباط می توان به یکی از دو روش زیر عمل کرد :

۱- تلگرام: @sinxcosx

۲- همراه: 09168324500

## ایرادت و اشکالات تایپی مربوط به فصل اول

۱- مطرح کردن بعضی از سوالات ریاضی در سطح دانش آموزان پایه ۱۱ درست نیست. که بعضاً یافتن جواب آنها بسیار وقت تگیر یا غیر ممکن می‌باشد.

به طور مثال صفحه ۴ خط سوم: ■ هر عدد فرد بزرگ‌تر از ۵ را می‌توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت.

۲- صفحه ۴: شایسته بود با توجه به تصویر حلزونی عدد  $\pi$ ، در گزاره‌ی ■ صدemin رقم بعد از معیز عدد  $\pi$  برابر با ۵ است.

به جای صدemin، پنجmin یا آنچه در شکل قابل رویت بود، نوشته می‌شد.

۳- در مثال صفحه ۱۰ اشتباه تایپی وجود داشته که بهتر است اصلاح شود:

**مثال: ارزش گزاره «اگر ۲ فرد است آن‌گاه  $2 < 5$ » به انتفای مقدم**

~~نادرست است، درست است.~~

۴- در صفحه ۱۵، قسمت آموزش نقیض گزاره بهتر است در انشای متن، تغییر زیر صورت گیرد:

معمول‌آرای نقیض کردن یک گزاره، فعل آن را منفی می‌کنند. اکنون گزاره  
زیر را در نظر بگیرید می‌خواهیم نقیض آن را بنویسیم.  
هر آسیابی، ایرانی است.

معمول‌آرای نقیض کردن یک گزاره، فعل آن را منفی می‌کنند. اکنون گزاره  
زیر را در نظر بگیرید و نقیض آن را بنویسید.  
هر آسیابی، ایرانی است.

۵- صفحه ۲۵ تمرین ۱۲ اثبات یکی از دو قسمت الف یا ب کافیست و لزومی به خواستن اثبات هر دو نبود.

۶- صفحه ۲۶، فعالیت ۱، اصلاح زیر انجام شود:

۱ در هر یک از حالت‌های زیر مجموعه‌های خواسته شده را هائسور بزنید. (برای هائسور زدن مانند

حالات (d) از درونگ استفاده کنید). (ت)

۷- صفحه ۲۸ کاردکلاس ۱، نوشته نشده که چه چیز را می‌خواهد ثابت کند. باید به صورت زیر تکمیل گردد:  
۱ ثابت کنید، برای هر دو مجموعه دلخواه  $A$  و  $B$  از مجموعه مرجع  $U$ ، داریم:

$(A \cup C)$

$(A \cup B) \cap (B \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$

همجنبین در صفحه ۲۸ کار در کلاس ۲، باید تغییر زیر صورت گیرد:

۸- صفحه ۳۷، کار در کلاس الف: بدون هیچ مقدمه‌ای از برهان خلت استفاده کرده!!!!!!  
دانش آموز در چه مرحله‌ای با این نوع برهان آشنا شده است؟

۹- صفحه ۳۸، تمرین ۱: بهتر بود در متن سوال، به همراه **ترکیب عطفی**، اشاره‌ای نیز به استفاده از **ترکیب قصی** نیز می‌شد.

۱۰- صفحه ۳۸ تمرین ۳، قسمت الف: نوشت  $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap Z$  صحیح نیست و باید حتماً به صورت  $X \cup (Y \cap Z) = X \cup (Y \cap (Z \cup (X \cap Y)))$  باشد  
البته بنده به صورت زیر اصلاح کرده و پاسخ داده ام:

$(A' \cap B) \cup ((B \cap A) - B') \cap (B \cup A)$  ←  $(A' \cap B) \cup ((B \cap A) - B') \cap (B \cup A)$

من تشکر از رحماتی که مولفین محترم، متتحمل شده‌اند، اسیدوارم قبل از چاپ

اولین نسخه‌ی کتاب ایرادات قوق بروط گردد.

ملاسعیدی @sinxcosx

09168324500

## آشنایی با منطق ریاضی



منطق ریاضی که عده‌ای به آن منطق نمادین<sup>۱</sup> نیز می‌گویند؛ دستور زبان ریاضی یا مطالعه ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار بردہ می‌شود. این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند. امروزه منطق ریاضی در علوم مربوط به رایانه نیز به کار گرفته می‌شود. در این درس کار ما بسیار شبیه به بیان قواعد دستور زبان برای یک زبان معین است.

### گزاره

استدلال ساده زیر را در نظر بگیرید:

تیم ملی فوتبال ایران یا تیم ملی فوتبال استرالیا به جام جهانی می‌رود.

تیم ملی فوتبال استرالیا به جام جهانی نمی‌رود.

نتیجه: تیم ملی فوتبال ایران به جام جهانی می‌رود.

ابن استدلال از چند جمله خبری به دست می‌آید، چنانچه



دو جمله اول این استدلال را درست درنظر بگیرید، در این صورت نتیجه گیری جمله سوم منطقی به نظر می‌رسد. در منطق ریاضی به دو جمله خبری نخست، مفروضات استدلال و به جمله خبری سوم، نتیجه استدلال گفته می‌شود. یک استدلال می‌تواند از چندین جمله خبری تشکیل شود که یکی از آنها نتیجه استدلال و بقیه، مفروضات استدلال هستند.

### کار در کلاس

نتیجه استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

۱ هیچ عدد مرکبی، عددی اول نیست.

۴ عددی مرکب است

نتیجه: ۴ عدد اول نیست

۲ اگر وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم باشد آن گاه مدارس تعطیل است.

فردا وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم بیش بینی شده است.

### نتیجه: فردا مدارس تعطیل است

این استدلال‌ها، از جمله‌های خبری تشکیل شده است. به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) باشد، گزاره<sup>۱</sup> می‌گوییم. معمولاً گزاره‌ها را با حروف  $p, q, r, \dots$  نمایش می‌دهند. درست<sup>۲</sup> یا نادرست<sup>۳</sup> بودن یک گزاره را ارزش گزاره می‌گوییم. ارزش گزاره درست را با حرف «د» یا  $T$  و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ان» یا  $F$  نمایش می‌دهیم.

یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد، یعنی گزاره فقط دارای یک ارزش است. برای مثال گزاره زیر یک حدس در ریاضیات است.

«هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت<sup>۴</sup>»

مانند:

$$4 = 2+2; 6 = 3+3; 8 = 3+5; 10 = 5+5; 12 = 5+7; \dots$$

این حدس تاکنون اثبات نشده است؛ از طرفی مثال تقضی هم برای آن یافت نشده است. در هر صورت این گزاره فقط دارای یک ارزش است. اگر ارزش این گزاره درست نباشد، پس ارزش آن حدس نادرست است.

### خواندنی

حدس‌ها در ریاضیات به مسائل حل نشده‌ای می‌گویند که بروند آنها در جهان علم باز است. این گونه مسائل علاوه بر اینکه درستی آنها اثبات نشده است، تاکنون مثال تقضی هم برای آنها پیدا نشده است، حدس گلدبایخ نمونه‌ای از این مسائل است.

جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهنده احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند جمله‌های زیر هیچ خبری را بیان نمی‌کنند، بنابراین گزاره محسوب نمی‌شوند.

■ چه هوای خوبی! (ابراز احساسات)

■ لطفاً درب کلاس را بینید. (امری)

■ اینجا آشپز کیست؟ (پرسشی)

### گار در گلاس

از بین جمله‌های زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید و ارزش آنها را در صورت امکان تعیین کنید.

■ ایران کشور آسیایی است. **گزاره‌ای درست است**

■ در پرتاب یک تاس احتمال آنکه ناس مضرب ۳ بیايد برابر با  $\frac{1}{3}$  است. **گزاره‌ای درست است**

۱—Proposition

۲—Truth

۳—False

۴—حدس گلدبایخ



■ آیا  $3+2=5$  است؟ **گزاره نیست**

■ هر عدد فرد بزرگ‌تر از 5 را می توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت.

**گزاره است ولی ارزش آن مشخص نیست**

■ هر معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی متمایز است. **گزاره ای نادرست است**

■ صدmin رقم بعد از عدیز عدد  $\pi$  برابر با 5 است. **گزاره ای نادرست است**

## جدول ارزش‌گزاره‌ها

هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است، بنابراین هر گزاره مانند  $p$  فقط یکی از دو حالت ارزش گزاره را طبق جدول رو به رو می‌گیرد.

$p$

د

ن

$p$	$q$
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

ارزش‌های دو گزاره  $p$  و  $q$  ، طبق جدول رو به رو دارای 4 حالت است.

## کار در کلاس

ارزش‌های سه گزاره  $p$ ،  $q$  و  $r$  ، طبق جدول رو به رو دارای  $8=2^3$  حالت است.  
جاهای خالی را پر کنید.

$p$	$q$	$r$
د	د	د
د	<b>د</b>	ن
<b>د</b>	ن	<b>د</b>
د	ن	ن
ن	د	<b>د</b>
<b>ن</b>	د	ن
ن	<b>ن</b>	د
<b>ن</b>	<b>ن</b>	ن

— به نظر شما جدول ارزش‌های چهار گزاره، دارای چند حالت است؟ **۱۶ = 2^4** حالت دارد

— با توجه به اینکه هر گزاره می‌تواند یکی از دو ارزش «د» یا «ن» را داشته باشد و با توجه به اصل ضرب، اگر  $n$  گزاره داشته باشیم، در این صورت جدول ارزش‌های آن گزاره‌ها دارای چند حالت است؟  **$2^n$  حالت دارد**

### فعالیت

عبارت‌های خبری زیر را در نظر بگیرید:

الف)  $a$  عددی فرد است.

ب) در برتاب یک ناس احتمال آنکه پیشامد  $A$  رخ دهد برابر با  $\frac{1}{3}$  است.

ب) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر با ۶ است.  $(3x+2y=6)$

۱ ارزش کدام یک از جملات بالا را می‌توانند تعیین کنند؟ **ارزش هیچ‌کدام را نمی‌توان تعیین کرد**

۲ چنانچه به جای متغیر در جمله « $a$  عددی فرد است» قرار دهیم  $a=3$  در این صورت ارزش آن را تعیین کنند؟ **درست است**

اگر در آن  $a=4$  قرار دهیم، در این صورت ارزش آن چیست؟ **نادرست است**

هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را بر حسب تعداد متغیر به کار رفته در آنها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم.

### کار در کلاس

جاهای خالی را پر کنید:

اگر در جمله «ب» قرار دهیم  $\{1, 2, 3\} = A$  در این صورت ارزش گزاره حاصل درست می‌شود، به نظر شما چه مجموعه‌هایی را به جای  $A$  قرار دهیم، تا اینکه ارزش گزاره حاصل درست شود.

**هر زیر مجموعه‌ی سه عضوی از مجموعه‌ی اعداد ۱ تا ۶ را اگر قرار دهیم ارزش گزاره درست است.**

اگر در جمله «ب» قرار دهیم  $\{1\} = A$  در این صورت ارزش گزاره حاصل، نادرست است.

اگر در جمله «ب» قرار دهیم  $x=y$  در این صورت ارزش گزاره حاصل درست و در حالتی که  $x=y$  در این صورت ارزش گزاره حاصل نادرست است.

### دامنه متغیر گزاره‌نما

در هر گزاره‌نما به مجموعه مقادیری که می‌توان آنها را به جای متغیرهای آن قرار داد نا اینکه گزاره‌نما تبدیل به گزاره شود، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف  $D$  ناییش می‌دهند.

برای مثال، دامنه متغیر گزاره‌نمای « $p$  عددی اول است» مجموعه اعداد طبیعی، دامنه متغیر گزاره‌نمای « $x$  عددی زوج است» مجموعه اعداد صحیح و دامنه متغیر گزاره‌نمای « $4x^2+5=0$ » مجموعه اعداد حقیقی می‌توان در نظر گرفت.

در هر گزاره‌نما، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آنها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف  $S$  ناییش می‌دهند و همواره داریم:  $S \subseteq D$ .

دامنه متغیر گزاره‌های زیر داده شده است. مجموعه جواب هریک از آنها را مشخص کنید.



الف)  $x$  مضرب ۷ است. ( $D = \mathbb{Z}$ )

$$S = \{0, \pm 7, \pm 14, \dots\} \quad (D = \mathbb{Z})$$

ب)  $15x^2 - 7x - 8 = 0$  ( $D = \mathbb{R}$ )

$$S = \left\{1, -\frac{8}{15}\right\} \quad (D = \mathbb{R})$$

ب) تاس را برتاب می‌کنیم و

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad (D = \{1, 2, \dots, 6\}), P(\{x\}) = \frac{1}{6}$$

## ترکیب گزاره‌ها

### فعالیت

۱ هریک از این جمله‌های زیر، از چند گزاره تشکیل شده است؟

۲ آیا می‌توانید با توجه به ارزش گزاره‌های به کار رفته در هر جمله، ارزش آن جمله را تعیین کنید.

■ عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است. دارای دو گزاره است و ارزش آن را می‌توان تعیین کرد.

■ عدد ۲ زوج است یا عدد ۵ مضرب ۳ است. دارای دو گزاره است و ارزش آن را می‌توان تعیین کرد.

■ اگر عدد ۲ زوج باشد آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است. دارای دو گزاره است و ارزش آن را می‌توان تعیین کرد.

■ چنین نیست که عدد ۲ زوج باشد. یک گزاره با ارزش نادرست است.

■ اگر عدد ۲ زوج باشد آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است و برعکس. دارای دو گزاره است و ارزش آن را می‌توان تعیین کرد.

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیله رابطه‌ای گزاره‌ای (ادات ربط)، گزاره‌های مرکب به دست می‌آیند.

در ادامه ادات ربط را برای ترکیب گزاره‌ها معرفی می‌کنیم. با در دست داشتن ارزش گزاره‌های  $p, q, r, \dots$  و معرفی

ادات ربط، می‌توان گزاره‌های مرکب را تعریف کرد که ارزش گزاره‌های مرکب فقط به ارزش گزاره‌های  $p, q, r, \dots$  و

ادات ربط بین آنها بستگی دارد.

### تفیض یک گزاره

تفیض گزاره  $p$  به صورت  $\sim p$  نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که  $p$ » می‌خوانیم. اگر ارزش گزاره  $p$  درست باشد در این صورت ارزش گزاره  $\sim p$  نادرست است و وقتی که  $p$  نادرست باشد، ارزش تفیض آن درست است. به علامت « $\sim$ » ناقص گفته می‌شود و «چنین نیست که» خوانده می‌شود.

مثال: تفیض گزاره «۲ عددی گنج است» را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت.

«چنین نیست که ۲ عددی گنج باشد» یا «۲ عددی گنج نیست.»

جدول ارزش برای تفیض یک گزاره که تمام حالت‌های ممکن را برای درستی یا

نادرستی گزاره در نظر می‌گیرد، به صورت رو به رو است:

$p$	$\sim p$
د	ن
ن	د

مثال: جدول ارزش گزاره  $(\sim p) \sim$  را تشکیل دهد و ارزش آن را در هر حالت، با ارزش گزاره  $p$  مقایسه کنید.

حل:

$p$	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

همان طور که ملاحظه می کنید در هر حالت از جدول، ارزش  $p$  با ارزش  $(\sim p) \sim$  یکسان است، در این حالت می گوییم دو گزاره  $p$  و  $(\sim p) \sim$  هم ارز منطقی هستند و می نویسیم:  $p \equiv (\sim p) \sim$ . در حالت کلی اگر دو گزاره  $p$  و  $q$  هم ارزش باشند می نویسیم  $p \equiv q$  و می خوانیم  $p$  هم ارز است با  $q$ .

## ترکیب فصلی دو گزاره

گزاره های زیر را در نظر بگیرید.

$p : \sqrt{3}$  عددی حقیقی است.

$q : 2$  عددی اول نیست.

گزاره مرکب « $\sqrt{3}$  عددی حقیقی است یا ۲ عددی اول نیست» که از ترکیب دو گزاره ساده  $p$  و  $q$  با رابط منطقی «یا» تشکیل شده است، ترکیب فصلی دو گزاره می گوییم. هرگاه  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، گزاره مرکب  $p \vee q$  یا  $q \vee p$  را که به صورت  $(p \vee q) \vee (q \vee p)$  می نویسند، ترکیب فصلی دو گزاره می گوییم. در اینجا به رابط منطقی «یا» فاصل گفته می شود. گزاره مرکب زیر را در نظر بگیرید:

«پدر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می آید یا مادر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می آید.»

اگر پدر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، در این صورت ارزش گزاره مرکب بالا درست است. چنانچه مادر علی هم برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، آن گاه ارزش گزاره مرکب درست است. در حالتی که هم پدر علی و هم مادر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیایند، ارزش گزاره مرکب درست است.

گزاره مرکب بالا وقتی نادرست است که پدر و مادر علی به مدرسه برای گرفتن کارنامه مراجعة نکنند.

$p$	$q$	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

بنابراین ارزش گزاره مرکب  $p \vee q$  وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره  $p$  و  $q$  نادرست باشد و در بقیه حالات، ارزش  $p \vee q$  درست است. جدول ارزش گزاره  $p \vee q$  به صورت رو به رو است.

مثال: هرگاه  $a = 0$  و  $b = 0$  دو عدد حقیقی باشند به طوری که  $a \times b = 0$  در این صورت

$a = 0$  یا  $b = 0$  یعنی:

$$a, b \in \mathbb{R}, a \times b = 0 \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$$

از ویژگی مثال قبل، برای حل معادله ها استفاده می کنیم:

$$x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x+4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x+4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

## ترکیب عطفی دو گزاره

هر گاه  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، گزاره مركب « $p \wedge q$ » که خوانده می شود « $p$  و  $q$  را ترکیب عطفی دو گزاره می گوییم. در اینجا به رابط منطقی « $\wedge$ » عاطف گفته می شود.

### فالات

گزاره مركب زیر را در نظر بگیرید و به سوالات پاسخ دهید.

«سوگند فارغ التحصیل شد و پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.»

- آیا ارزش این گزاره مركب درست است؟ ارزش آن بستگی به ارزش گزاره های تشکیل دهنده ای آن دارد.

فرض کنید:

$p$  : سوگند فارغ التحصیل شد.

$q$  : پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.

■ چنانچه ارزش  $p$  درست و ارزش  $q$  نادرست باشد، ارزش  $p \wedge q$  چیست؟ نادرست

■ چنانچه ارزش  $p$  نادرست و ارزش  $q$  درست باشد، ارزش  $p \wedge q$  چیست؟ نادرست

■ هر گاه ارزش دو گزاره  $p$  و  $q$  نادرست باشد، ارزش  $p \wedge q$  چیست؟ نادرست

■ هر گاه ارزش دو گزاره  $p$  و  $q$  درست باشد، ارزش  $p \wedge q$  چیست؟ درست

$p$	$q$	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

بنابراین ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره  $p$  و  $q$  درست باشند و در بقیه حالات ارزش  $p \wedge q$  نادرست است. جدول ارزش  $p \wedge q$  به صورت رو به رو است:

### کار در کلاس

۱ جدول زیر را کامل کنید.

گزاره $p$	گزاره $q$	ارزش $p$	ارزش $q$	ارزش $p \wedge q$	ارزش $p$	ارزش $q$	ارزش $p \wedge q$
مهلت هفت روز دارد.	ماه شهربور ۲۱ روز دارد.	د	د	د	د	د	د
در تیر ماه هوای آبادان سرد است.	عدد ۷ مضرب ۵ نیست	ن	د	ن	ن	د	ن
۲ عددی اول است	$2+3=7$	ن	د	ن	د	د	ن
هر ماه ۳۰ روز دارد.	$5 < 1$	ن	ن	ن	ن	ن	ن
(۷) اول است	۹ عددی مرکب است	ن	د	د	ن	د	د

۷ با کامل کردن جدول ارزش‌ها، نشان دهید که گزاره‌های  $(p \vee q) \sim$  و  $\sim(p \wedge \sim q)$  هم ارز منطقی هستند.

$p$	$q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

هم ارز هستند →

همان طور که ملاحظه می‌کنید، همه حالت‌های ارزش دو گزاره  $(p \vee q) \sim$  و  $\sim(p \wedge \sim q)$  یکسان هستند پس  $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$  باین هم ارزی قانون دمورگان در منطق ریاضی گفته می‌شود.

۸ با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید که  $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ .

$p$	$q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

هم ارز هستند →

مثال: مقادیر  $x$  و  $y$  را چنان باید که داشته باشیم:

$$(2x-y)^{\gamma} + (x-1)^{\gamma} = 0$$

حل: چون  $0^{\gamma} \geq 0$  و  $0^{\gamma} \geq 0$  بنابراین تساوی بالا وقتی برقرار است که:

$$[(2x-y)^{\gamma} = 0] \quad [(x-1)^{\gamma} = 0] \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases} \Rightarrow y=2$$

## ترکیب شرطی دو گزاره

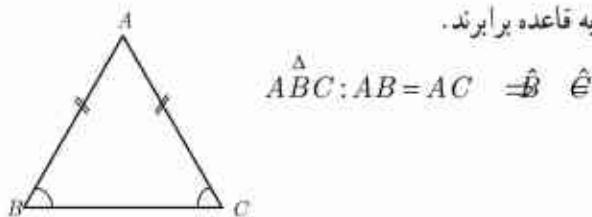
هرگاه  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » که خوانده می‌شود «اگر  $p$  آن‌گاه  $q$ » را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی  $p$  را مقدم (فرض) و  $q$  را نتیج (حکم) می‌نامیم.

### خواص

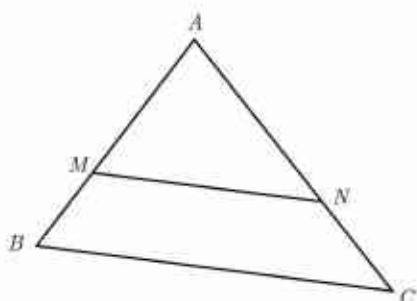
گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » را به صورت‌های « $p$  شرط کافی برای  $q$  است» و « $q$  شرط لازم برای  $p$  است» می‌خوانیم.

تا به حال در ریاضیات و هندسه با گزاره‌های شرطی بسیاری مواجه بوده‌اید، در زیر چند نمونه می‌آوریم.

**۱** اگر مثلث متساوی الساقین باشد. آن‌گاه دو زاویه مجاور به قاعده برابرند.



$$\triangle ABC: AB = AC \quad \angle B = \angle C$$



**۲** اگر در مثلث  $ABC$  ، داشته باشیم  $MN \parallel BC$  آن‌گاه

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

$$a^r \leq b^r \Rightarrow (a \leq b) \vee (a \geq -b)$$

$$a^r \geq b^r \Rightarrow (a \geq b) \wedge (a \leq -b)$$

**۳** اگر  $A$  پیشامدی در فضای نوونه  $S$  باشد آن‌گاه

جدول ارزش گزاره شرطی  $p \Rightarrow q$  به صورت زیر است.

با توجه به جدول ملاحظه می‌کنید که :

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	ن	د
ن	د	د

**۱** هرگاه ارزش  $p$  (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره مرکب

$p \Rightarrow q$  همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزاره  $q$  بستگی ندارد. در این حالت می‌گویند ارزش  $p \Rightarrow q$  به انتفای مقدم درست است.

**۲** ارزش گزاره  $p \Rightarrow q$  وقتی نادرست است که  $p$  درست و  $q$  نادرست باشد.

مثال : ارزش گزاره «اگر  $2$  فرد است آن‌گاه  $2 < 5$ » به انتفای مقدم

~~نادرست است~~. درست است.

### کار در کلاس

**۱** با بر کردن جاهای خالی در جدول زیر؛ نشان دهید که گزاره‌های  $q \Rightarrow p$  و  $p \vee q$  هم ارز منطقی هستند.

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د
ن	د	د	د	د

**۷** گزاره  $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$  و گزاره  $(\neg p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$  عکس نقیض ترکیب شرطی است.  
با توجه به جدول ارزش گزاره‌های زیر نشان دهد که  $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$  یعنی، هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم ارز است.

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	د	د	د	د

هم ارزند

**۸** با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها و با برگردان جاهای خالی نشان دهد:  
 $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$  (ب)       $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$  (الف)

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$	$p$	$q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	د	ن	ن	ن	د

هم ارز با  $T$  است. (ب)

هم ارز با  $T$  است. (الف)

گزاره‌هایی نظیر  $p \Rightarrow p$  یا  $\neg p \wedge \neg p$  را گزاره‌های همیشه درست و گزاره‌هایی نظیر  $p \wedge \neg p$  را همیشه نادرست می‌نامیم.

مثال: ثابت کنید اگر  $a \in \mathbb{Z}$  و  $a^2$  عددی فرد باشد آن‌گاه  $a$  عددی فرد است.

حل: به جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم (اثبات عکس نقیض آن ساده‌تر است).

$(a^2 \text{ عددی زوج است} \Rightarrow a \text{ عددی زوج است}) \equiv (a \text{ عددی فرد است} \Rightarrow a^2 \text{ عددی زوج است})$

چنانچه  $a$  عددی زوج باشد، یعنی  $a = 2k$ ، خواهیم داشت:

$$a^2 = (2k)^2 \quad 2k^2 = \underbrace{2(2k^2)}_{k' \in \mathbb{Z}'} = 2k'$$

در نتیجه  $a^2$  عددی زوج است.

## ترکیب دو شرطی دو گزاره

هرگاه  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، گزاره مرکب  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی  $p$  و  $q$  می‌نامیم. گزاره « $p \Leftrightarrow q$ » را به صورت زیر می‌خوانیم:

«اگر  $p$ ، آن‌گاه  $q$  و برعکس»،  $p$  شرط لازم و کافی برای  $q$  است و  $p$  اگر و تنها اگر  $q$ »

مثال: گزاره‌های زیر، نمونه‌ای از ترکیب دو شرطی گزاره‌ها است.

الف) ۶ عدد اول است  $\Leftrightarrow 2 > 5$

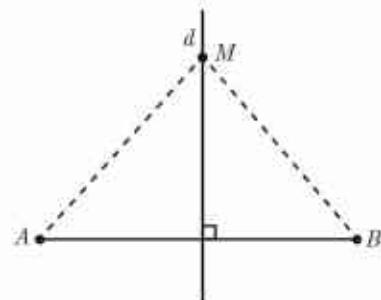
ب) ۹۹ عدد اول نیست  $\Leftrightarrow \sqrt{2}$  عددی گویا است.

پ) در پرتاب یک تاس شرط لازم و کافی برای آنکه احتمال پیشامدی برابر با صفر باشد، آن است که پیشامد تهی باشد.

ت) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط

باشد آن است که فاصله آن نقطه تا دو سر پاره‌خط برابر باشد.

$$[M \in d(AB)] \Leftrightarrow MA = MB \quad (\text{عمود منصف پاره‌خط})$$



### کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی، جدول ارزش گزاره مرکب  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  را از جدول ارزش گزاره  $p \Leftrightarrow q$  تبعیجه بگیرید.

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

با توجه به اینکه  $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ، جدول ارزش گزاره  $p \Leftrightarrow q$  به صورت زیر است:

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

۲ با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها، همارزی‌های منطقی زیر را مانند نمونه اثبات کنید.

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

(الف) قوانین جابه‌جایی

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

(ب) قوانین شرکت‌پذیری

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

(ب) قوانین توزیع‌پذیری

در زیر بکی از قانون‌های توزیع‌پذیری اثبات شده است.

### پاسخ این قسمت در صفحه‌ی

بعد نوشته شده است.

$p$	$q$	$r$	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

چون دو سوتون آخر جدول بکسان شده است، پس  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

## سورها

به جملات زیر دقت کنید :

«همه دانش‌آموزان کلاس در سال گذشته قبول شده‌اند». «هر گردو، گرد است». «هر مستطیل یک مریع است». «هر مثلث متساوی‌الاضلاع یک مثلث متساوی‌الساقین است». «بعضی از تیم‌های دسته یک به دسته برتر صعود می‌کنند». «بعضی از اعداد اول، زوج هستند». «بعضی از ذوزنقه‌ها، مستطیل هستند».

عبارت‌های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به سور معروف هستند. این عبارت‌ها می‌توانند قبل از گزاره نمایه‌ها قرار گیرند و به این وسیله گزاره‌های با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند.

الف) قوانین جابجایی :

$p$	$q$	$p \vee q$	$q \vee p$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$p$	$q$	$p \wedge q$	$q \wedge p$
د	د	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

ب) قوانین شرکت پذیری :

$p$	$q$	$r$	$p \vee q$	$q \vee r$	$(P \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(P \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د	د	ن	د	د	ن	ن	ن
د	ن	د	د	د	د	د	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د	د	د	ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	د	د	د	د	ن	د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د	د	ن	د	ذ	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$$(P \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(P \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

پ) قوانین توزیع پذیری :

$p$	$q$	$r$	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	د	د	د
د	ن	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

سور کلمه‌ای عربی است و به معنای «بارو» حصار یا دیوار گردان شهر است. نام‌گذاری عبارت‌های «به‌ازای هر» و «به‌ازای بعضی مقادیر» با سور به این جهت است که آنها قلمرو اعضای موضوع مورد بحث را مشخص می‌کنند. از نظر منطق‌دانان وجه تشابه سور با دیوار شهر آن است که دیوار گردان شهر محدوده و قلمرو شهر را مشخص می‌کند و الفاظ به کار رفته در گزاره‌نمایان، مرز و قلمرو اشیاء مورد استفاده در گزاره‌نمایان را تعیین می‌کنند.

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به‌جای «به‌ازای هر» یا «به‌ازای جمیع مقادیر» از نماد  $\forall$  و به‌جای «وجود دارد» یا «به‌ازای بعضی مقادیر» از نماد  $\exists$  استفاده می‌کنیم. نماد  $\forall$  سور عمومی و نماد  $\exists$  سور وجودی نامیده می‌شود.

### کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

عبارت با زبان ریاضی	عبارت با زبان طبیعی
$\forall x \in R : x^2 \geq 0$	برای هر عدد حقیقی $x$ داریم: $x^2 \geq 0$
$\forall a \in E : a = 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$	برای هر عدد زوج $a$ داریم: $a = 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$
$\exists p \in P : p = 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$	وجود دارد عدد اول (پیشوایک) $p = 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$
$\exists a \in O ; a \in P$	بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.

در جدول فوق، مجموعه اعداد زوج را با  $E$ ، مجموعه اعداد فرد را با  $O$  و مجموعه اعداد اول را با  $P$  نمایش داده‌ایم.

گزاره‌نمای شامل متغیر  $x$  که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره‌نما صدق کند به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

مثال: گزاره:  $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x$

نادرست است، زیرا  $\frac{1}{2}$  برای آن مثال نقض محسوب می‌شود.

مثال: کدام یک از عبارت‌های زیر درست هستند.

(الف)  $\forall x \in \mathbb{R} : \tan x \times \cot x = 1$       (ب)  $\forall x \in \mathbb{Z} : x(x+1) = 2k$

حل (الف) چون حاصل ضرب هر دو عدد متوالی صحیح، عددی زوج است بنابراین برای هر عضو از دامنه متغیر ( $\mathbb{Z}$ ) گزاره‌نما به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود، پس این عبارت درست است.

۱- نماد  $\forall$  از حرف اول کلمه All گرفته شده است.

۲- نماد  $\exists$  از حرف اول کلمه Exist گرفته شده است.

ب) نادرست است، زیرا  $x = \frac{\pi}{2}$ ، گزاره نما را به گزاره‌ای نادرست تبدیل می‌کند.

گزاره‌نمای شامل متغیر  $x$  که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن نهی نباشد.

مثال: گزاره  $\exists x \in \mathbb{Z} : 1 - x < 0$

درست است، زیرا حداقل یک عضو  $= x$  وجود دارد که به ازای آن گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود.

مثال: کدام یک از عبارت‌های زیر درست هستند:

(الف)  $\exists x \in P : x = 2k$

حل. الف) درست است؛ زیرا ۲ عددی اول و زوج است، پس مجموعه جواب گزاره‌نما  $\{2\}$  و ناتهی است.

ب) نادرست است؛ زیرا مجموعه جواب گزاره‌نما مجموعه نهی است.

### کار در کلاس

درستی با نادرستی گزاره‌های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

(الف) هر عدد اول، فرد است. نادرست است زیرا ۲ عددی اول ولی زوج است.

(ب)  $\exists x \in \mathbb{N} : 2x^7 + 3x + 1 = 0$  نادرست است، زیرا به ازای هر  $x \in \mathbb{N}$  مقداری طبیعی دارد و نمی‌تواند صفر شود.

(پ)  $\exists x \in \mathbb{Z} : 2x^7 + 3x + 1 = -1$  درست است و مجموعه جواب آن  $\{-1\}$  و ناتهی است.

(ت) هر عدد زوج، غیر اول است. نادرست است زیرا ۲ عدد زوج ولی اول است.

(ث) در آمار، هر متغیر ترتیبی یک متغیر کیفی است. درست است. زیرا طبق تعریف، متغیر ترتیبی نوعی متغیر کیفی است.

(ج) در احتمال؛ هر مجموعه پیشامد زیر مجموعه فضای نمونه است. طبق تعریف پیشامد، درست می‌باشد.

(چ) در فضای نمونه  $S$ ، پیشامدی مانند  $A$  وجود دارد به طوری که  $P(A) > 1$ . نادرست است زیرا همواره  $P(A) \leq 1$  خواهد بود.

ح) طول هر باره خط عدد حقیقی است. درست است

## نقیض گزاره‌های سوری

گزاره «علی به مدرسه رفت» را در نظر بگیرید و نقیض آن را در زیر بنویسید. «علی به مدرسه نرفت».

معمولًا برای نقیض کردن یک گزاره، فعل آن را منفی می‌کنند. اکنون گزاره

زیر را در نظر بگیرید می‌خواهیم نقیض آن را بنویسیم.

هر آسیایی، ایرانی است.

در زبان طبیعی معمولًاً آن اشتباه رخ می‌دهد که برای نوشتن نقیض این گزاره،

فقط فعل آن را منفی می‌کنند و می‌نویسند:

هر آسیایی، ایرانی نیست.



همان طور که ملاحظه می کنید، ارزش دو گزاره قبل نادرست است و این غیر ممکن است (جرای) بنابراین جمله دوم نمی تواند نقیض جمله اول باشد.

برای رفع این مشکل؛ فرض کنیم  $A$  مجموعه مردمان آسیا و ایرانی بودن  $x$  را با  $P(x)$  نمایش دهیم؛ بنابراین گزاره «هر آسیایی، ایرانی است» به صورت  $\forall x \in A; P(x)$  بیان می شود.

چون ارزش این گزاره « $\forall x \in A; P(x)$ » نادرست است، پس ارزش گزاره نقیض آن یعنی  $(\forall x \in A; P(x)) \neg$  باید درست باشد. از آنجا که ارزش گزاره  $(\forall x \in A; P(x))$  نادرست است، پس وجود دارد  $x \in A$  به طوری که  $P(x)$  نادرست است و لذا ارزش  $\neg P(x)$  درست می باشد، در نتیجه ارزش گزاره  $\neg P(x) \neg \exists x \in A; P(x)$  درست است و ارزش این گزاره با ارزش گزاره  $(\forall x \in A; P(x)) \neg$  یکسان است، بنابراین داریم:

$$\neg (\forall x; P(x)) \equiv \exists x; \neg P(x)$$

در این صورت نقیض گزاره «هر آسیایی، ایرانی است» به صورت زیر است:  
«بعضی از آسیایی ها، ایرانی نیستند»

به همین ترتیب می توان نقیض گزاره ای را که دارای سور وجودی است، به صورت زیر نوشت:  
 $\neg (\exists x; P(x)) \equiv \forall x; \neg P(x)$

مثال: ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید و سپس نقیض هریک را بنویسید.

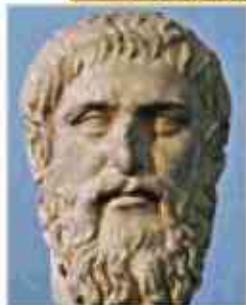
$$\text{الف)} \quad \forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0 \quad \text{ب)} \quad \exists y \in \mathbb{R}; y < 0 \wedge y^2 \leq 1$$

حل) الف) ارزش این گزاره نادرست است، چون  $x = 0$ ، مثالی نقض برای آن است.

$$\neg (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0 \equiv \exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0$$

ب) درست است، زیرا  $y = -1$  در آن صدق می کند، پس مجموعه جواب آن ناتهی است.

$$\begin{aligned} \neg (\exists y \in \mathbb{R}; y < 0 \wedge y^2 \leq 1) &\equiv \forall y \in \mathbb{R}; \neg(y < 0 \wedge y^2 \leq 1) \\ &\equiv \forall y \in \mathbb{R}; y \geq 0 \vee y^2 > 1 \end{aligned}$$



۱ از جملات زیر کدام یک گزاره است و ارزش گزاره‌ها را مشخص کنید.

- الف) خیام بزشک ایرانی است. گزاره‌ی نادرست
- ب) افلاطون فیلسوف یونانی است. گزاره‌ی درست
- ت) نخنه سیاه را پاک کنید. گزاره نیست
- ج) جه باران شدیدی می‌آید. گزاره نیست
- ح)  $\emptyset \subset \mathbb{R}$  گزاره‌ی نادرست
- د) عدد  $5^1 + 8^1$  عددی اول است. گزاره‌ی نادرست
- ر) آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. گزاره‌ی درست
- ۲ در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید به‌طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند.

$$b) 5 + \boxed{0/1} \in \mathbb{Z}$$

$$a) -7 \times \boxed{1} = -7$$

$$c) \frac{1 \times 9}{3} \boxed{5} \times 3$$

$$b) \frac{8 \times \boxed{1}}{4} \in \left\{ 2, \frac{1}{2} \right\}$$

$$d) \boxed{1} \sqsubseteq \{1\}$$

$$c) \boxed{0} \times \sqrt{2} = 0$$

$$e) 7(\boxed{A} - 3) = 25$$

$$d) 5(\boxed{Y} - 3) = 20$$

۳ دامنه متغیر هر یک از گزاره‌نماهای زیر، مجموعه اعداد صحیح است، مجموعه جواب هر یک را بنویسید.

الف) مربع کامل است  $S = \{ \dots, -9, -4, 1, 6, \dots \}$

$$b) a \in \{ \dots, -9, -4, 1, 6, \dots \}$$

$$b) -1 \leq \frac{2x+1}{3} \leq 2 \Rightarrow x \leq -2 \Rightarrow S = \{ -2, -3, -4, \dots \}$$

۴ تقبیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

$$a) 4 < 3 \leq 2$$

ب) ابو‌لوفای بوزجانی ریاضی‌دان ایرانی است. ابو‌لوفای بوزجانی ریاضی‌دان ایرانی نیست.

$$b) a \notin \{ b, c, d \} \quad a \in \{ b, c, d \}$$

ت) ۲ عددی زوج است یا عدد  $\pi$  گویا است. ۲ عددی زوج نیست و عدد  $\pi$  گویانیست

ث) خورشید به دور زمین می‌چرخد و سنتنج مرکز استان کردستان است.

خورشید به دور زمین نمی‌چرخد یا سنتنج مرکز استان کردستان نیست.

ج) اگر  $a$  زوج باشد آن‌گاه  $a+1$  فرد است.

**زوج است و  $a+1$  فرد نیست**

۵ ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

$$a) T \vee F \equiv T \quad (5 > 3) \vee (x^2 + 1 = 0)$$

$$a) \text{الف) } T \wedge F \equiv F \quad (2 < 3) \wedge (4 + 3 = 1)$$

$$b) F \Rightarrow F \equiv T$$

$$b) \text{ب) } F \vee F \equiv F \quad (\frac{1}{2} \neq \frac{3}{4}) \vee (1 \in \{2, 3, 4\})$$

ت) اگر عدد ۴ فرد باشد آن‌گاه ۴ مربع کامل نیست.

ث) در متوازی‌الاضلاع مفروض دو قطر باهم برابرند.

$$c) F \Leftrightarrow F \equiv T$$

$$c) \text{الف) } F \Rightarrow F \equiv T \quad F \Rightarrow T \equiv T$$

ج)  $a \in \{b\}$  آن‌گاه  $a=b$  و برعکس.

$$c) \text{ج) } F \Leftrightarrow F \equiv T \quad 4 > 2 \Leftrightarrow 2 < 4$$

$(p \wedge q)$	ارزش $(p \Rightarrow q)$	ارزش $q$	ارزش $p$	ارزش $p$	گزاره $q$	گزاره $p$
د	د	د	د	د	عدد ۲ اول است.	عدد ۲ زوج است.
ن	ن	ن	د	د	۱+۲	عدد ۳ فرد است.
ن	ن	ن	د	د	عدد ۱ اول است.	$2 \in \{1, 2\}$
ن	د	د	ن	ن	عدد ۷ اول است.	$2+3=7$

**پاسخ این قسمت در صفحه‌ی  
بعد نوشته شده است.**

۷ جدول ارزش‌های هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید.

- |                                    |                                   |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| الف) $p \wedge \neg p$             | ب) $\neg p \wedge p$              |
| ت) $(p \vee q) \wedge \neg p$      | ب) $\neg p \vee p$                |
| ج) $\neg p \Leftrightarrow \neg q$ | ت) $(p \vee q) \Leftrightarrow q$ |

۸ با استفاده از جدول ارزش‌ها تساند دهید که :

- |  |  |
|--|--|
| الف) $p \vee F \equiv p$                                       | ب) $p \Rightarrow p \equiv T$  |
| ت) $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$              | ب) $p \wedge T \equiv p$   |
| ج) $p \vee (q \wedge p) \equiv p$                              | ت) $p \wedge (q \vee p) \equiv p$                                      |
| ح) $\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv \neg p \Leftrightarrow q$ | ج) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ |

۹ ثابت کنید هر گاه  $n$  عددی صحیح و  $n^3$  مضرب ۳ باشد، آن‌گاه  $n$  نیز مضرب ۳ است.

۱۰ گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای  $\forall$ ,  $\exists$  بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.

ب) برای بعضی از مقادیر  $a$  در مجموعه اعداد حسابی داریم  $a^2 < a$ .

پ) همه اعداد اول فرد هستند.

ت) وجود دارد عدد صحیح مثبتی مانند  $x$  به‌طوری که  $1-2x > 5$

ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفرا معکوسش بزرگ تر یا مساوی ۲ است.

ج) بازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم  $x = x'$ .

۱۱ هر گاه  $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < A\}$  دامنه متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

الف)  $\exists x \in A; x + 4 = 10$

ب)  $\forall x \in A; x + 2 \leq 9$

ت)  $\forall x \in A; x + 1 \geq 6$

الف)  $\exists x \in A; x + 3 \leq 4$

ب)  $\forall x \in A; x - 2 \leq -2$

۱۲ ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف)  $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$

ب)  $\forall n \in \mathbb{N}; (2^{2^n} + 1) \in P$

الف)  $\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2$

ب)  $\exists y \in \mathbb{R}; \frac{y - 3}{5} = 0$

# پاسخ تمرین های صفحه ۱۸ کتاب درسی

ملاسعیدی  
 ۰۹۱۶۸۳۲۴۵۰۰

$p$	$\sim p$	$\sim p \wedge p$
د	ن	ن
ن	د	ن

(ب)

$p$	$q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن

-الف

$p$	$q$	$\sim p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \sim p$
د	د	ن	د	ن
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	ن

(ج)

$p$	$\sim p$	$\sim p \vee p$
د	ن	د
ن	د	د

(د)

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Leftrightarrow \sim q$
د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

(ز)

$p$	$q$	$p \vee q$	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$
د	د	د	د
د	ن	د	ن
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

(ه)

بنابراین  $p \vee F \equiv p$  است.

$p$	$F$	$P \vee F$
د	ن	د
ن	ن	ن

(ب)

بنابراین  $p \Rightarrow p \equiv T$  است.

$p$	$p \Rightarrow p$
د	د
ن	د

-الف

$p$	$q$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

(ج)

بنابراین  $p \wedge T \equiv p$  است.

$p$	$T$	$p \wedge T$
د	د	د
ن	د	ن

(د)

$\rightarrow$  بنابراین  $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$  است.

$p$	$q$	$q \wedge p$	$p \vee(q \wedge p)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

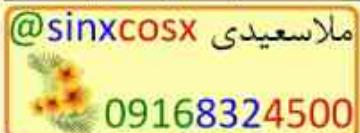
(ز)

بنابراین  $p \vee(q \wedge p) \equiv p$  است.

$p$	$q$	$q \vee p$	$p \wedge(q \vee p)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

بنابراین  $p \wedge(q \vee p) \equiv p$  است.

$p$	$q$	$r$	$q \Rightarrow r$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	د	ن	د	د
ن	د	ن	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	ن	د	ن	د	د



بنابراین  $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$  است.

$p$	$q$	$\sim p$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim (p \Leftrightarrow q)$	$\sim p \Leftrightarrow q$
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	ن

بنابراین  $(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$  است.

\*\*\*\*\*

۹- بد جای اثبات این حکم ، عکس نقیض آن را ثابت می کنیم . یعنی نشان می دهیم :

برای هر عدد صحیح  $n$  اگر  $n^7$  مضرب ۳ نباشد آنگاه  $n^3$  مضرب ۳ نیست .

چنانچه  $n^7$  مضرب ۳ نباشد ، یعنی باقیمانده تقسیم آن بر ۳ برابر ۱ یا ۲ است . به عبارت دیگر :

$$n = 3k + 1 \Rightarrow n^7 = 9k^7 + 6k^6 + 1 = 3(3k^7 + 2k^6) + 1 \Rightarrow n^7 = 3k' + 1 \Rightarrow n^7 \text{ مضرب ۳ نیست}$$

$$n = 3k + 2 \Rightarrow n^7 = 9k^7 + 12k^6 + 4 = 3(3k^7 + 4k^6 + 1) + 1 \Rightarrow n^7 = 3k'' + 1 \Rightarrow n^7 \text{ مضرب ۳ نیست}$$

پس در هر صورت  $n^7$  مضرب ۳ نیست .  
در نتیجه حکم سوال برقرار است .

\*\*\*\*\*

۱۰-الف)  $\forall a \in \mathbb{N}, (a \in E \vee a \in O)$  درست است زیرا اگر عدد زوج باشد، فرد نخواهد بود و اگر عددی زوج نباشد فرد خواهد بود.  
در نتیجه در ترکیب فصلی یکی از گزاره ها درست و یکی نادرست است، پس در کل درست است.

ب)  $\exists a \in W, a^{\dagger} < 0$  نادرست است زیرا هیچ عددی وجود ندارد که مربع آن منفی شود به عبارت دیگر مجموعه جواب آن تهی است.

پ)  $\forall a \in P, a \in O$  نادرست است زیرا به عنوان مثال نقض، عدد ۲ اولی بوده ولی فرد نیست.

ت)  $5 > 5 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}^+, 1 - 2x < 5 \Rightarrow x > 0$  نادرست است زیرا ۱-۲x < ۵  $\Rightarrow x < 5$ ، یعنی x منفی است و هیچ عدد مثبتی در آن صدق نمی کند.

ث)  $-1 + \frac{1}{x} = -2 \nRightarrow \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, x + \frac{1}{x} \geq 2$  نادرست است به عنوان نمونه  $x = -1$  مثال نقض است زیرا  $x + \frac{1}{x} \geq 2$

ج)  $\exists x \in \mathbb{R}, x^{\dagger} = x$  درست است زیرا مجموعه جواب آن  $S = \{0, \pm 1\}$  ناتهی است.

\*\*\*\*\*

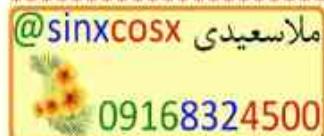
۱۱-الف) نادرست است زیرا  $x + 4 = 10 \Rightarrow x = -6 \notin A$

ب) درست است زیرا  $x + 2 \leq 9 \Rightarrow x \leq 7 \Rightarrow S = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A$  یعنی تمام اعضای دامنه ای تغییر جواب هستند.

پ) درست است زیرا  $x + 3 \leq 4 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow S = \{1\} \neq \emptyset$

ت) نادرست است زیرا  $x + 1 \geq 6 \Rightarrow x \geq 5 \Rightarrow S = \{5\} \neq A$  فقط برای یک عضو دامنه ای تغییر برقرار است و اعدادی مثل ۱، ۲، ۳ و ۴ مثال نقض برای آن می باشند.

\*\*\*\*\*



۱۲-الف) نادرست است زیرا برای  $x = 1$  تساوی داده شده، تعریف نمی شود.

نقطی غزاره:  $\exists x \in \mathbb{R}, \frac{x^2 - 1}{x - 1} \neq x + 1$

ب) نادرست است. در حالت  $n = 5$  عدد بدست آمده اول نیست، زیرا بر ۶۴۱ بخش پذیر است.

نقطی غزاره:  $\exists n \in \mathbb{N}, 2^n \notin P$

پ) نادرست است به عنوان نمونه  $x = -1$  مثال نقض است زیرا  $-1 - \frac{1}{-1} = 0 \nRightarrow$

نقطی غزاره:  $\exists x \in (-\infty, 0), x - \frac{1}{x} > -2$

ت) درست است. زیرا مجموعه جواب آن  $S = \{3\}$  ناتهی است.

نقطی غزاره:  $\forall y \in \mathbb{R}, \frac{y^2 - 3}{5} \neq 0$



## مجموعه - زیر مجموعه

یادآوری: در سال‌های قبل با مفهوم مجموعه آشنا شده‌اید، برای مثال مجموعه اعداد اول یک رقیق به صورت زیر است:

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

می‌توان این مجموعه را با نمادهای ریاضی به صورت  $P = \{x \in P \mid x < 10\}$  نوشت که در آن  $P$  مجموعه اعداد اول است. چون عضو ۲ متعلق به مجموعه  $A$  است، می‌نویسیم  $2 \in A$ . از طرفی واضح است که  $6 \notin A$  یعنی عضو ۶ به مجموعه  $A$  تعلق ندارد.

### کار در کلاس

۱ فرض کنید  $A = \{a, b\}$ ، درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف)  $a \in A$  نادرست زیرا در مجموعه  $A$  عضوی به صورت  $\emptyset \in A$  وجود ندارد (ب) نادرست زیرا در مجموعه  $A$  عضوی به صورت  $\{A\}$  وجود ندارد

ج)  $b \subseteq A$  نادرست است زیرا  $b$  مجموعه نیست و نمی‌تواند زیر مجموعه باشد.

د)  $\{a\} \subseteq A$  درست است زیرا  $a \in A$  است.

ه) درست است زیرا  $a$  درون مجموعه  $A$  است.

۲ کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر با تهی و کدام یک ناتهی هستند؟

الف)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9\}$  و  $2x = 4$  ، بنابراین هم زمان  $x = 2$  و  $x = -2$  نمی‌تواند باشد در نتیجه مجموعه ناتهی است.

ب)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid x + \lambda = \lambda\}$  ، بنابراین مجموعه برابر  $\{0\}$  بوده و ناتهی است.

ج)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq x\}$  وجود ندارد عددی که با خودش برابر نباشد، بنابراین مجموعه هیچ عضوی ندارد و تهی است.

د)  $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 7x\}$  ، بنابراین مجموعه به صورت  $\{7\}$  بوده و ناتهی است.

۳ مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آنها مشخص کنید.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$B = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 = m\} = \{-1, 0, 1\}$$

$$C = \{k \in \mathbb{R} \mid k^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}$$

$$D = \{a \in S \mid a \text{ تاس است}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

با توجه به مجموعه‌ها در قسمت ۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$A \cap D \subseteq C$   $\xrightarrow{\text{درست}} A \cap D = \{1, 2\}$

$B \subseteq A$   $\xrightarrow{\text{درست}}$

$B \in A$   $\xrightarrow{\text{نادرست}}$

$B \subseteq C \cup A$   $\xrightarrow{\text{درست}} C \cup A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$C \not\subseteq A$   $\xrightarrow{\text{نادرست}}$

$B - D \subseteq A$   $\xrightarrow{\text{درست}} B - D = \{-1, 0\}$

## تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

### فعالیت

مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  را در نظر بگیرید.

**۱** همه زیرمجموعه‌های  $A$  را بنویسید.

**۲** با دو رقم و ۱ می‌توانیم زیرمجموعه  $\{b, c\}$  از مجموعه  $A$  را با کد سه رقمی ۱۱ مشخص کنیم، چون  $B \notin A$  باشد و  $b, c \in B$  باشد. همچنان زیرمجموعه  $\{a\} \subseteq A$  را با کد ۰۰ مشخص کنیم. ۰۰ متناظر با آن کد ۰۰۰ است و ۰۱۰ متناظر با آنها کد ۱ است. ۱۱۰ متناظر با آن کد ۱۱ است و ۱۰۱ متناظر با آنها کد ۱۰ است. ۰۱۱ متناظر با آنها کد ۰۱ است و ۱۱۱ متناظر با آنها کد ۱۱۱ است. اکنون شما بقیه زیرمجموعه‌های  $A$  را با کدهایی سه رقمی نظری کنید.

زیرمجموعه	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
کد زیرمجموعه	۰۰۰	۱۰۰	۰۱۰	۰۰۱	۱۱۰	۱۰۱	۰۱۱	۱۱۱

**۳** با این روش کدگذاری و به کمک اصل ضرب (سال گذشته در فصل شمارش، بدون شمردن خوانده اید) تعداد زیرمجموعه‌های  $A$  را تعیین کنید.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ \text{رقم اول} & & \text{رقم دوم} & & \text{رقم سوم} & & \\ \textcircled{2} & & \textcircled{2} & & \textcircled{2} & \xrightarrow{\times} & 2^3 = 8 \end{array}$$

**۴** فرض کنید  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ . با روش کدگذاری با رقم‌های ۰ و ۱ و به کمک اصل ضرب تعیین کنید که  $A$  چند زیرمجموعه دارد.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ \text{رقم اول} & & \text{رقم دوم} & & \text{رقم سوم} & & \text{رقم چهارم} \\ \textcircled{2} & & \textcircled{2} & & \textcircled{2} & & \textcircled{2} \\ & & & & & & \xrightarrow{\times} 2^4 = 16 \end{array}$$

**۵** اگر  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  در این صورت با این روش کدگذاری مشخص کنید که  $A$  چند زیرمجموعه دارد.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ \text{رقم ۱ام} & & \text{رقم ۲م} & & \text{رقم ۳م} & & \text{رقم } n\text{ام} \\ \textcircled{2} & & \textcircled{2} & & \textcircled{2} & & \cdots \\ & & & & & & \xrightarrow{\times} 2^n \end{array}$$

فرض کنید  $A$  یک مجموعه ۱۱ عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های  $A$  برابر با  $2^{11}$  است.

مثال: مجموعه  $A = \{a, \emptyset\}$  را در نظر بگیرید و همه زیرمجموعه‌های  $A$  را در یک مجموعه بنویسید.

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset\}, \{a, \emptyset\}, \{\{a\}, \emptyset\}, \{a, \{a\}\}, \{\{a\}, \{a\}\}\}$$

### خواندگی

مجموعه همه زیرمجموعه‌های  $A$ ، مجموعه توانی  $A$  نامیده می‌شود و آن را با  $P(A)$  نمایش می‌دهیم.

چنانچه  $A$  دارای  $n$  عضو باشد در این صورت  $P(A)$  دارای  $2^n$  عضو است.

اگر  $A \subseteq B$  به طوری که  $A \neq B$  آن‌گاه  $A$  زیرمجموعه محض یا سره  $B$  نامیده می‌شود.

مثال: مجموعه متناهی  $A$  را در نظر بگیرید، چنانچه ۲ عضو به اعضای  $A$  اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۸ واحد افزایش می‌یابد، مشخص کنید  $A$  جند عضوی است.

حل: فرض کنیم  $A$  دارای  $n$  عضو باشد، پس دارای  $2^n$  زیرمجموعه است، چنانچه ۲ عضو به اعضای  $A$  اضافه شود، در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های  $A$ ،  $48$  واحد افزایش می‌یابد، یعنی در این حالت تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر با  $2^{n+2} = 48$  است.

از طرفی وقتی ۲ عضو به اعضای  $A$  اضافه می‌شود، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه جدید برابر است با  $2^{n+2}$  است، بنابراین

داریم:

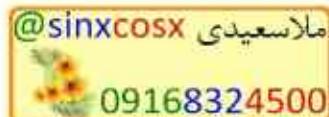
$$2^n + 48 = 2^{n+2} = 2^n \times 2^2$$

$$\Rightarrow 2^n + 48 = 4 \times 2^n \Rightarrow 4 \times 2^n - 2^n = 48$$

$$\Rightarrow 3 \times 2^n = 48 \Rightarrow 2^n = 16 = 2^4 \Rightarrow n = 4$$

در نتیجه مجموعه  $A$ ، چهار عضوی است.

## افراز یک مجموعه



### فعالیت

۱ مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  را در نظر بگیرید. تمام زیرمجموعه‌های  $A$  به غیر از  $\emptyset$  را بنویسید.

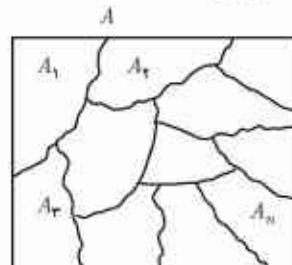
$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

۲ از بین زیرمجموعه‌های ناتهی  $A$  که در بالا نوشته شد، دو زیرمجموعه چنان در نظر بگیرید که اولاً اشتراکی نداشته باشند و تانیاً اجتماع آنها برابر با  $A$  شود.  $\{c\}, \{a, b\}$

۳ همه جواب‌های ممکن برای قسمت قبل را به دست آورید.  $\{a\}, \{b, c\}$  هیچین دو مجموعه‌ی

۴ آیا می‌توان سه زیرمجموعه در قسمت ۱ چنان یافت که اشتراک دویده‌ی آنها نهی باشد و اجتماع آنها برابر با  $A$  شود؟  $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

فرض کنیم  $A \neq \emptyset$  یک مجموعه و  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  زیرمجموعه‌های  $A$  باشند. مجموعه  $A$  به  $n$  زیرمجموعه افزایش شده است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.



### کار در کلاس

مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 9\} = A$  را در نظر بگیرید، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای  $A$  محسوب می‌شود؟

۱)  $\{4, 8, 9\}$  و  $\{2, 6\}$  و  $\{1, 3, 5\}$  افراز تیست زیرا ۷ درون هیچ‌کدام قرار ندارد یعنی اجتماع آنها  $A$  نخواهد شد.

۲)  $\{5, 7, 9\}$  و  $\{2, 4, 6, 8\}$  و  $\{1, 3, 5\}$  افراز تیست زیرا عدد ۵ به عنوان عضو مشترک می‌باشد و در افراز نباید عضو مشترک وجود داشته باشد.

۳)  $\{7, 8\}$  و  $\{1, 2, 3, 5\}$  و  $\{2, 4, 6, 8\}$  افراز برقرار است بنابراین افراز می‌باشد.

## تعریف زیر مجموعه به کمک نمادهای ریاضی

فرض کنید  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو  $A$ ، عضوی از  $B$  باشد در این صورت  $A$  را زیر مجموعه  $B$  نامیده و می‌نویسند  $A \subseteq B$ . چنانچه عضوی در  $A$  وجود داشته باشد به طوری که آن عضو در مجموعه  $B$  نباشد در این صورت  $A$  زیر مجموعه  $B$  نیست و می‌نویسند  $A \not\subseteq B$ . با استفاده از نمادهای ریاضی می‌توان تعریف‌های  $A \subseteq B$  و  $A \not\subseteq B$  را به صورت زیر نوشت:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \in A \wedge x \notin B)$$

## روش عضوگیری دلخواه

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم  $A \subseteq B$  و اعضای مجموعه‌های  $A$  و  $B$  در دسترس نباشند، کافی است عضوی دلخواه مانند  $x$  از  $A$  فرض کرده، سپس با استفاده از فرض‌های داده شده نشان دهیم که  $x$  در  $B$  وجود دارد. از آنجا که  $x$  دلخواه بوده است در واقع هر عضو  $A$  در  $B$  است بنابراین با توجه به تعریف زیر مجموعه، ثابت کردہ این  $A \subseteq B$ ، در زیر چند ویژگی مهم در مجموعه‌ها با روشن عضوگیری دلخواه ثابت شده است.

**ویژگی ۱**— فرض کنید  $A$  و  $B$  و  $C$  سه مجموعه با مرجع  $U$  باشند به طوری که  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq C$  ثابت کنید  $A \subseteq C$ .

ابات: برای ابات  $A \subseteq C$ ، باید ثابت کنیم که:  
 $\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in C)$   
برای این منظور از فرض‌ها یعنی  $B \subseteq C$  و  $A \subseteq B$  استفاده می‌کنیم.

$$\forall x; x \in A \stackrel{A \subseteq B}{\Rightarrow} x \in B \stackrel{B \subseteq C}{\Rightarrow} x \in C$$

در نتیجه داریم:

$$\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in C) \Rightarrow A \subseteq C$$

**ویژگی ۲**— فرض کنید  $A$  و  $B$  دو مجموعه با مرجع  $U$  باشند و  $A \subseteq B$ ، ثابت کنید  $B' \subseteq A'$ .  $B' \subseteq A'$  به ترتیب متمم‌های مجموعه‌های  $A$  و  $B$  هستند).

قبل از ابات این ویژگی، تعریف متمم یک مجموعه را بادآوری می‌کنیم. فرض کنیم  $A$  مجموعه‌ای با مرجع  $U$  باشد، متمم مجموعه  $A$  برابر با مجموعه اعضای از  $U$  است که متعلق به مجموعه  $A$  نباشند و آن را  $A'$  نمایش می‌دهند.

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

از این تعریف نتیجه می‌گیریم که اگر  $x \in A$  آن‌گاه  $x \notin A'$  با اگر  $x \notin A$  آن‌گاه  $x \in A'$ .

ابات: برای اینکه ثابت کنیم  $B' \subseteq A'$  باید نشان دهیم که:  $\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \in A')$  بنابراین داریم:

$$\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \notin A \stackrel{A \subseteq B}{\Rightarrow} x \in B \Rightarrow x \in A' )$$

$$\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \in A') \Rightarrow B' \subseteq A'$$

در نتیجه داریم:

ویزگی ۳— برای هر مجموعه دلخواه مانند  $A$  با مجموعه مرجع  $U$  ثابت کنید:  $\emptyset \subseteq A$ .

اثبات: برای اثبات  $\emptyset \subseteq A$  باید نشان دهیم که ارزش گزاره شرطی  $(x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$  همواره درست است. چون در این گزاره شرطی ارزش مقدم بعنی  $x \in \emptyset$  نادرست است، پس به انتفای مقدم ارزش گزاره شرطی درست است و در نتیجه  $\emptyset \subseteq A$ .

@sinxcosx  
مالاسعیدی  
09168324500

### کار در کلاس

۱) برای مجموعه‌های  $A$  و  $B$  با مرجع  $U$  ثابت کنید که  $A \subseteq A \cup B$

اثبات:

$$\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in A \cup B$$

$$\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in A \cup B) \Rightarrow A \subseteq A \cup B$$
 بنابراین داریم:

درستی استدلال بالا را توضیح دهید. اولاً گزاره  $x \in B$  می‌تواند درست یا نادرست باشد ولی یا توجه به درستی گزاره  $x \in A$  ترکیب فصلی آنها یعنی  $x \in A \vee x \in B$  درست می‌باشد. لاین‌آور اثبات نشان داده شده که هر عضو درون  $A \cup B$  عضوی از  $A$  است. در نتیجه  $A \subseteq A \cup B$  خواهد بود.

۲) فرض کنیم  $A$  و  $D$  و  $C$  و  $B$  و چهار مجموعه با مرجع  $U$  باشند، ثابت کنید اگر  $C \subseteq D$  و  $A \subseteq B$  آن‌گاه  $A \cup C \subseteq B \cup D$

اثبات: جاهای خالی را پر کنید:

$$\forall x; [x \in (A \cup C)] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B & (A \subseteq B) \\ \vee & \\ x \in C \Rightarrow x \in D & (C \subseteq D) \end{cases} \Rightarrow x \in B \vee x \in D \Rightarrow x \in B \cup D$$

بنابراین داریم:

$$\forall x; [x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (B \cup D)] \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$$

۳) فرض کنیم  $A$  و  $B$  و  $C$  سه مجموعه با مرجع  $U$  باشند ثابت کنید اگر  $B \subseteq C$  و  $A \subseteq C$  آن‌گاه  $(A \cup B) \subseteq C$ . راهنمایی: از ویزگی قسمت ۲ استفاده کنید.

$$\begin{matrix} A \subseteq C \\ B \subseteq C \end{matrix} \Rightarrow A \cup B \subseteq C \cup C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

### دو مجموعه مساوی

فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو مجموعه با مرجع  $U$  باشند به طوری که هر عضو  $A$ ، عضوی از  $B$  و هر عضو  $B$  عضوی از  $A$  باشد؛ یعنی  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq A$ . در این صورت  $A$  با  $B$  مساوی است و می‌نویسیم  $A = B$ . به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت:

$$A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

### کار در کلاس

فرض کنید  $A = \{1, 2\}$ ، کدام یک از مجموعه‌های زیر با  $A$  مساوی است؟ (با ذکر دلیل).

الف)  $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$  مساوی  $A$  است زیرا:

ب)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$  مساوی  $A$  نیست زیرا این مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی از ۱ تا ۲ می‌باشد و بی شمار عضو دارد.

پ)  $\{x \in \mathbb{Q} \mid 2x^2 + 3x + 1 = 0\}$  مساوی  $A$  نیست زیرا:

$$2x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \vee x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \{-1, -\frac{1}{2}\}$$

ت)  $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2\}$  مساوی  $A$  است زیرا این مجموعه شامل اعداد طبیعی از ۱ تا ۲ می‌باشد که خود اعداد ۱ و ۲ خواهد بود.



۵ مثال‌هایی از مجموعه‌های دلخواه  $A$  و  $B$  و  $C$  بیاورید که برای آنها حکم‌های زیر درست باشند.

$$A \in B, B \in C, A \notin C \Rightarrow A = \{\}, B = \{\{\}\}, C = \{\{\{\}\}, \{\}, \{\}\}$$

الف)

$$A \in B, B \in C, A \in C \Rightarrow A = \{\}, B = \{\{\}\}, C = \{\{\{\}\}, \{\}, \{\}\}$$

ب)

$$A \in B, A \subseteq B \Rightarrow A = \{\}, B = \{\{\}\}, \{\}$$

پ)

ملاسعیدی @sinxcosx

09168324500

۶ اگر دو عضو از مجموعه  $A$  حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن  $384$  واحد کم می‌شود، مجموعه  $A$  چند زیرمجموعه دارد؟

گیریم مجموعه‌ی  $\{n\}$  دارای  $n$  عضو باشد در نتیجه  $2^n - 384 = 2^{n-2}$  ، بنابراین به حل این معادله می‌پردازیم:

$$2^n - 384 = 2^n \times \frac{1}{4} \Rightarrow 2^n - 2^n \times \frac{1}{4} = 384 \Rightarrow \frac{3}{4} 2^n = 384 \xrightarrow[+2]{\times 4} 2^n = 512 = 2^9 \Rightarrow n = 9 \rightarrow$$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = 1 \quad \text{اگر } \{2, 3, 4, 5, x-y\} \text{ و } A=B \text{ و } B=\{4, 5, x-y\} \text{ در این صورت مقادیر } x \text{ و } y \text{ را باید.}$$

۷ ثابت کنید برای مجموعه‌های  $A$  و  $B$  با مرجع  $U$  داریم  $A-B \subseteq A$ :

$$\forall x : [x \in A - B] \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A$$

بنابراین:  $A - B \subseteq A$

۸ فرض کنیم  $A$  و  $B$  و  $C$  سه مجموعه با مرجع  $U$  باشند، ثابت کنید اگر  $A \subseteq B$  آن‌گاه:

$$\begin{array}{l} \text{الف) اثبات: } A \subseteq B \cup C \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C \\ \text{اثبات: } C \subseteq C \end{array}$$

$$\forall x, x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \wedge x \in C \xrightarrow{A \subseteq B} x \in B \wedge x \in C \Rightarrow x \in B \cap C \quad \text{اثبات: } A \cap C \subseteq B \cap C$$

بنابراین:  $A \cap C \subseteq B \cap C$

۹ مجموعه‌های  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  با مرجع  $U$  را در نظر بگیرید، ثابت کنید اگر  $A \subseteq B$  و  $C \subseteq D$  آن‌گاه:

$$\forall x, x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \wedge x \in C \xrightarrow[C \subseteq D]{A \subseteq B} x \in B \wedge x \in D \Rightarrow x \in B \cap D \quad \text{اثبات: } A \cap C \subseteq B \cap D$$

بنابراین:  $A \cap C \subseteq B \cap D$

$$\forall x, x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \wedge x \in C \xrightarrow[C \subseteq D]{A \subseteq B} x \in B \wedge x \in D \xrightarrow{?} x \in B \vee x \in D \quad \text{اثبات: } A \cap C \subseteq B \cup D$$

بنابراین حکم برقرار است.  $\rightarrow$

توجه داشته باشید که: اگر  $p \wedge q$  درست باشد، آنگاه  $p$  درست و  $q$  نیز درست خواهد بود در نتیجه  $p \vee q$  می‌توان  $p \vee q$  را نتیجه گرفت.

۱۰ الف) فرض کنید  $A \subseteq \emptyset$  ثابت کنید  $A = \emptyset$ . ب) فرض کنید  $U \subseteq A$  ثابت کنید  $\emptyset \subseteq A \wedge A \subseteq \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$

اثبات الف) می‌دانیم تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه است بنابراین:  $\emptyset \subseteq A \wedge A \subseteq \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$

اثبات ب) می‌دانیم هر مجموعه زیرمجموعه‌ی مرجع است بنابراین:  $A \subseteq U \wedge U \subseteq A \Rightarrow A = U$

۱۱ هرگاه  $A$  و  $B$  دو مجموعه با مرجع  $U$  باشند و  $A \cap B = \emptyset$  در این صورت ثابت کنید:

$$\left. \begin{array}{l} \forall x, x \in B - A \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in B \rightarrow B - A \subseteq B \\ \forall x, x \in B \xrightarrow{A \cap B = \emptyset} x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in B - A \rightarrow B \subseteq B - A \end{array} \right\} \Rightarrow B - A = B \quad \text{اثبات: } B - A = B$$

ب) برای اثبات مشابه قسمت الف عمل می‌کنیم. اثبات می‌توان گفت که: این ادعا همان ادعای قسمت الف می‌باشد و فقط بازی با حروف صورت گرفته است.

۱۲ فرض کنید  $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ، کدام یک از حالت‌های زیر یک افزار برای  $X$  محسوب می‌شود.

الف)  $\{a, c, e\}$  و  $\{b\}$  و  $\{d, g\}$  افزار نمی‌باشد زیرا اجتماع آنها مساوی مجموعه‌ی  $X$  نیست.

ب)  $\{a, e, g\}$  و  $\{c, d\}$  و  $\{b, e, f\}$  افزار نمی‌باشد زیرا دارای عضو مشترک هستند.

ب)  $\{a, b, e, g\}$  و  $\{c, d, f\}$  افزار است.

ت)  $\{a, b, c, d, e, f, g\}$  افزار نمی‌باشد زیرا افزار نمی‌توان متشکل از یک مجموعه باشد.

ت)  $\{e\}$  و  $\{d\}$  و  $\{f, g\}$  و  $\{a\}$  و  $\{b, c\}$  و  $\{a\}$  افزار است.

## ۳

## قوانين و اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)

در این درس می‌خواهیم قوانین و خواص مربوط به اعمال اجتماع و اشتراک را بررسی کنیم، شما در اعداد حقیقی و برای دو عمل جمع (+) و ضرب (×) قوانینی چون جابه‌جای، نرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع را می‌شناسید یعنی می‌دانیم:

$$\text{I)} \forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a \quad \text{خاصیت جابه‌جای}$$

$$\text{II)} \forall a, b, c \in \mathbb{R} : \begin{cases} a + (b + c) = (a + b) + c \\ a \times (b \times c) = (a \times b) \times c \end{cases} \quad \text{خاصیت نرکت‌پذیری}$$

$$\text{III)} \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) \quad \text{خاصیت توزیع‌پذیری}$$

توجه دارید که عمل + نسبت به عمل × توزیع‌پذیر نیست، (با ذکر یک مثال قض این مطلب را نشان دهید).

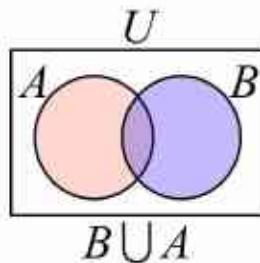
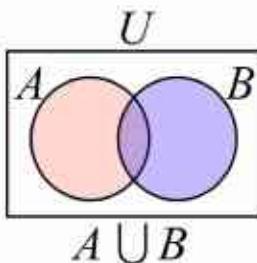
$$\left. \begin{array}{l} 2 + (3 \times 5) = 2 + 15 = 17 \\ (2 + 3) \times (2 + 5) = 5 \times 7 = 35 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + (3 \times 5) \neq (2 + 3) \times (2 + 5)$$

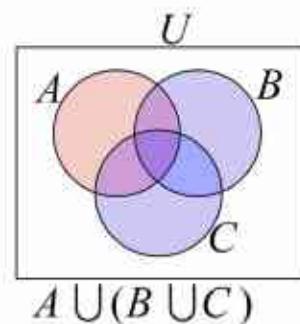
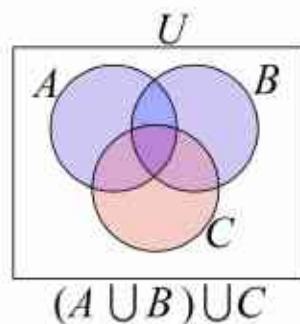
در مجموعه‌ها دو عمل  $\cup$  و  $\cap$  خواصی مشابه خواص فوق داشته و این خواص با توجه به خواصی که در گزاره‌ها برای دو ترکیب (۷) و (۸) بیان شد قابل بررسی و اثبات می‌باشند. در فعالیت زیر ابتدا توسط نمودار ون برقراری این خواص را مشاهده می‌کنید.

## فعالیت

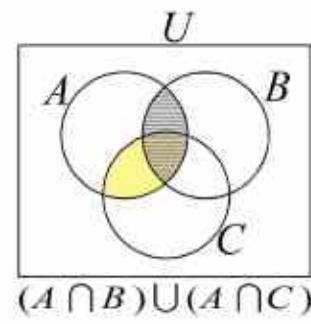
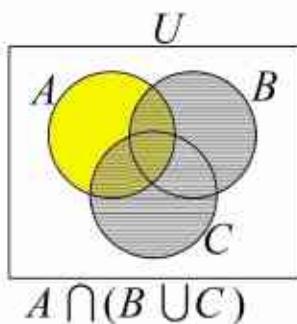
- ۱ در هر یک از حالت‌های زیر مجموعه‌های خواسته شده را هاشور بزنید. (برای هاشور زدن مانند حالت ~~۱~~<sup>۲</sup> از دورنگ استفاده کنید).

(الف)

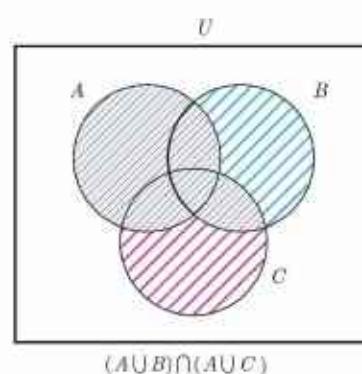
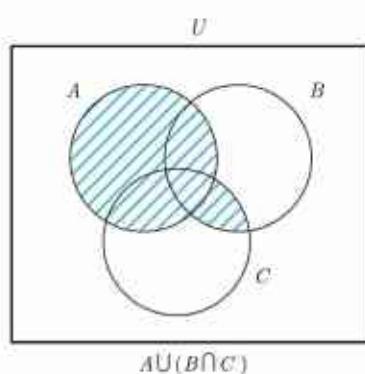




(ب)



(ب)



(ن)

با فرض اینکه  $C = \{1, 2, 5, 6\}$  و  $B = \{3, 4, 5\}$  و  $A = \{1, 2, 3\}$  و  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  در این صورت درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

$$\text{الف) } A \cap B = B \cap A$$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{3\} \\ B \cap A &= \{3\} \end{aligned} \Rightarrow A \cap B = B \cap A$$

$$\text{ب) } A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= \{1, 2, 3\} \cap \{5\} = \emptyset \\ (A \cap B) \cap C &= \{3\} \cap \{1, 2, 5, 6\} = \emptyset \end{aligned} \Rightarrow A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$\text{پ) } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3\} \\ (A \cap B) \cup (A \cap C) &= \{3\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3\} \end{aligned} \Rightarrow A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

یادآوری: برای اثبات تساوی بین دو مجموعه  $A$  و  $B$  می‌بایست ثابت کنیم  $B \subseteq A$  و  $A \subseteq B$ .

با توجه به تعریف اعمال اجتماع و اشتراک و خواص جایه‌جایی، سرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری دو ترکیب فصلی و عطفی می‌خواهیم این خواص با قوانین را برای  $\cup$  و  $\cap$  اثبات کنیم، شما این اثبات‌ها را کامل کنید:

**۱** ثابت کنید، برای هر دو مجموعه دلخواه  $A$  و  $B$  از مجموعه مرجع  $U$ ، داریم:

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A && \text{تعريف اجتماع} \\ A \cup B &= \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\} && \text{جایه‌جایی} \\ &= \{x \in U \mid x \in B \vee x \in A\} && \text{تعريف اجتماع} \\ &= B \cup A && \text{تعريف اجتماع} \end{aligned}$$

**۲** ثابت کنید، برای سه مجموعه دلخواه  $C, B, A$  از مجموعه مرجع  $U$ ، داریم:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C && \text{تعريف اجتماع} \\ A \cup (B \cup C) &= \{x \in U \mid x \in A \vee x \in (B \cup C)\} && \text{تعريف اجتماع} \\ &= \{x \in U \mid x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)\} && \text{سرکت‌پذیری} \\ &= \{x \in U \mid (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C\} && \text{تعريف اجتماع} \\ &= \{x \in U \mid x \in (A \cup B) \vee x \in C\} && \text{تعريف اجتماع} \\ &= (A \cup B) \cup C && \text{تعريف اجتماع} \end{aligned}$$

**۳** با استفاده از روش عضوگیری دلخواه خاصیت توزیع‌پذیری  $\cap$  را ثابت کنید.

بعنی ثابت کنید:  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$\begin{aligned} [x \in A \vee (x \in B \cap C)] && \text{تعريف اجتماع} \\ [(x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C))] && \text{تعريف اشتراک} \\ [x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)] && \text{توزيع‌پذیری} \wedge \text{نسبت به } \wedge \\ [x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C] && \text{تعريف } \cup \\ x \in [(A \cup B) \cap A \cup C] && \text{تعريف اشتراک} \\ \Rightarrow A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C) && (A \cup C) \end{aligned}$$

و به همین ترتیب ثابت می‌شود  $(A \cup B) \cap (B \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$  (بنابراین دو مجموعه با هم برابرند). (توجه داریم که از طرف دیگر، خاصیت توزیع‌پذیری اصطلاحاً همان فاکتورگیری است یعنی رسیدن از سمت راست تساوی به سمت چپ تساوی به معنی فاکتورگیری از  $\cap$  است).

**تذکر:** با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه‌های مرجع و تهی تساوی‌های زیر

$$1) A \cup A' = U \quad 2) A \cap A' = \emptyset \quad \text{برقرارند:}$$

$$3) A \cup U = U \quad 4) A \cap U = A$$

مثال ۱ : با استفاده از خواص فوق ثابت کنید : ( $U$  مجموعه مرجع فرض شده است).

$$\text{الف) } (A \cup B) \cap (B' \cup A) = A$$

$$\text{ب) } (C \cap A) \cup (A' \cap C) = C$$

$$\text{ب) } A \cup (B \cup A') = U$$

$$\text{ت) } A - B = A \cap B'$$

$$\text{الف) } (A \cup B) \cap (B' \cup A)$$

جایه جایی

$$= (A \cup B) \cap (A \cup B')$$

فاکتور گیری (عكس خاصیت توزیع پذیری)

$$= A \cup \emptyset$$

$$= A$$

$$\text{ب) } (C \cap A) \cup (A' \cap C) = (C \cap A) \cup (C \cap A')$$

جایه جایی

$$= C \cap (A \cup A') = C \cap U = C$$

فاکتور گیری

$$\text{ب) } A \cup (B \cup A') = A \cup (A' \cup B)$$

جایه جایی

$$= (A \cup A') \cup B = U \cup B = U$$

شرکت پذیری

$$\text{ت) } A - B = \{x \in U | x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \in U | x \in A \wedge x \in B'\}$$

معرف متتم

$$= A \cap B'$$

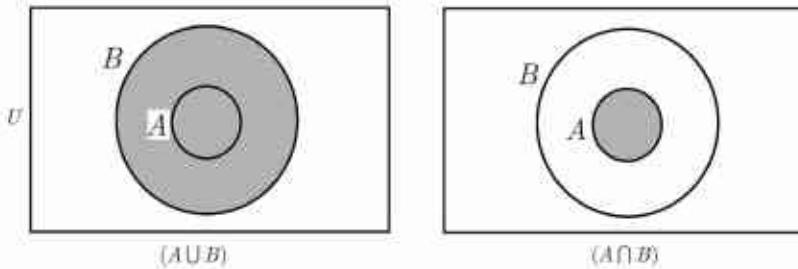
معرف اشتراک

قضیه : برای هر دو مجموعه دلخواه از مجموعه مرجع  $U$  داریم :

$$\text{الف) } A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

$$\text{ب) } A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

برهان : قبل از اثبات دقیق، ابتدا در نمودارهای زیر  $(A \cup B)$  و  $(A \cap B)$  را هاشور بزنید.



همان طور که ملاحظه می کنید هر یک از حالت های الف و ب، قضیه هایی دو شرطی بوده و برای اثبات هر یک از آنها باید دو قضیه شرطی را ثابت کنیم.

الف) فرض کنیم  $A \subseteq B$  و ثابت می کنیم  $A \cup B = B$  برای این منظور باید ثابت کنیم  $B \subseteq (A \cup B)$  و  $(A \cup B) \subseteq B$ .

رابطه  $(A \cup B) \subseteq B$  (۱) با توجه به تعریف اجتماع بدیهی است: بنابراین به اثبات رابطه  $(A \cup B) \subseteq B$  ( $A \cup B$ ) می پردازیم :

$$\begin{aligned} \text{می دانیم: } B &\subseteq B \\ \Rightarrow (A \cup B) &\subseteq (B \cup B) \Rightarrow (A \cup B) \subseteq B \quad (۲) \end{aligned}$$

طبق فرض

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی  $A \cup B = B \cup A$  اثبات شده و حکم به دست می‌آید.)

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow (A \cup B) = B$$

حال فرض کنیم  $A \cup B = B$ , ثابت می‌کنیم :

$$A \subseteq (A \cup B) \xrightarrow[\text{فرض}]{A \cup B = B} A \subseteq B$$

ب) ابتدا فرض کنیم  $A \subseteq B$ , تساوی  $A \cap B = A$  را اثبات می‌کنیم :

$$(A \cap B) \subseteq A \quad \text{با توجه به تعریف اشتراک داریم} \quad (1)$$

$$\begin{array}{c} A \subseteq A \\ A \subseteq B \end{array} \Rightarrow (A \cap A) \subseteq (A \cap B) \Rightarrow A \subseteq (A \cap B) \quad (2)$$

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی  $A \cap B = A$ , به دست می‌آید.)

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow (A \cap B) = A$$

حال فرض می‌کنیم  $A \cap B = A$ , ثابت می‌کنیم :

$$(A \cap B) \subseteq B \xrightarrow[\text{فرض}]{A \cap B = A} A \subseteq B$$

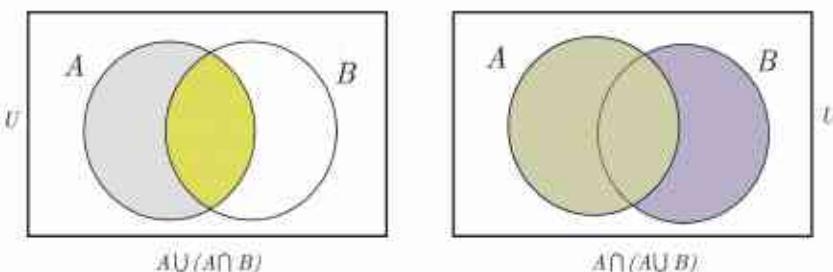
### کار در کلاس

(قوانین جذب یا هم پوشانی) اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه دلخواه از مجموعه مرجع  $U$  باشند می‌خواهیم تساوی های زیر، که به قوانین جذب معروف‌اند را با استفاده از قضیه قبل و تعاریف اجتماع و اشتراک اثبات کنیم :

$$\text{الف) } A \cup (A \cap B) = A$$

$$\text{ب) } A \cap (A \cup B) = A$$

ابتدا با استفاده از نمودار ون و هاشور زدن، درستی قوانین جذب را نشان دهید :



در قضیه قبل ملاحظه کردید که اگر  $C \subseteq D$  در این صورت  $C \cup D = D$  و  $C \cap D = C$  است.

$$\text{قضیه: } (A \cap B) \subseteq A \xrightarrow{\text{قضیه}} A \cup (A \cap B) = A$$

$$\text{قضیه: } A \subseteq (A \cup B) \xrightarrow{\text{قضیه}} A \cap (A \cup B) = A$$

روش دیگری نیز برای اثبات قوانین جذب وجود دارد که شما با برکردن جاهای خالی اثبات را کامل کنید.

$$\text{الف } A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B)$$

$$= A \cap (U \cup B)$$

$$= A \cap U = A$$

فاکتورگیری

$$\text{ب) } A \cap (A \cup B) = (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B)$$

$$= A \cup (\emptyset \cap B)$$

$$= A \cup \emptyset = A$$

فاکتورگیری

مثال : عبارت های زیر را ساده کنید :

$$\text{الف } (A \cap B) \cup ((B \cup C) \cap [(B \cup A) \cap B])$$

$$(A \cap B) \cup ((B \cup C) \cap [\underbrace{(B \cup A)}_{\text{جذب}} \cap B]) = (A \cap B) \cup [\underbrace{(B \cup C)}_{\text{جذب}} \cap \underbrace{B}_{\text{جذب}}]$$

$$= \underbrace{(A \cap B)}_{\text{جذب}} \cup \underbrace{B}_{\text{جذب}} = B$$

$$\text{ب) } (A \cup B') \cap [(B \cap C) \cup (B' \cup A)]$$

$$(A \cup B') \cap [\underbrace{(B \cap C)}_{\text{C}} \cup \underbrace{(B' \cup A)}_{\text{D}}] = \underbrace{(A \cup B')}_{\text{C}} \cap [\underbrace{(B \cap C)}_{\text{C}} \cup \underbrace{(A \cup B')}_{\text{C}}]$$

$$= \underbrace{(A \cup B')}_{\text{C}}$$

جابههای

جذب

مثال : درستی هر یک از تساوی های زیر را بررسی کنید.

$$\text{الف } A - B = B' - A'$$

$$\text{ب) } (X \subseteq A) \wedge (X \subseteq A') \Rightarrow X = \emptyset$$

$$\text{ب) } (A - B) \cap (B - A) = \emptyset$$

$$\text{ت) } (A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$

$$\text{ت) } (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$$

حل :

$$\text{الف } A - B = A \cap B' = B' \cap A = B' - A'$$

$$\text{ب) } \begin{cases} X \subseteq A \Rightarrow (X \cap X) \subseteq (A \cap A') \Rightarrow X \subseteq \emptyset \\ X \subseteq A' \end{cases}$$

(1)

از طرفی می دانیم  $X \subseteq \emptyset$  و بنابراین  $X = \emptyset$

$$\text{ب) } (A - B) \cap (B - A) = (A \cap B') \cap (B \cap A')$$

$$= [(A \cap B') \cap B] \cap A'$$

شرکت پذیری

$$= [A \cap (B' \cap B)] \cap A'$$

شرکت پذیری

$$= (A \cap \emptyset) \cap A'$$

تعريف متمم

$$= \emptyset \cap A' = \emptyset$$

$$\text{ت) } (A \cup B) - C = (A \cup B) \cap C'$$

$$= (A \cap C') \cup (B \cap C')$$

توزيع پذیری  $\cap$  در  $\cup$

$$= (A - C) \cup (B - C)$$

تبديل اشتراک به تفاضل

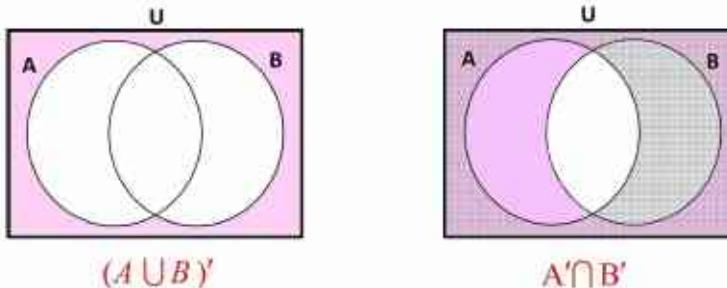


$(A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A)$	شرکت پذیری اجتماع
$=[(A-B) \cup (A \cap B)] \cup (B-A)$	تبديل تفاضل به اشتراك
$=[(A \cap B') \cup (A \cap B)] \cup (B \cap A')$	عكس عمل توزيع پذيری
$=[A \cap (B' \cup B)] \cup (B \cap A')$	تعريف متمم
$=(A \cap U) \cup (B \cap A')$	تعريف مرجع
$=A \cup (B \cap A')$	توزيع پذيری
$=(A \cup B) \cap (A \cup A')$	تعريف متمم
$=(A \cup B) \cap U$	تعريف مرجع
$=A \cup B$	@sinxcosx ملاسعيدي 09168324500

## قوانين دمورگان

### فعالیت

۱ فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو مجموعه از مجموعه مرجع  $U$  باشند، روی شکل سمت چپ،  $(A \cup B)'$  و روی نمودار سمت راست،  $(A' \cap B')$  را هاشور بزنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



۲ اگر فرض کنیم  $\{1, 2, \dots, 10\}$   $U = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$  و  $A = \{2, 4, 6, 7, 9, 10\}$   $B = \{1, 2, 5, 7, 9, 10\}$  هر یک از مجموعه‌های  $'$  و  $(B' \cap A')$  را تشکیل داده و باهم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$\left. \begin{aligned} A \cap B &= \{2, 4, 6\} \Rightarrow (A \cap B)' &= \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \\ A' \cup B' &= \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cup \{1, 2, 5, 7, 9, 10\} &= \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (A \cap B)' = A' \cup B'$$

تساوی‌های زیر را که به قوانین دمورگان معروف‌اند برای هر دو مجموعه دلخواه از مجموعه مرجع  $U$  برقرارند:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(الف)} (A \cup B)' = (A' \cap B') \\ \text{(ب)} (A \cap B)' = (A' \cup B') \end{array} \right.$$

با استفاده از روش عضوگیری دلخواه و تعریف تساوی بین دو مجموعه، تساوی  $(A \cup B)' = (A' \cap B')$  را اثبات کنید. (باید ثابت کنید  $(A' \cap B') \subseteq (A \cup B)'$  و  $(A \cup B)' \subseteq (A' \cap B')$ )

$$\begin{aligned} \forall x \in (A \cup B)' &\Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' \Rightarrow x \in (A' \cap B') \Rightarrow (A \cup B)' \subseteq (A' \cap B') \end{aligned}$$

روابط صفحه قبل برگشت پذیرند، شما به طریق مشابه نشان دهید که  $(A' \cap B') \subseteq (A \cup B)$  که در این صورت تساوی الفا بات می‌شود.

$$x \in A' \cap B' \Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in (A \cup B)' \Rightarrow A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$$

### کار در کلاس

با استفاده از قوانین و خواص (جبر مجموعه‌ها) درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید:

الف  $(A-B)' = (A' \cup B)$       ب)  $(A-B)' = (A \cap B')' = A' \cup B$

ب)  $(A-B)-C = (A-C)-B$       ب)  $(A-B)-C = (A \cap B') \cap C' = (A \cap C') \cap B' = (A-C)-B$

ب)  $A-(B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$       ب)  $A-(B \cap C) = A \cap (B \cap C)' = A \cap (B' \cup C') = (A \cap B') \cup (A \cap C') = (A-B) \cup (A-C)$

مثال: با استفاده از جبر مجموعه‌ها درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف  $A-(B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$

ب)  $A \cap (B-C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

ب)  $A-(B-C) = (A-B)-C$

اگر  $A=B$  آنگاه  $(A \cup B) = (A \cap B)$

الف)  $(A-B) \cap (A-C)$

$= (A \cap B') \cap (A \cap C')$

تبديل تفاضل به اشتراک

$= [(A \cap B') \cap A] \cap C'$

شرکت پذیری

$= [A \cap (A \cap B')] \cap C'$

جا به جایی

$= [(A \cap A) \cap B'] \cap C'$

شرکت پذیری

$= (A \cap B') \cap C'$

$A \cap A = A$

$= A \cap (B' \cap C')$

شرکت پذیری

$= A-(B' \cap C')$

تبديل اشتراک به تفاضل

$= A-(B \cup C)$

قانون دمورگان

ب)  $(A \cap B) - (A \cap C)$

تبديل تفاضل به اشتراک

$= (A \cap B) \cap (A \cap C)'$

قانون دمورگان

$= [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C']$

توزيع پذیری اشتراک نسبت به اجتماع

$= [(A \cap A') \cap B] \cup [A \cap (B \cap C')]$

قوانین جا به جایی و شرکت پذیری

$= (\emptyset \cap B) \cup [A \cap (B-C)]$

تبديل اشتراک به تفاضل و تعریف متهم

$= \emptyset \cup [A \cap (B-C)]$

$= A \cap (B-C)$

ب) با کمی تأمل متوجه می‌شویم که برای رسیدن از یک طرف تساوی به طرف دیگر دچار مشکل شده و این کار انجام نمی‌شود

ولی برای اینکه ادعا کنیم این تساوی همواره برقرار نیست، کافی است مثال نقض بزنیم:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad B = \{3, 4, 5\} \quad C = \{5, 6, 7\} \quad U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A-(B-C) = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{3, 4\} = \{1, 2, 5\}$$

$$(A-B)-C = \{1, 2\} - \{5, 6, 7\} = \{1, 2\}$$

ت) وقتی می‌نویسیم  $C=D$  یعنی  $C \cup D = D \cap C$  یک مجموعه‌اند، با دو نام و لذا وقتی تساوی بین مجموعه‌ها به کار می‌بریم می‌توان نوشت طرفین تساوی را با هر مجموعه‌ای اجتماع و با اشتراک بگیریم یعنی از اینکه  $C=D$  نتیجه می‌شود  $C \cup D = D \cup C$  و  $C \cap D = D \cap C$ .

$$A \cup B = A \cap B \Rightarrow A \cap (A \cup B) = A \cap (A \cap B)$$

$$\xrightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اشتراک}} A = (A \cap B) \xrightarrow{\text{قضیه}} A \subseteq B \quad (1)$$

$$(A \cup B) = (A \cap B) \Rightarrow A \cup (A \cup B) = A \cup (A \cap B)$$

$$\xrightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اجتماع}} (A \cup B) = A \xrightarrow{\text{قضیه}} B \subseteq A \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow A = B$$

روش دوم: درباره روش زیر که به اختصار نوشتۀ شده است، با هم کلاسی خود گفتگو کرده و توضیح دهید:

$$A \subseteq (A \cup B) = (A \cap B) \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B$$

و به طریق مشابه ثابت می‌شود  $B \subseteq A$  و نتیجه می‌شود  $A = B$ .

### کار در کلاس

**۱۱** اگر  $\{1, 2, \dots, 15\} = A$  و  $\{1, 2, \dots, 6\} = B$  و  $\{1, 2, \dots, 10\} = U$  حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

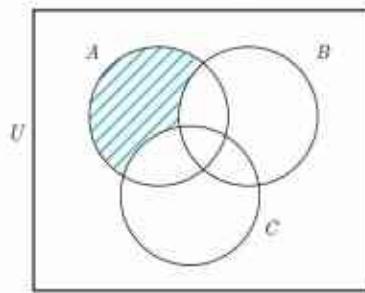
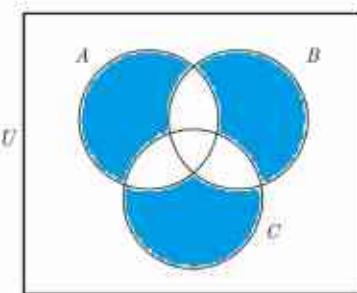
$$\text{(الف)} (A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B) = A \cap U = A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

$$\text{(ب)} (A - B) \cup ((A \cap B') \cap [(B - A) \cup A']) = (A - B) \cup ((A - B) \cap [(B - A) \cup A']) \\ \xrightarrow{\text{قانون جذب}} = A - B = \{1, 2, 3, 4\}$$

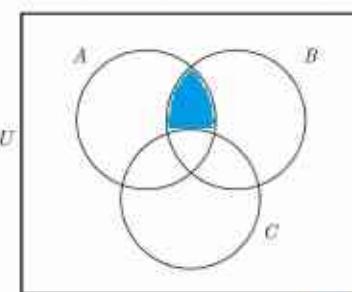
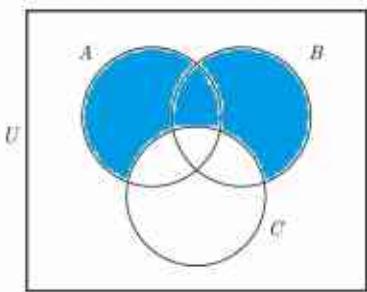
(راهنمایی: ابتدا با استفاده از جبر مجموعه‌ها عبارت‌ها را ساده کنید.)

**۲۲** با توجه به نمودارون که در رویه رسم شده است مانند نمونه برای هر حالت و به صورت جداگانه بخشی را که به صورت توصیفی مشخص کرده‌ایم، هاتسور بزنید.

الف) اعضایی که فقط در  $A$  باشند.



پ) اعضایی که در  $A$  و  $B$  باشند ولی در  $C$  نباشند.



### ضرب دکارتی بین دو مجموعه

قبل با تعریف زوج مرتب آشنا شده اید و می دانید که «هر دو شیئی مانند  $x$  و  $y$  تشکیل یک زوج می دهند که اگر برای آنها ترتیب قائل باشیم به آن یک زوج مرتب گفته می شود و با نماد  $(x,y)$  نشان می دهیم» و البته می دانیم که  $(x,y)=(z,t)$  اگر و تنها اگر  $x=z$  و  $y=t$ .

عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعه  $A$  و  $B$  این امکان را برای ما فراهم می سازد تا مجموعه جدیدی بسازیم که اعضای آن هر کدام یک زوج مرتب بوده و هر یک از این زوج های مرتب از اعضای  $A$  و  $B$  ساخته می شوند. بنابراین مجموعه حاصل، دارای اعضایی از جنس زوج مرتب بوده و به اعضای  $A$  یا  $B$  شبیه نبوده و فقط اعضای  $A$  و  $B$  در ساختن آنها نقش دارند.

تعریف عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعه: اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه دلخواه باشند  $A \times B$  مجموعه ای است که به صورت

$$A \times B = \{(x,y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

در تعریف قبل توجه دارید که در هر  $(x,y)$  متعلق به  $A \times B$ ، همواره مؤلفه یا مختص اول یعنی  $x$  باید از مجموعه  $A$  و متاظرا مؤلفه دوم یعنی  $y$  باید از مجموعه  $B$  باشد.

مثال: اگر  $A=\{2,4,6\}$  و  $B=\{4,5\}$  در این صورت مجموعه های  $A \times B$  و  $B \times A$  را تشکیل دهید و با هم مقایسه کنید.

$$A \times B = \{(2,4), (2,5), (4,4), (4,5), (6,4), (6,5)\}$$

$$B \times A = \{(4,2), (4,4), (4,6), (5,2), (5,4), (5,6)\}$$

واضح است که  $A \times B \neq B \times A$  (کافی است فقط در یک عضو با هم فرق داشته باشند، مثلاً  $(4,2) \neq (2,4)$  و  $(4,2) \in A \times B$  و  $(2,4) \notin B \times A$ ).

### کار در کلاس

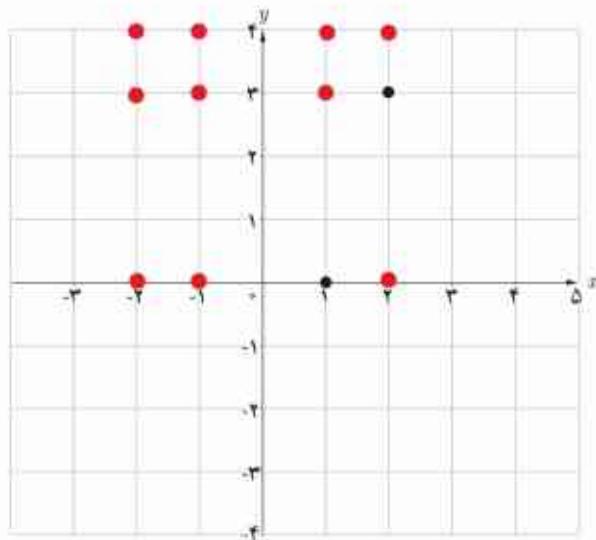
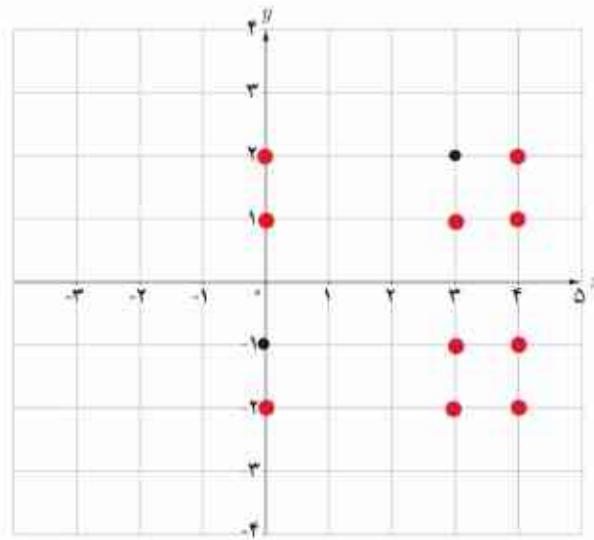
در مثال قبل دیدید که در مجموعه  $A \times B$  هر عضو  $A$  دو زوج مرتب تولید کرد و در کل ۶ زوج مرتب به وجود آمد حال اگر  $n(A)=m$  و  $n(B)=k$  با استفاده از تعریف عمل ضرب دکارتی و حاصل ضرب، نشان دهید، نشان دهید،  $n(A \times B)=mk$

برای نوشتن ضرب دکارتی باید به ازای هر عضو  $A$  تمام اعضای مجموعه  $B$  نوشته شوند، یعنی برای هر عضو  $A$ ،  $K$  حالت داریم. از طرفی  $A$  دارای  $m$  عضو است، پس طبق اصل ضرب،  $A \times B$  دارای  $m \times k$  عضو است.

**۱** اگر  $A = \{1, -1, 2, -2\}$  و  $B = \{0, 2, 4\}$  باشد، ابتدا مجموعه های  $(A \times B)$  و  $(B \times A)$  را تشکیل داده و سپس نمودار مختصاتی هر یک از این مجموعه ها را رسم کنید. (نمودارها را کامل کنید).

$$A \times B = \{(1, 0), (1, 2), (1, 4), (-1, 0), (-1, 2), (-1, 4), (2, 0), (2, 2), (2, 4), (-2, 0), (-2, 2), (-2, 4)\}$$

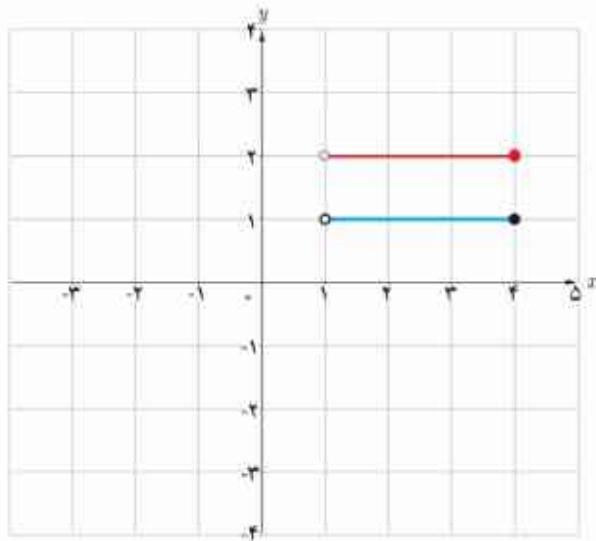
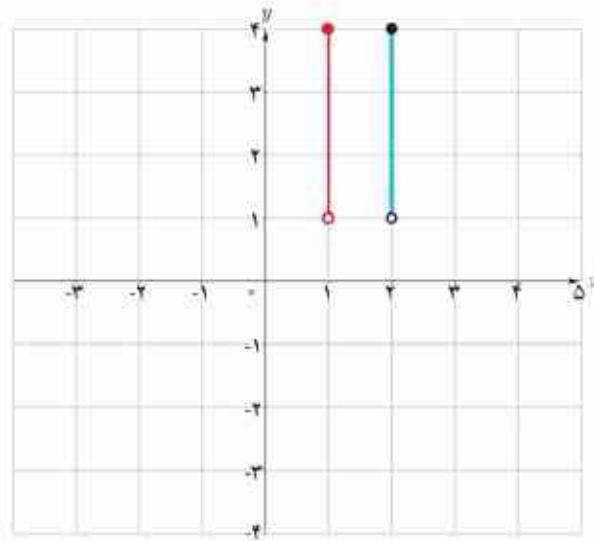
$$B \times A = \{(0, 1), (0, -1), (0, 2), (0, -2), (2, 1), (2, -1), (2, 2), (2, -2), (4, 1), (4, -1), (4, 2), (4, -2)\}$$

نمودار مختصاتی  $A \times B$ نمودار مختصاتی  $B \times A$ 

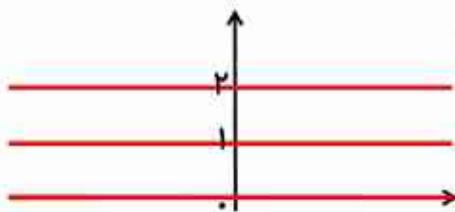
**۲** اگر فرض کنیم  $[1, 2] = \{1, 2\}$  و  $A = [1, 2]$  در این صورت نمودارهای مربوط به  $B \times A$  و  $A \times B$  که بخشی از آنها رسم شده است را تکمیل کنید.

$$A \times B = \{(x, y) | x \in [1, 2] \wedge y \in B\}$$

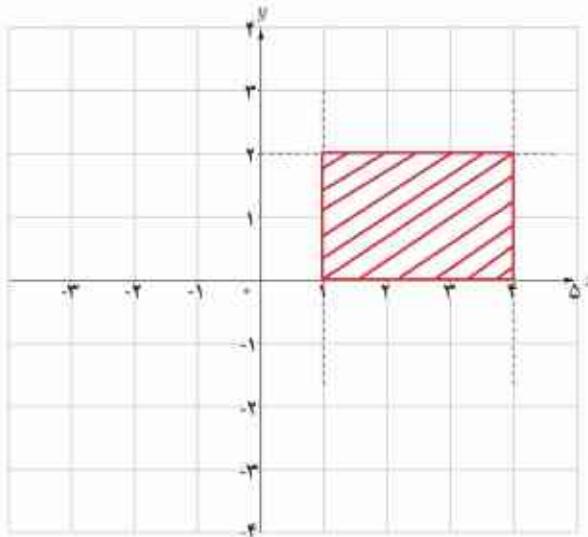
$$B \times A = \{(x, y) | (x = 1 \vee x = 2) \wedge 1 < y \leq 2\}$$

نمودار  $A \times B$ نمودار  $B \times A$

۴ اگر فرض کنیم  $A = \mathbb{R}$  و  $B = \{0, 1, 2\}$  نمودار  $A \times B$  را رسم کنید.



۵ در صورتی که  $A = [0, 4]$  و  $B = [0, 2]$  در این صورت نمودار  $(A \times B)$  را که بخشی از صفحه مختصات دکارتی است،  $A \times B = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$  هاشور بزنید.



۶ در صورتی که فرض کنیم  $A = \mathbb{R}$  و  $B = \mathbb{R}$  در این صورت حاصل ضرب  $A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  را چگونه تعبیر می کنید؟ این مجموعه شامل تمام نقاط صفحه مختصات است.

### کار در کلاس

اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه دلخواه باشند در این صورت:

$$(الف) A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

$$(ب) A \times B = B \times A \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$$

ایات (الف) از برهان خلف استفاده می کنیم:

فرض  $A \times \emptyset \neq \emptyset$  کنیم (فرض خلف) در این صورت حداقل یک عضو مانند  $(x, y)$  در  $A \times \emptyset$  باید وجود داشته باشد

$$(x, y) \in A \times \emptyset \xrightarrow{\text{تعريف ضرب دکارتی}} x \in A \wedge y \in \emptyset \quad \text{تناقض}$$

که در این صورت:

و چون  $y \in \emptyset$  یک تناقض است (مجموعه  $\emptyset$  فاقد عضو است) پس فرض خلف باطل شده و حکم برقرار می باشد، به طرق مشابه ثابت کنید که  $\emptyset \times A = \emptyset$ .

برهان خلف: فرض می کنیم  $\emptyset \times A \neq \emptyset$  در این صورت حداقل یک عضو مانند  $(x, y)$  در  $\emptyset \times A$  باید

$$(x, y) \in \emptyset \times A \Rightarrow x \in \emptyset \wedge y \in A \quad \text{تناقض}$$

وجود داشته باشد که در این صورت:

پس فرض خلف باطل شده و حکم برقرار است.

ا) اگر  $A = \emptyset$  باشد حکم اثبات می‌شود.

حال فرض کنیم  $A \neq \emptyset$  و  $B \neq \emptyset$  که در این صورت به روش عضوگیری و با توجه به تعریف ضرب دکارتی و فرض  $A \times B = B \times A$  ثابت می‌کنیم.

$$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \Rightarrow \exists x; x \in A \wedge \exists y \in B \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} \exists(x, y); (x, y) \in A \times B$$

$$\xrightarrow{A \times B = B \times A} (x, y) \in B \times A \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x \in B \wedge y \in A \Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$$

(x) که از  $A$  فرض کردیم ثابت شد در  $B$  است و (y) که از  $B$  فرض کردیم ثابت شد در  $A$  است.

@sinxcosx  
09168324500

### تمرین

۱

با استفاده از تعریف اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت پذیری و توزع پذیری برای ترکیب عطفی در گزاره‌ها، هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف)  $A \cap B = B \cap A$

اثبات:  $A \cap B = \{x \in U | x \in A \wedge x \in B\} = \{x \in U | x \in B \wedge x \in A\} = B \cap A$

ب)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

اثبات:  $A \cap (B \cap C) = \{x \in U | x \in A \wedge x \in B \cap C\}$   
 $= \{x \in U | x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)\} = \{x \in U | (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C\}$   
 $= \{x \in U | x \in (A \cap B) \wedge x \in C\} = (A \cap B) \cap C$

پ)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

اثبات:  $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C$   
 $\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$   
 $\Rightarrow x \in A \cap B \wedge x \in A \cap C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

به طور مشابه ثابت می‌شود  $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$  بنابراین دو مجموعه باهم برابرند.

### پاسخ این قسمت در صفحه ۴

۲ درستی هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

بعد نوشته شده است.

الف)  $(A \cap B) \cup (B' \cap A) = A$

ب)  $(A' \cap B') \cap A = \emptyset$

ب)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$

ت)  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$

۳ هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید:

الف)  $(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)$

ب)  $(A \cup B) - B$

پ)  $[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B)$

۴ درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف)  $(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow X = U$

ب)  $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

پ)  $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

ت)  $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

ث)  $(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \emptyset$

ج)  $[(A \cup B) = (A \cup C) \wedge (A \cap B) = (A \cap C)] \Rightarrow B = C$

۵ اگر  $\{z\} = \{x+1, 4, -2\}$  و  $A = \{y+2, 5, 0\}$  در این صورت با فرض  $A \times B = B \times A$  بیشترین مقدار برای  $(x+y+z)$  را باید.

۶ با توجه به مجموعه‌های داده شده، نمودار هر یک از حاصل ضرب‌های  $A \times B$  و  $B \times A$  را رسم کنید.

الف)  $A = \{2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$

ب)  $A = \{2, 4\}, B = \{1, 5\}$

پ)  $A = [2, 6], B = [3, 8]$

ت)  $A = \mathbb{N}, B = [1, 4] =$

ث)  $A = \mathbb{R}, B = \{2, 3\}$

الف)  $(A \cap B) \cup (B' \cap A) = (A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap (B \cup B') = A \cap U = A$  -۲

ب)  $(A' \cap B') \cap A = (B' \cap A') \cap A = B' \cap (A' \cap A) = B' \cap \emptyset = \emptyset$

پ)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap A) \cap (B \cap C) = A \cap [A \cap (B \cap C)] = A \cap [(A \cap B) \cap C]$   
 $= A \cap [C \cap (A \cap B)] = (A \cap C) \cap (A \cap B) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$

ت)  $A \cup (B \cup C) = (A \cup A) \cup (B \cup C) = A \cup [A \cup (B \cup C)] = A \cup [(A \cup B) \cup C]$   
 $= A \cup [C \cup (A \cup B)] = (A \cup C) \cup (A \cup B) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$

 @sinx cosx ملاسعیدی  
09168324500

۳- الف) ابتدا عبارت درون کروشه را ساده می کنیم :

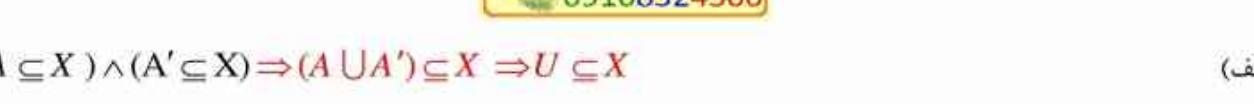
$$(A' \cap B) \cup \left( \underbrace{[(B \cap A) - B']}_{B \cap A} \cap (B \cup A) \right) =$$
 بنابراین :

$$= (B \cap A') \cup (B \cup A) = (B - A) \cup (B \cup A) \xrightarrow{(B-A) \subseteq (B \cup A)} = B \cup A$$

$$(A \cup B) - B = (A \cup B) \cap B' = \underbrace{(A \cap B')}_{A - B} \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset} = A - B$$
 ب

$$[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B) = [(A \cup B) \cap A'] \cup (A \cap B) = \left[ \underbrace{(A \cap A')}_{\emptyset} \cup (B \cap A') \right] \cup (A \cap B)$$
 پ

$$= (B \cap A') \cup (A \cap B) = B \cap \underbrace{(A' \cup A)}_U = B$$

 @sinx cosx ملاسعیدی  
09168324500

$$(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow (A \cup A') \subseteq X \Rightarrow U \subseteq X$$
 الف

از طرفی می دانیم همواره  $X \subseteq U$  است .

$$(A - B) \cup (A \cap B) = (A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap \underbrace{(B' \cup B)}_{\emptyset} = A$$
 ب

$$(A - C) \cap (B - C) = (A \cap C') \cap (B \cap C') = (A \cap B) \cap (C' \cap C') = (A \cap B) \cap C' = (A \cap B) - C$$
 پ

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)' = (A \cup B) \cap (A' \cup B')$$

$$= (A \cup B) \cap (A' \cup B') = [(A \cup B) \cap A'] \cup [(A \cup B) \cap B']$$

$$= [\underbrace{(A \cap A')}_{\emptyset} \cup \underbrace{(B \cap A')}_{B-A}] \cup [\underbrace{(A \cap B')}_{A-B} \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset}] = (B - A) \cup (A - B) = (A - B) \cup (B - A)$$

$$(A \cup B) \cap (A' \cap B') = (A \cup B) \cap (A \cup B)' = \emptyset$$

$$B = B \cap (A \cup B) \xrightarrow{A \cup B = A \cup C} = B \cap (A \cup C) = (B \cap A) \cup (B \cap C)$$

$$\xrightarrow{A \cap B = A \cap C} = (A \cap C) \cup (B \cap C) = C \cap (A \cup B) \xrightarrow{A \cup B = A \cup C} = C \cap (A \cup C) = C$$

@sinx cosx ملاسعیدی  
  
09168324500

.  $\{y + 2, 5, z\} = \{x + 1, 4, -2\}$  نتیجه می شود  $A = B$  بنا بر این:  $A \times B = B \times A$  باشد.

واضح است که فقط می تواند با  $x + 1$  برابر باشد لذا  $x = 4$  است. اما در موارد دیگر دو حالت داریم:

$$[(y + 2 = 4) \wedge (z = -2)] \vee [(y + 2 = -2) \wedge (z = 4)]$$

$$\Rightarrow [(y = 2) \wedge (z = -2)] \vee [(y = -2) \wedge (z = 4)] \Rightarrow y + z = 0$$

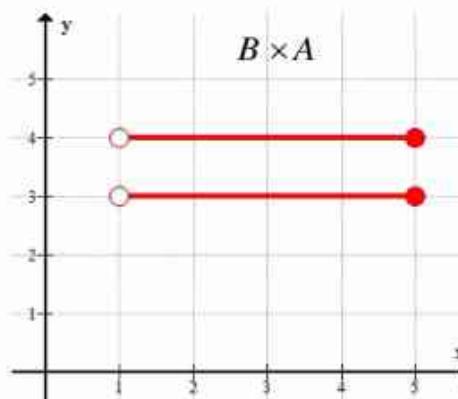
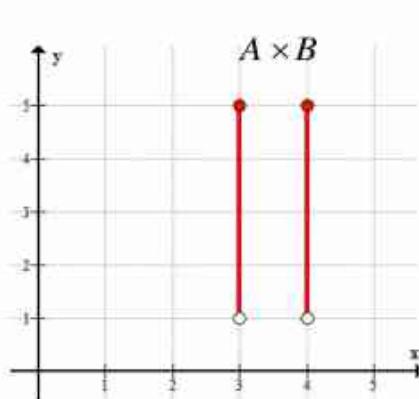
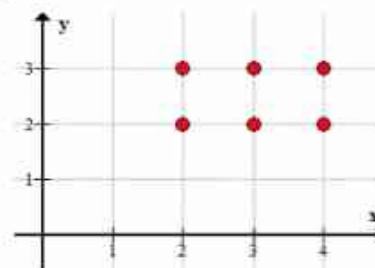
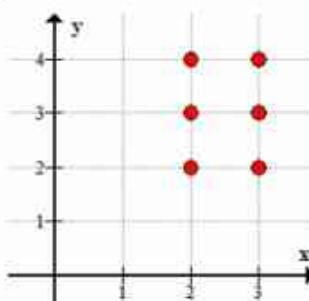
درنتیجه  $x + y + z = 4$  خواهد بود.

@sinx cosx ملاسعیدی  
  
09168324500

$$B = \{2, 3, 4\} \text{ و } A = \{2, 3\}$$

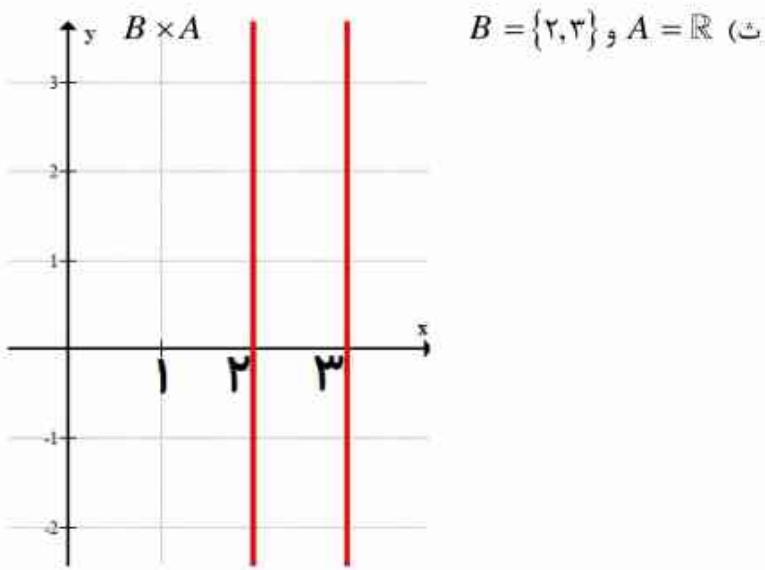
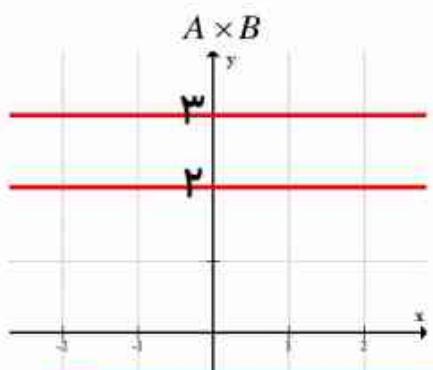
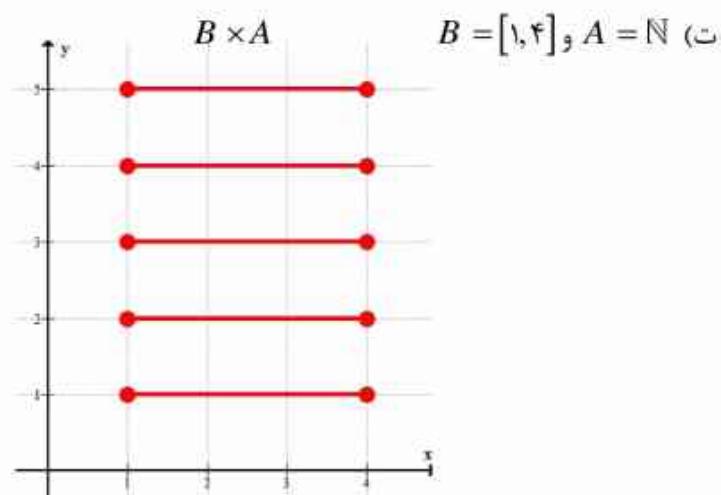
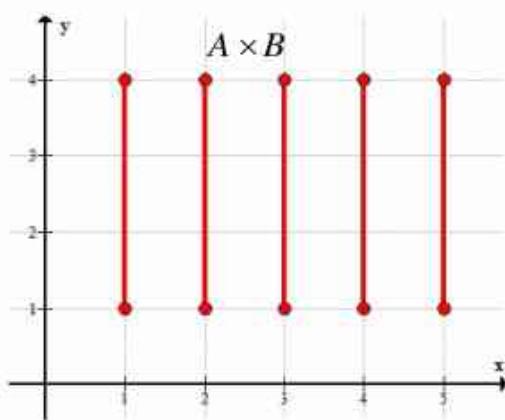
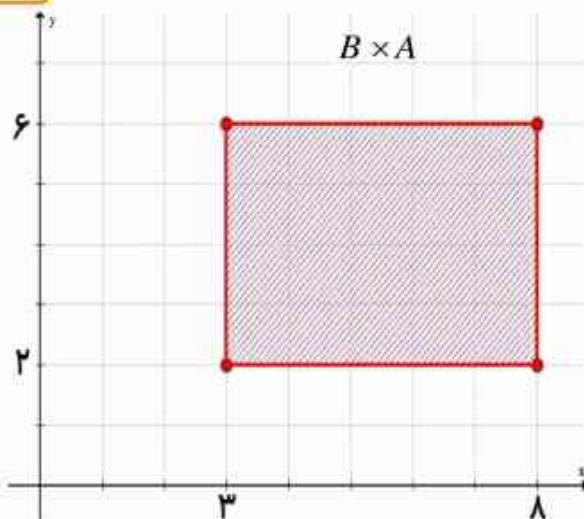
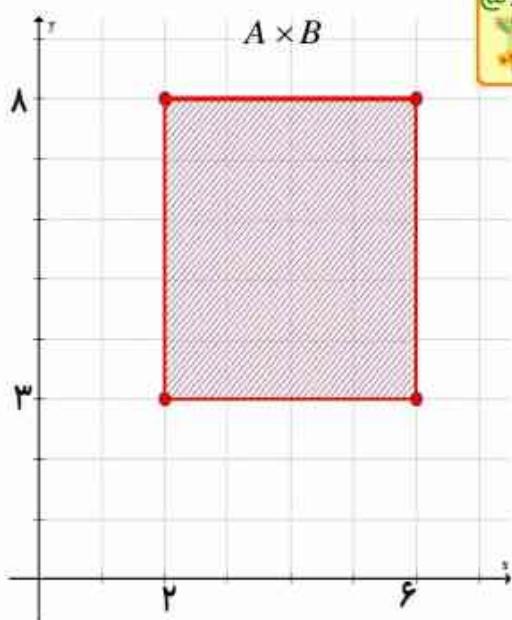
$$A \times B = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

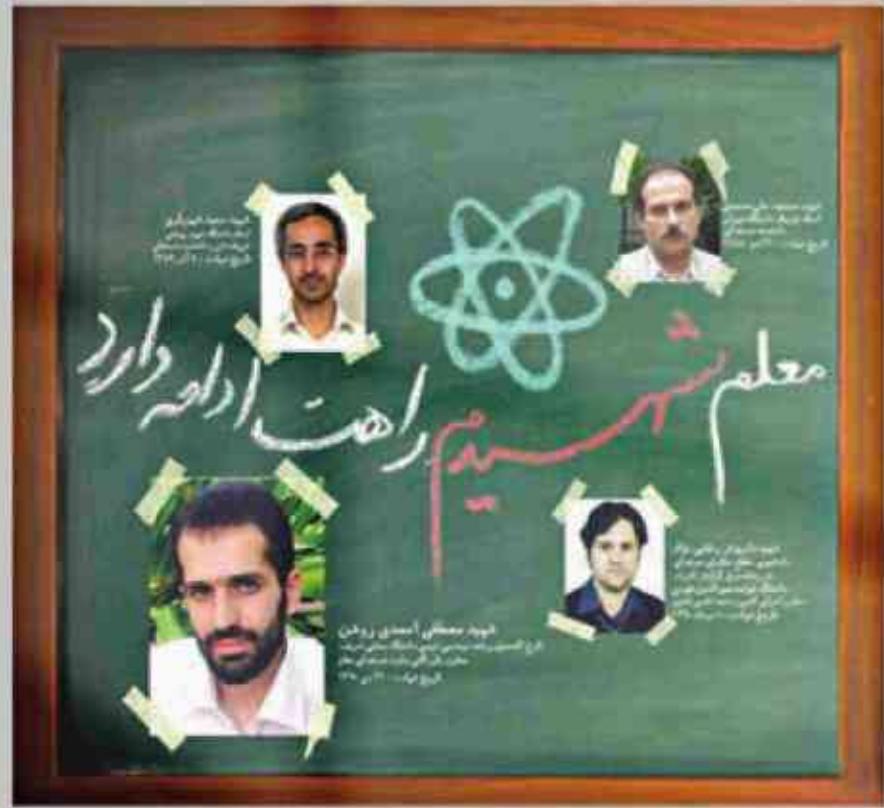
$$B \times A = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3)\}$$



$$B = (1, 5], A = \{2, 3\}$$

$B = [3, 8], A = [2, 6]$  (ج)





امروزه بخدمت گرفتن اسراری  
هسته‌ای بسون آگاهی از علم  
فیزیک و انجام محاسبات  
بیجده، با گلک ابر رایانه‌ها مسکن  
پیش بخسی از این محاسبات  
به واکنش‌های هسته‌ای مرسوط  
است؛ هنگام که یک توپرون به  
ست جسی رادیواکتیو تسلیک  
می‌شود؛ پس از طی مسیری، یا از  
جسم خارج می‌شود، یا جذب یک  
آتم می‌شود و یا اتم را متلاشی  
می‌کند و در نتیجه چند توپرون و  
مقداری انرژی بوجوده می‌اید.  
توپرون‌های از آن‌گهه این زنجیره با  
سرعتی بسیار بالا ادامه می‌دهند.  
بررسی جنین واکنش یا استفاده  
از تسبیه‌سازی‌های رایانه‌ای اعجم  
می‌شود و مدل‌های احتمالاتی در  
آن نقش بسیاری دارند.

## ۲ احتمال

ملاسعیدی @sinxCOSX  
09168324500

- ۱ مبانی احتمال
- ۲ احتمال غیر هم‌شانس
- ۳ احتمال شرطی
- ۴ پیشامدهای مستقل وابسته



حل کارد در کلاس ها و فعالیت ها به همراه

پاسخ تمرین های فصل دوم کتاب آمار و احتمال

رشته ریاضی فیزیک

چاپ تابستان ۱۳۹۶

گروه ریاضی استان خوزستان

تهیه و تنظیم: افشین ملاسعیدی

# هزینه می استفاده، صلواتی بجهت سلامتی امام زمان (عج)

مقدمه:

فایلی که در اختیار شما قرار گرفته توسط اینجانب - افشین ملاسعیدی - در مرداد ماه ۱۳۹۶ نوشته و تنظیم شده است و امیدوارم دارای کمترین خطای بوده و مفید فایده برای شما باشد.

از همکاران ذیل ، استاد محترم آقایان عزیز عسکری ، احمد عامری ، عبدالامیر عباس زاده ، جابر عامری و خانم ها ژیلا باقری و آزاده حاجی هاشمی که در تهیه این مجموعه با من همکاری داشته اند کمال تشکر می نمایم .

از همکاران عزیز تقاضا می کنم در صورت مشاهده ای هر گونه اشتباه اعم از علمی یا تایبی بنده را مطلع ساخته تا در جهت رفع آن اقدام نموده و بتوانم از تجربیات شما استفاده کنم .

جهت ارتباط می توان به یکی از دو روش زیر عمل کرد :

۱- تلگرام : @sinxcosx

۲- همراه : 09168324500

## ایرادت و اشکالات تایپی مربوط به قصل دوم

۱- صفحه ۴۳ - سطر چهارم از کار در کلاس : بهتر است نقل قول معلم ، در ادامه ی صحبت ششم نباشد و آن را در سطر پایین تایپ نمود (تصویر زیر)

■ ششم : بله، من هم موافق هستم.

سوالی که خانم معلم برسیدند این است که اگر ناس را برتاب کسی و عدد ۲ باید، آیا بیشامد {۲، ۴، ۶} رخ داده است؟

۲- صفحه ۴۴ - مثال رانده تاکسی : شایسته است تعییر زیر صورت گیرد :

ما هم باشد، چیست؟

حل : با توجه به اینکه تعداد این دو نوع ~~مسیر~~ رفت و در برگشت

۳- صفحه ۴۶ - قسمت ۳ کار در کلاس : شایسته است تمام شهر یا منطقه ای بیان می شد .

۴- فردا دشرا باوان

A: خورشید در آسمان دیده شود،

سازگار

B: باران بیارد.

۴- صفحه ۵۵ سطر ۲۰ ، اشتباه تایپی رخ داده که بهتر است به شکل زیر تصحیح شود :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$
$$P(A | B) \quad P(B)$$

۵- صفحه ۵۸ ، سطر دوازدهم ، اشتباه تایپی رخ داده که به شکل زیر باید اصلاح شود :

دلیل اینکه  $P(A)$  برابر  $\frac{1}{3}$  است، این است که از سه کارت، یکی دور و سیز است و  $P(B|A) = 1$  چون اگر کارت انتخابی

۶- صفحه ۵۹ ، در نمودار درختی دو نماد خوب و نوشته شده که بهتر است پاک شوند.

۷- صفحه ۶۵ ، تمرین ۳ ، احتمال خواسته شده ایهام دارد . زیرا منظور از "دو روز بعد" مشخص نیست ،

ایا " فقط پس فردا" متظور مؤلف است یا "هم فردا و هم پس فردا" ؟

۸- صفحه ۶۶ ، تمرین ۱۲ ، نماد ؟ اضافی تایپ شده که بهتر است پاک شود .

۹- صفحه ۶۶ ، تمرین های ۱۳ و ۱۴ شایسته تر آن بود که ضمن سوال اشاره می شد : "با استفاده از برهان خلف ثابت کنید ... "

ضمن تشکر از رحماتی که مولفین محترم ، منحصراً شده اند ، امیدوارم قبل از چاپ

اولین نسخه ی کتاب ایرادات فوق بروط گردد .

ملاسعیدی @sinxcosx

09168324500

## درس ۱ مبانی احتمال

### آمار و احتمال به چه کار می‌آیند؟

فرض کنید کارشناسان یک کارخانه تولید لوازم خانگی می‌خواهند برای سال آینده، تغییراتی در میزان تولید کالاهای کارخانه بوجود آورند؛ آنها باید مشخص کنند که سرمایه کارخانه به چه نسبت‌هایی صرف تولید پخته‌جال، کولر، اجاق گاز و... شود. با توجه به اینکه آنها در مورد آنچه در آینده رخ خواهد داد، اطیبان ندارند، چگونه می‌توانند در این مورد تصمیمی درست بگیرند؟ چگونه می‌توانند از بین دو پیشنهاد مختلف، یکی را بر دیگری ترجیح دهند؟

ابزارهای حل چنین مسائلی، که با ناآگاهی نسبی از شرایط و با وقایع آینده همراه است، علم آمار و علم احتمال است.

به کمک علم آمار می‌توان اطلاعات سال‌های گذشته کارخانه را بدسترسی جمع‌آوری کرد و از آنها توصیفی مناسب از وضعیت تقاضای کالاهای مختلف بدست آورده و سپس به سؤال‌هایی مانند «در سال آینده تقاضای پخته‌جال، کولر، اجاق گاز و... چگونه خواهد بود؟» پرداخت. در قدم بعدی، علم احتمال کمک می‌کند که به بهترین تصمیم ممکن برسیم.

بطور خلاصه بخشی از این دو علم بهنوعی در جهت عکس هماند: آن‌گاه که با جامعه‌ای ناشناخته سرو کار داریم، شناختن جامعه با استفاده از نمونه‌ها و داده‌ها یک کار آماری است، ولی اگر جامعه را

با جزئیات مورد نیاز بشناسیم و بخواهیم بدائیم نمونه‌هایی از آن جامعه چگونه

خواهد بود، علم احتمال به کمک ما می‌آید. در شکل رو به رو، این موضوع نشان داده شده است: ظرفی که در آن مهره‌های رنگی وجود دارد، مانند جامعه است و مهره‌هایی که در مشت هستند، مانند نمونه‌اند.



علم احتمال: بررسی یک نمونه نامعلوم از یک جامعه معلوم



علم آمار: شناختن جامعه نامعلوم، با استفاده از نمونه‌های جمع‌آوری شده معلوم

کدام یک از سؤال‌های زیر مربوط به علم آمار و کدام یک مربوط به علم احتمال است؟ در هر مورد با دیگران گفت و گو کنید.

احتمال	آمار	صورت مسئله
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱- می‌دانیم ۹۰ تا از ۱۰۰ سبب یک جعبه سالم است. چند تا سبب از جعبه برداریم، تا تقریباً مطمن باشیم که دست کم یک سبب خراب برداشته‌ایم؟
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۲- درآمد کارمندان شهرداری چقدر است؟
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳- ۹۰ نفر از ۱۰۵ دانش‌آموز پایه بازدهم به ورزش شنا علاقه دارند. اگر ۲۰ نفر از این دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب کیم، چقدر ممکن است کمتر از ۱۵ نفر از آنها به شنا علاقه‌مند باشند؟
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴- در انتخابات هفتم اسفند ۱۳۹۴، شهرستان سواد کوه شمالی با مشارکت بیش از ۹۸/۲ درصد رکورددار بوده است. اگر از ۱۰ نفر واحد شرایط پرسیم که آیا در انتخابات شرکت کرده‌اند یا خیر، چقدر ممکن است پاسخ بیش از یک نفر منفی باشد؟
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۵- چه تعداد از دانش‌آموزان پایه بازدهم مدرسه شما به ورزش شنا علاقه دارند؟

### ریاضی‌دان‌ها چگونه به علم احتمال می‌پردازنند؟

ریاضی‌دانان معمولاً برای حل مسائل سخت و ییجده، ابتدا کار را از طراحی و حل مسائلی ساده شروع می‌کنند و سپس قدم به قدم با ساختن بنای استوار از تعاریف، مفاهیم، قضیه‌ها و... به سراغ مسائلی می‌روند که شاید در نگاه اول دست‌نیافتنی به نظر می‌رسیدند. باید مانند ریاضی‌دان‌ها مسئله ساده‌ای را که در آن اطمینان وجود ندارد، بررسی کیم:

### فعالیت



برق کاری نیاز به یک لامپ سالم دارد. دو جعبه داریم که در اولی و دومی، بدتریب، ۵ و ۲ لامپ وجود دارد، ولی فقط برخی از این لامپ‌ها سالم‌اند: در اولی سه لامپ و در دومی ۱۲ لامپ سالم است. او باید یکی از دو جعبه را انتخاب کند و از آن جعبه یک لامپ، به تصادف، بردارد. به نظر شما، او بهتر است کدام جعبه را انتخاب کند؟

جواب این سؤال ساده است: در جعبه اول ۴ درصد و در جعبه دوم ۶۵ درصد لامپ‌ها سالم‌اند، پس بهتر است جعبه **دوم** را انتخاب کند.

اگر نون فرض کنید دو جعبه همان شرایط را دارند، ولی برق کار از آن جعبه، دو لامپ، بدون آزمایش، بردارد. به نظر شما، او بهتر است کدام جعبه را انتخاب کند؟

در این حالت، تصمیم‌گیری به سادگی حالت اقل نیست.

به چند حالت مختلف می‌توان ۲ لامپ را یکی پس از دیگری از بین ۵ لامپ جعبه اول مذکور انتخاب کرد؟

پاسخ: برای انتخاب اول ۵ حالت و لامپ دوم ۴ حالت، در نتیجه  $5 \times 4 = 20$  حالت وجود دارد.

در چند حالت هر دو لامپ معیوب است؟ با وجود دو لامپ معیوب، برای انتخاب اول ۲ حالت و انتخاب دوم، ۱ حالت در نتیجه  $2 \times 1 = 2$  حالت داریم.

مشابه همین سوال‌ها را در مورد جعبه دوم بررسی کنید. برای انتخاب دو لامپ از بین ۲۰ لامپ  $20 \times 19 = 380$  حالت داریم.

با توجه به اینکه ۷ لامپ معیوب است، تعداد حالات معیوب بودن دو لامپ  $= 7 \times 6 = 42$  است.

با توجه به نتایج، انتخاب کدام جعبه را برای حالت دوم بهتر می‌دانید؟

احتمال معیوب بودن در جعبه اول  $\frac{1}{2}$  و در جعبه ای دوم  $\frac{42}{38}$  است، یعنی احتمال معیوب بودن در جعبه ای دوم بیشتر است.

لذا بهتر است جعبه ای اول انتخاب شود.

چنین مسائلی هر چند ساختگی‌اند، ولی ماهیت آنها بسیار شبیه همان مسئله‌ای است که کارشناسان کارخانه با آن مواجه

بودند: تصمیم‌گیری برای آینده‌ای که در مورد وقایع آن اطمینان نداریم.

## خواهانی

### از احتمال کیفی تا احتمال کمی

واژه احتمال و مشابه‌های آن مانند شناس، بخت، تصادف در بین مردم عامی هم رایج است: «فردا به احتمال زیاد باران می‌بارد»، «تیم والیبال ایران برای راهیابی به المپیک شناس زیادی در آینده دارد» و ...

مردم گاهی برای توصیف احساس خود در این موارد، از اعداد نیز استفاده می‌کنند، ولی منظور آنها صرفاً بیان یک حس کیفی است: «به احتمال ۹۹ درصد هفتاد بعد طلا گران می‌شود»، «تیم انتها جدول یک درصد هم شناس قهرمان شدن ندارد» و ...

شما نیز چند مثال بزنید که مردم با رسانه‌ها از عباراتی که معنای احتمال و عدم اطمینان می‌دهند استفاده می‌کنند. آیا شما مثالی در زندگی روزمره خود سراغ دارید که احتمال را با عدد بیان کنید و منظورتان فراتر از صرفاً بیان یک حس کیفی باشد؟

علم احتمال این عدم اطمینان کیفی را کمی می‌کند؛ یعنی آن را به عدد تبدیل می‌کند تا در چارچوب علم ریاضی فرار بگیرد و بتوان با کمک محاسبات ریاضی به نتایجی روشن‌تر، دقیق‌تر و قابل اثبات و انتکار سید.

### ترجمه زبان گزاره‌ها به زبان مجموعه‌ها

معمولًا وقتی از احتمال رخ دادن رویدادی صحبت می‌کنیم، آن رویداد را به شکل یک گزاره بیان می‌کیم؛ مثلاً می‌گوییم احتمال اینکه «فردا باران بیارد»، احتمال اینکه «نتیجه مسابقه فوتبال هفته آینده تساوی شود»، احتمال اینکه «متهم دستگیر شده، مجرم باشد» و ...

ولی ریاضی‌دانان گاهی به شکل دیگری احتمال را به کار می‌برند. برای روشن شدن این موضوع، همان مثال قبلی را به باد پیاوید: فرض کنید برق کار جعبه اول را انتخاب کرده و می‌خواهد از بین ۵ لامپ یکی را بردارد. لامپ‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم به نحوی شماره‌های ۱ تا ۳ سالم و شماره‌های ۴ و ۵ معیوب باشند.

شماره لامپی که بیرون کشیده می‌شود برای برق کار معلوم نیست، ولی به هر حال یکی از اعضای مجموعه زیر است:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

همان‌طور که می‌دانید در علم احتمال به این مجموعه «فضای نمونه» گفته می‌شود.

به هر عضو فضای نمونه یک «برآمد» می‌گویند.

برق کار در صورتی راضی می شود که لامپ انتخابی سالم باشد و این یعنی اینکه شماره لامپ ۱، ۲ یا ۳ باشد. در این صورت، این اتفاق را هم می توان با یک زیرمجموعه فضای نمونه مشخص کرد:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

همان طور که در سال های گذشته خوانده اید در علم احتمال به این زیرمجموعه ها «پیشامد» گفته می شود. در زبان علم احتمال به جای اینکه بگوییم «لامپ انتخاب شده سالم باشد»، می توانیم بگوییم «پیشامد A رخ دهد» و به جای اینکه بگوییم «احتمال سالم بودن لامپ انتخابی»، می توانیم بگوییم «احتمال رخ دادن A». عبارت اخیر خلاصه شده این عبارت است «احتمال اینکه شماره لامپ انتخابی عضو A باشد».

### کار در کلاس



زهرا و شبین در مورد سوالی که در باره برتاب یک تاس سالم در کلاس مطرح شده با هم صحبت می کنند. به نظر شما جه کسی درست می گوید؟

■ زهرا: فضای نمونه در این مسئله مجموعه  $\{1, 2, \dots, 6\}$  است. **درست**

■ شبین: بله، من هم موافق هستم. **درست**

سوالی که خانم معلم پرسیدند این است که اگر تاس را برتاب کنیم و عدد ۲ باید، آیا پیشامد  $\{2, 4, 6\}$  رخ داده است؟

■ زهرا: به نظرم نه، چون ۴ و ۶ هم علاوه بر ۲ عضو این پیشامدند. **نادرست**

■ شبین: ولی من فکر می کنم این پیشامد رخ داده است، چون این پیشامد شامل عدد ۲ است. **درست**

■ زهرا: پس ۴ و ۶ که نیامدند چه؟

■ شبین: یعنی باید آنها هم در برتاب تاس آمده باشند تا بگوییم آن پیشامد رخ داده است؟ اصلاً این طور که شما فکر می کنید، چگونه ممکن است پیشامد  $\{2, 4, 6\}$  رخ دهد؟ مگر می شود تاسی را برتاب کنیم و سه مقدار مختلف با هم ظاهر شود؟! **درست**

با توجه به مفهوم «رخ دادن یک پیشامد» می فهمیم که اگر  $A_1$  و  $A_2$  دو پیشامد باشند، آن گاه:

الف) اگر  $A_1$  زیرمجموعه  $A_2$  باشد، رخ دادن  $A_1$  رخ دادن  $A_2$  را نتیجه می دهد.

ب) رخ دادن پیشامد  $A_1 \cap A_2$ ، یعنی هر دو پیشامد  $A_1$  و  $A_2$  رخ دهد.

پ) رخ دادن پیشامد  $A_1 \cup A_2$ ، یعنی دست کم یکی از دو پیشامد  $A_1$  و  $A_2$  رخ دهد.

### تشخیص فضای نمونه



هرگاه بخواهیم مسئله ای را با یک علم احتمال بررسی کیم قدم اول شناختن فضای نمونه است. همان طور که گفته شد فضای نمونه مجموعه ای است که اعضای آن، که به آنها برآمد می گوییم، مشخص می کنند که نتیجه آزمایش یا مشاهده ای که در حال بررسی آن هستیم چه حالت هایی دارد؛ مثلاً در برتاب یک تاس، مجموعه  $\{1, 2, \dots, 6\}$  فضای نمونه است.

اگر بخواهیم نتایج حاصل از برتاب دو تاس را بررسی کنیم از عمل ضرب دکارتی مجموعه ها استفاده می کنیم؛ مجموعه  $\{1, 2, \dots, 6\} \times \{1, 2, \dots, 6\}$  که ۳۶ عضو دارد فضای نمونه است. البته لازم است که یکی از تاس ها را تاس اول و دیگری

را ناس دوم بنامیم تا مشخص شود که معنای برآمد (۱,۲) جیست. توجه داشته باشید که این برآمد غیر از برآمد (۲,۱) است.

در صورتی که آزمایشی متشکل از دو آزمایش با فضاهای نمونه  $S_1$  و  $S_2$  باشد فضای نمونه آن  $S_1 \times S_2$  است. مشابه این موضوع برای هر تعداد آزمایش همزمان نیز درست است.



مثال : یک راننده تاکسی خطی، در ایستگاه منتظر می ایستد تا حداقل چهار مسافر سوار کند. البته ممکن است با کمتر از چهار مسافر نیز حرکت کند. در مسیر برگشت نیز همین اتفاق می افتد. فضای نمونه برای توصیف چنین پدیده ای، اگر فقط تعداد مسافرها در دو مسیر رفت و برگشت برای ما مهم باشد، چیست؟

حل : با توجه به اینکه تعداد این دو نوع ~~مسافر~~<sup>مسیر</sup> رفت و در برگشت عددی بین صفر و چهار است، می توان مجموعه زیر را فضای نمونه گرفت :

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4\} \times \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

در این فضای نمونه، منظور از برآمد (۱,۲) این است که تاکسی با ۱ مسافر حرکت کرده و در برگشت ۲ مسافر سوار کرده است.

## اصول احتمال



در حالت کلی شناختن فضای نمونه برای توصیف یک رویداد تصادفی کافی نیست. علاوه بر آن لازم است که بدانیم احتمال رخ دادن پیشامدهای مختلف که زیرمجموعه های فضای نمونه اند، چقدر است. این موضوع را در درس بعد که در مورد احتمال غیرهمسانس است بهتر متوجه خواهید شد. به عنوان مثال، به وضعیت آب و هوای فله دماؤند در صبح نوروز سال آینده فکر کنید؛ می توان فضای نمونه را این چنین در نظر گرفت :

{آفتابی، ابری }

آیا چون فضای نمونه دو عضوی است باید احتمال هر کدام  $5^{\circ}$  درصد باشد؟  
ممکن است کسی فضای نمونه را به شکل زیر انتخاب کند :

{آفتابی، ابری بدون بارندگی، بارش باران، بارش برف، بارش تگرگ }

در این صورت آیا چون فضای نمونه پنج عضو دارد، باید احتمال هر کدام  $2^{\circ}$  درصد باشد؟  
اگر کسی به هر دو سؤال بالا جواب مثبت دهد، پس احتمال آفتابی بودن را یک بار «۵ درصد و یک بار  $2^{\circ}$  درصد» دانسته است!

## یک اشتباه تاریخی



مشهور است که دالمبر<sup>۱</sup>، ریاضی‌دان، فیزیک‌دان، فیلسوف و دانشمند فرانسوی فرن هجدهم، نصویر می‌کرد که اگر بک سکه را دو بار برتاب کنیم، احتمال اینکه دقیقاً یک بار رو بیاید، برابر یک سوم است. او این گونه استدلال می‌کرد:

در جنین آزماسی مه حالت وجود دارد: «هر دو رو»، «هر دو پشت» و «یک بار رو و یک بار پشت». در نتیجه احتمال وقوع هر یک از این حالات یک سوم است!

همان‌طور که گفته شد نکته این است که در یک فضای نمونه برآمدهای مختلف ممکن است احتمال برابر نداشته باشند. در این حالت، محاسبه احتمال برآمدها و پیشامدها ممکن است ساده نباشد، ولی احتمال پیشامدهای مختلف حتماً باید ویژگی‌هایی داشته باشند که به آنها اصول احتمال می‌گویند:

برای هر پیشامد مثل  $A$ ، احتمال رخ دادن آن با  $P(A)$  نمایش داده می‌شود که عددی حقیقی در بازه  $[0, 1]$  است.  
اصول احتمال عبارت اند از:

$$P(S)=1$$

برای هر دو پیشامد  $A$  و  $B$  که  $A \cap B = \emptyset$  داریم  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

به خاصیتی که در بند ۲ برای دو پیشامد  $A$  و  $B$  فرض شده است، یعنی  $A \cap B = \emptyset$ ، ناسازگاری این دو پیشامد گفته می‌شود و به این معناست که رخ دادن هر دوی آنها هم‌زمان محال است. در غیر این صورت، می‌گوییم  $A$  و  $B$  سازگارند.

## قضیه

در مورد هر فضای نمونه، گزاره‌های زیر درست است:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$P(\emptyset) = 0$$

اگر  $A$ ،  $B$  و  $C$  پیشامدهایی دو به دو ناسازگار باشند، آن‌گاه

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

(این قسمت را می‌توان برای هر تعداد پیشامد نیز تعمیم داد).

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \quad \text{داریم}$$

<sup>۱</sup>—Jean Baptiste le Rond d'Alembert (۱۷۱۷–۱۷۸۳)

۵ برای هر دو پیشامد دلخواه  $A$  و  $B$  داریم :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  ابات.

۱ به این موضوع توجه کنید که  $A$  و  $A'$  دو پیشامد ناسازگارند و اجتناب آنها برابر  $S$  می‌شود، داریم :

$$1 = P(S) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

$$\text{در نتیجه } P(A') = 1 - P(A)$$

۲ با توجه به اینکه  $\emptyset$  متمم  $S$  است داریم :

$$P(\emptyset) = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0$$

۳ توجه کنید که  $A$  و  $C$  دو پیشامد ناسازگارند ولذا

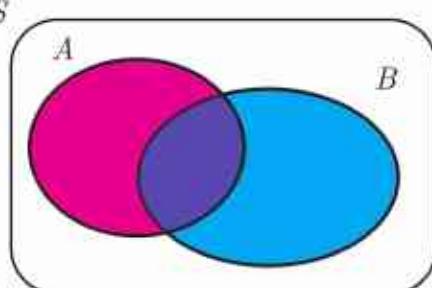
$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

۴ واضح است که  $(A-B) \cup (A \cap B)$  و پیشامدهای  $B$  و  $A \cap B$  ناسازگارند، پس

$$P(A) = P(A-B) + P(A \cap B)$$

$$\text{و این نتیجه می‌دهد که } P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

۵ توجه کنید که  $A \cup B = B \cup (A-B)$  و بعلاوه دو پیشامد  $B$  و  $A-B$  ناسازگارند. در نتیجه



$$P(A \cup B) = P(B) + P(A-B)$$

با استفاده از شماره ۴ حکم نتیجه می‌شود. (چرا؟)

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

### كار در کلاس

مشخص کنید که در هر قسمت دو پیشامدی که آمده است با هم سازگارند یا ناسازگار؟

۱ دانشآموزی که به تصادف از کلاس انتخاب می‌کنید،

$A$  : متولد ماه مهر باشد،

$B$  : متولد فصل تابستان باشد.

۲ سکه‌ای که سه بار برتاب می‌کنید،

$A$  : هر سه بار مشابه بیاید،

$B$  : زوج بار رو بیاید.

۳ فردا در شرآبادان

$A$  : خورشید در آسمان دیده شود،

$B$  : باران بیارد.

۴ تاسی را بی در بی برتاب می‌کنید،

$A$  : برای اولین بار در مرتبه سوم ۶ بیاید،

$B$  : تا برتاب سوم دو بار ۶ بیاید.

nasazgar ←

sazgar ←

sazgar ←

nasazgar ←



۱ احمد و عباس با هم یک مرتبه سنگ، کاغذ، فیچی بازی می‌کنند. فضای نمونه برای این بازی چیست؟ فضای نمونه چند عضو دارد؟ در چه تعداد از برآمدها احمد برنده بازی است؟

پاسخ: در نوشتن فضای نمونه نفر اول را احمد و نفر دوم را عباس در نظر می‌گیریم، بنابراین:  $S = \{(ق و ق) و (ك و ك) و (ق و ك) و (ك و س) و (ق و س) و (ك و س)\}$  فضای نمونه ای دارای ۹ عضو است.

احمد در حالات (ک و ک) و (س و ک) و (ق و س) برنده می‌شود، یعنی در ۳ حالت برنده است.

۲ یک تیم والیبال ۱۴ عضو دارد که قد هیج دو عضوی برابر نیست. فرض کنید آنها یکی پس از دیگری وارد سالن می‌شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قد آنها اهمیت داشته باشد، فضای نمونه را توصیف کنید. اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال اینکه اولین کسی که وارد می‌شود، بلند قدرترین عضو تیم باشد چقدر است؟

پاسخ: برای اولین فردی که وارد می‌شود، ۱۴ حالت داریم و برای دومین فرد، ۱۳ حالت و ... و برای آخرین فرد فقط ۱ حالت وجود دارد، بنابراین فضای نمونه دارای  $\frac{1}{14} \times 13!$  است.

۳ در یک ایستگاه هواشناسی، در هر لحظه وضعیت آب و هوا یا پنج چیز مشخص می‌شود: دمای هوا، رطوبت هوا، سرعت باد، وضعیت هوا (صف با ابری) و مقدار بارش در ۲۴ ساعت گذشته. ما برای سادگی، وضعیت آب و هوا را به این شکل خلاصه می‌کنیم: آیا از نظر دما سرد یا گرم است؟ آیا از نظر رطوبت خشک یا مرطوب است؟ آیا باد می‌وزد یا نمی‌وزد؟ آیا هوا صاف، نیمه ابری یا ابری است؟ و آیا در ۲۴ ساعت گذشته بارندگی رخ داده است یا خیر؟ برای وضعیت هوا در یک لحظه در یک ایستگاه هواشناسی فضای نمونه را به شکل حاصل ضرب دکارتی چند مجموعه بنویسید. این فضای چند عضو دارد؟

$S = \{\text{بارش باران و عدم بارش باران}\} \times \{\text{صف و نیمه ابری و ابری}\} \times \{\text{باد می وزد و باد نمی وزد}\} \times \{\text{خشک و مرطوب}\} \times \{\text{سرد و گرم}\}$

تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با:  $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 48$

۴ فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات شده، گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

(الف) اگر  $A \subseteq B$  داریم:  $P(A-B) = P(A) - P(B)$ .

(ب) اگر  $A \subseteq B$ ، آن‌گاه  $P(B) \leq P(A)$ .

$$P(A-B) \geq P(A) - P(B) \Rightarrow P(A) \geq P(B)$$

۵ عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید: (الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش‌بندیر باشد.

(ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش‌بندیر باشد، ولی به ۳ بخش‌بندیر نباشد.

پاسخ: تعریف می‌کنیم:  $\{A\text{ عدد بخش پذیر بر }2\} = A$  و  $\{B\text{ عدد بخش پذیر بر }3\} = B$  بنابراین:

اعداد بخش پذیر بر ۲ و ۳ یعنی بر ۶  $= A \cap B$  و در نتیجه:

$$n(A) = 50, n(B) = 33, n(A \cap B) = 16 \xrightarrow{n(S)=100} P(A) = .50, P(B) = .33, P(A \cap B) = .16$$

$$\text{الف } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = .50 + .33 - .16 = .67$$

$$\text{ب) } P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = .50 - .16 = .34$$

$$\text{پ) } P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - .67 = .33$$

درس اول: مبانی احتمال



## درس ۲ احتمال غیر هم‌شانس



نتایج بسیاری از آزمایش‌ها و اتفاق‌هایی که در آینده رخ می‌دهند، از قبل مشخص نیست، ولی می‌توان شанс یا احتمال وقوع آنها را از قبل تعیین کرد؛ مثلاً در پرتاب یک تاس سالم، شанс مشاهده هر کدام از اعداد با یکدیگر برابر است، ولی در مسابقه‌های گروهی، شанс قهرمانی تیم‌ها تیم‌ها، لزوماً با یکدیگر برابر نیست. قبل از برگزاری جام جهانی ۲۰۱۴ فوتبال، شанс قهرمانی تیم‌ها به صورت زیر مشخص شده بود:

تیم	برزیل	آرژانتین	آلن	اسپانیا	کلیسا	هلند	بقیه تیم‌ها
احتمال قهرمانی	۰/۷۹	۰/۴۳	۰/۰۴۳	۰/۰۴۷	۰/۰۶۶	۰/۱۲۵	۰/۱۶۶

و جالب این است که چهار تیم راه یافته به مرحله نیمه نهایی، از هشت تیم نخست جدول فوق بودند. دنیای برازیل مادر از پیشامدهای غیرهم‌شانس است. به نظر شما احتمال پارش باران و آفتابی بودن هوا در تمام روزهای سال با یکدیگر برابر است؟ خیر به طور مثال، در مرداد ماه احتمال پارش باران بسیار کمتر از احتمال آفتابی بودن هوا است.

### فعالیت



یک تاس طوری ساخته شده که روی سه وجه آن عدد ۱، روی دو وجه آن عدد ۲ و روی وجه باقی‌مانده عدد ۳ مشاهده می‌شود. اگر این تاس را پرتاب کنیم،

۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

$$S = \{1, 2, 3\}$$

۲ با توجه به اینکه عدد ۱ روی سه وجه این ناس قرار دارد، احتمال اینکه این عدد بعد از برتاب دیده شود را به دست آورید.

$$A = \{1\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

آیا می‌توانید از رابطه  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$  برای محاسبه احتمال وقوع پیشامد A استفاده کنید؟ جرا؟ خیر زیرا اعضای آن هم شناس نیستند.

هر زیرمجموعه تک عضوی از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد ساده می‌گوییم. در پیشامدهای ساده، معمولاً به جای  $P(a)$  می‌نویسیم  $P(\{a\})$ .

۳ مشابه قسمت قبل، یعنی با توجه به تعداد وجوهی از ناس که اعداد ۲ و ۳ روی آنها نوشته شده است، احتمال وقوع پیشامدهای ساده  $\{2\}$  و  $\{3\}$  را به دست آورید.

$$P(2) = \frac{1}{3}, \quad P(3) = \frac{1}{6}$$

۴ آیا احتمال وقوع پیشامدهای ساده A، B و C با یکدیگر برابرند؟ توضیح دهید. خیر زیرا پیشامد ها غیر هم شناس هستند.

۵ به کمک تابع قسمت‌های قبل، مجموع تمام پیشامدهای ساده را به دست آورید.

$$P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

۶ اگر  $D = \{1, 2\}$  پیشامد مشاهده اعداد ۱ یا ۲ در برتاب ناس باشد،  $P(D)$  را به دست آورید. این مقدار را با  $P(1) + P(2)$  مقایسه کنید.

$$P(1) + P(2) = P(D) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

همان‌طور که در فعالیت بالا مشاهده می‌کنید، در فضای نمونه‌ای S، احتمال وقوع پیشامدهای ساده با یکدیگر برابر نیستند.

هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  احتمال نایاب‌تر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیر هم شناس می‌گوییم.

در احتمال غیر هم شناس نیز مانند احتمال هم شناس که در سال‌های گذشته خوانده‌ایم، خواص زیر برقرارند:

در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیر هم شناس، اگر  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  فضای نمونه‌ای و  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  عضوی S باشد، همواره داریم:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(S) = 1$$

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k)$$

با استفاده از خاصیت (۲) و (۳) می‌توانیم نتیجه زیر را بگیریم:

$$P(S) = P(s_1) + P(s_2) + \dots + P(s_n) = 1$$

مثال: در یک مسابقه چهارجانبه فوتبال، تیم‌های a, b, c و d حضور دارند. اگر احتمال قهرمانی تیم‌های a, b و c با

بکدیگر برابر باشند، ولی احتمال فهرمانی تیم  $d$ ، دو برابر هر یک از تیم‌های دیگر باشد، احتمال فهرمانی هر یک از تیم‌ها را به دست می‌آوریم.

فرض کنید احتمال فهرمانی تیم  $a, b, c$  باشد، یعنی  $x = P(a)$ . از آنجایی که شانس فهرمانی تیم‌های  $a, b, c$  برابرند، پس  $P(b) = P(c) = x$  از سوی دیگر احتمال فهرمانی تیم  $d$ ، دو برابر تیم‌های دیگر است، پس  $P(d) = 2P(a) = 2x$ . با توجه به اینکه فضای نمونه‌ای در این مسئله  $S = \{a, b, c, d\}$  است. بنابراین

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1$$

با جای‌گذاری احتمال‌های بالا بر حسب  $x$ ، به تساوی  $1 = x + x + x + 2x = 5x$  می‌رسیم. پس  $x = \frac{1}{5}$  در نتیجه  $P(d) = \frac{2}{5}$ . بنابراین، احتمال فهرمانی هر یک از تیم‌ها عبارت است از  $P(a) = P(b) = P(c) = \frac{1}{5}$  و  $P(d) = \frac{2}{5}$ .

@sinxcosx  
ملاسعیدی  
09168324500

### کار در کلاس

**۱** در یک آزمایش تصادفی،  $S = \{x, y, z\}$  فضای نمونه‌ای است. اگر  $P(\{x, y\}) = \frac{1}{3}$  و  $P(\{x, z\}) = \frac{2}{3}$ ، احتمال وقوع هر یک از پیشامدهای ساده را به دست آورید.

حل :

با توجه به اینکه  $x, y, z$  همه اعضای فضای نمونه‌ای هستند. بنابراین  $P(x) + P(y) + P(z) = 1$ . همچنان با توجه به فرض  $P(\{x, y\}) = \frac{1}{3}$  و  $P(x) + P(y) = \frac{2}{3}$ ، پس  $P(x) = P(y) = \frac{1}{3}$ . بنابراین با توجه به تساوی بالا، از سوی دیگر،  $P(\{x, z\}) = \frac{1}{3}$  و  $P(x) + P(z) = \frac{1}{3}$ . از قراردادن  $P(x) = \frac{1}{3}$  در این تساوی  $P(x) = \frac{1}{3}$  بدست می‌آید. اکنون این مقدار را در تساوی  $P(x) + P(y) = \frac{2}{3}$  قرار دهید و مقدار  $P(y)$  را به دست آورید :

**۲** یک تاس به گونه‌ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد زوج، سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در پرتاب این تاس، احتمال مشاهده اعداد ۲ یا ۴ را به دست آورید.

در این سؤال،  $P(a) = 2P(b)$  که در آن  $a$  یک عدد زوج و  $b$  یک عدد فرد از ۱ تا ۶ هستند. بنابراین  $P(1) = P(3) = P(5)$  و  $P(2) = P(4) = P(6)$ . طبق فرض احتمال وقوع هر عدد زوج، سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است، لذا زوج‌ها احتمال یکسان و فرد‌ها نیز احتمال برابر دارند.

حال اگر  $x = P(1) = P(2) = 3x$  باشد. از رابطه زیر استفاده کرده و با جای‌گذاری احتمال پیشامدهای ساده بر حسب  $x$ ، مقدار  $x$  را به دست آورید.

$$P(S) = 1 \Rightarrow P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$\Rightarrow x + 3x + x + 3x + x + 3x = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{12}$$

اکنون با محاسبه  $P(2)$  و  $P(3)$  می‌توانید  $P(\{2, 3\})$  را تعیین کنید.

$$P(\{2, 3\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \quad \text{درنتیجه: } P(2) = x = \frac{1}{12} \quad \text{و} \quad P(3) = 3x = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

۱ در پرتاب یک سکه ناسالم، احتمال آمدن «رو» نصف احتمال آمدن «پشت» است. در پرتاب این سکه، احتمال ظاهر شدن «رو» و احتمال ظاهر شدن «پشت» را به دست آورید.

$$P(\text{رو}) = x \Rightarrow P(\text{پشت}) = 2x$$

$$P(\text{رو}) + P(\text{پشت}) = 1 \Rightarrow x + 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow P(\text{رو}) = \frac{1}{3}, P(\text{پشت}) = \frac{2}{3}$$

۲ در پرتاب یک تاس، احتمال متسابده هر عدد، متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال اینکه عدد مشاهده شده، کمتر از ۴ باشد را تعیین کنید.

$$P(1) = x, P(2) = 2x, P(3) = 3x, P(4) = 4x, P(5) = 5x, P(6) = 6x$$

$$\Rightarrow x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{21}$$

$$\Rightarrow P(\{1, 2, 3\}) = P(1) + P(2) + P(3) = x + 2x + 3x = 6x = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

۳ اگر  $S = \{a, b, c, d, e\}$  و  $B = \{a, b, c, d\}$ ،  $A = \{a, b\}$  فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و

$$\text{سه پیشامد باشند به طوری که } P(A) = \frac{2}{5} \text{ و } P(B) = \frac{3}{5}, \text{ مقدار } P(C') \text{ را به دست آورید.}$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \Rightarrow P(\{c, d\}) = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$P(C') = P(\{c, d\}) = \frac{1}{5}$$

۴ در یک تجربه تصادفی،  $S = \{x, y, z\}$  فضای نمونه‌ای است. اگر  $P(x), P(y)$  و  $P(z)$  یک دنباله حسابی با قدر نسبت  $\frac{1}{4}$  تشکیل دهند، احتمال وقوع هر کدام از این پیشامدها را به دست آورید.

$$\text{پاسخ: دنباله‌ی حسابی را به صورت رو به رو در نظر می‌گیریم: } P(x), P(y), P(z)$$

$$\Rightarrow P(y) = P(x) + \frac{1}{4}, \quad P(z) = P(y) + \frac{1}{4} = P(x) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{P(x) + P(y) + P(z) = 1}{\Rightarrow P(x) + P(x) + \frac{1}{4} + P(x) + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow P(x) = \frac{1}{12}}$$

$$\Rightarrow P(y) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}, \quad P(z) = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

۵ در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره‌ای شکل، مطابق شکل رویه‌رو که به پنج ناحیه مجزا تقسیم شده است، فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیه اول،  $x$  باشد.

اگر احتمال اصابت به ناحیه  $k$  ام،  $(2k-1)x$  باشد: الف) احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به دست آورید.  
پاسخ: نواحی اول تا پنجم را با  $n_1, n_2, n_3, n_4$  و  $n_5$  نمایش می‌دهیم.

$$\left. \begin{array}{l} P(n_1) = x, P(n_2) = 3x, P(n_3) = 5x \\ P(n_4) = 7x, P(n_5) = 9x \end{array} \right\} \Rightarrow x + 3x + 5x + 7x + 9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow P(n_1) = \frac{1}{25}, P(n_2) = \frac{3}{25}, P(n_3) = \frac{5}{25}, P(n_4) = \frac{7}{25}, P(n_5) = \frac{9}{25}$$

ب) احتمال اصابت دارت به یکی از ناحیه‌های اول، سوم یا چهارم بیشتر است، یا اصابت به دو ناحیه دوم یا پنجم؟

$$P(\{n_1, n_3, n_4\}) = \frac{1}{25} + \frac{5}{25} + \frac{7}{25} = \frac{13}{25}$$

$$P(\{n_2, n_5\}) = \frac{3}{25} + \frac{9}{25} = \frac{12}{25}$$

۱- مرز مشترک بین دو ناحیه را جزء ناحیه کوچکتر محسوب کنید.

## درس ۳ احتمال شرطی

در مسائلی که در آنها با عدم قطعیت و احتمال سروکار داریم، گاهی با سوال‌هایی شرطی مواجه هستیم: «اگر فردا برف بیارد، چقدر احتمال دارد راه برخی روستاهای دهستان‌های شهرستان کنگاور مسدود شود؟»، «اگر راننده‌ای از کمریند اینمی استفاده نکند، چقدر احتمال دارد پس از تصادف، دچار نقص عضو شود؟»، «اگر دانش‌آموزی در سال پازدهم موفق به کسب معدل بالای ۱۸ شود، چقدر احتمال دارد که در سال گذشته معدلش زیر ۱۵ بوده باشد؟» و... در همه این موارد با دو پیشامد مختلف سروکار داریم و فرض می‌کنیم که از آنها رخداده است و می‌خواهیم بدانیم احتمال رخدادن دومی چه تغییری کرده است.

### فعالیت

- ۱ در یک قرعه‌کشی بین ۲۰ نفر قرار است از بین کارت‌هایی با شماره‌های ۱ تا ۲۰، یکی را به تصادف انتخاب کنند. شماره کارت اکبر ۱۵ و شماره کارت بهرام ۷ است.
- الف) احتمال اینکه اکبر برنده شود چقدر است؟  $\frac{۱}{۲۰}$       ب) احتمال برنده شدن بهرام چقدر است؟  $\frac{۱}{۲۰}$
- ب) وقتی مجری کارت را انتخاب می‌کند، قبل از اینکه آن را به دیگران نشان بدهد، می‌گوید: «اعداد برنده، دو رقمی است!» اکنون اکبر و بهرام احتمال برنده شدن خود را چقدر می‌دانند؟  
احتمال برنده شدن اکبر  $\frac{۱}{۱۹}$  و احتمال برنده شدن بهرام صفر است.
- ۲ در مدرسه‌ای سه کلاس پازدهم، با نام‌های ۱۱-۲، ۱۱-۳ و ۱۱-۴ وجود دارد که به ترتیب ۳۲، ۳۳ و ۳۵ دانش‌آموز دارند. در آزمونی مشترک از این سه کلاس، به ترتیب ۸، ۹ و ۶ نفر موفق به کسب نمره کامل شده‌اند. یکی از دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب می‌کنیم.
- الف) فضای نمونه که شامل همه دانش‌آموزان پایه پازدهم است، چند عضوی است؟  $۳۲+۳۳+۳۵=۱۰۰$
- ب) احتمال اینکه دانش‌آموز انتخاب شده نمره کامل گرفته باشد (پیشامد A) چقدر است؟  $\frac{۲۳}{۱۰۰}$
- ب) احتمال اینکه او، دانش‌آموز کلاس ۱۱-۱ باشد (پیشامد B) چقدر است؟  $\frac{۳۲}{۱۰۰}$
- ت) فرض کنید بعد از انتخاب، بفهمید که او دانش‌آموز کلاس ۱۱-۱ است. در این صورت، چقدر احتمال می‌دهید که او موفق به کسب نمره کامل شده باشد؟  $\frac{۱}{۳۲} = \frac{۸}{۳۲}$
- در حل قسمت (ت) می‌توان این‌طور فکر کرد که فضای نمونه، که متشکل از ۱۰۰ دانش‌آموز



بایه بازدهم است، بعد از اطلاع از اینکه او دانشآموز کلاس ۱۱-۱ است، به فضای نمونه دیگری، که متشکل از ۲۲ دانشآموز کلاس ۱۱-۱ است، کاهش یافته است. سپس باید بررسی کنیم که چند نفر از ۲۲ دانشآموز کلاس ۱۱-۱ موفق به کسب نمره کامل شده‌اند. این یعنی تعداد اعضای پیشامد  $A \cap B$  را بشماریم. نتیجه را باید به تعداد اعضای مجموعه  $B$  تقسیم کنیم.

در علم احتمال برای آنچه در قسمت (ب) فعالیت ۱ و قسمت (ت) فعالیت ۲ بررسیده شد، از اصطلاح «احتمال شرطی» استفاده می‌کنند. مثلاً در فعالیت ۲ که پیشامد  $A$  «کسب نمره کامل» و  $B$  «دانشآموز کلاس ۱۱-۱ بودن» است آنچه خواسته شد، احتمال «کسب نمره کامل به شرط دانشآموز کلاس ۱۱-۱ بودن» است که با  $P(A|B)$  نمایش داده می‌شود.



## کار در کلاس

در فعالیت «قرعه کشی» احتمال شرطی کدام پیشامد نسبت به کدام پیشامد مورد سؤال قرار گرفته است؟  
نصری کامل گرفتن به شرط آن که دانش آموز از کلاس ۱۱-۱ باشد به عبارت دیگر  $P(A|B)$

## احتمال شرطی: کاهش فضای نمونه

باز هم به دو فعالیت قبل توجه کنید. در حالتی که فضای احتمال هم‌شانس است شرطی کردن یک پیشامد نسبت به پیشامد  $B$  مثل این است که فضای نمونه، یعنی  $S$ ، را کنار گذاشته و  $B$  را فضای نمونه تلقی کنیم. احتمال روی این فضای نمونه نیز هم‌شانس است. به این رویکرد «کاهش فضای نمونه» گفته می‌شود.

## کار در کلاس

فرض کنید تاسی را دو مرتبه برتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه این آزمایش چند عضوی است؟ **۳۶** آیا این فضای احتمال هم‌شانس است؟ **بله**

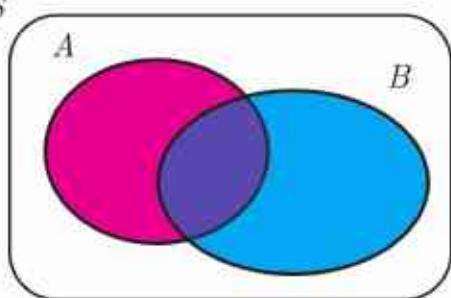
ب) می‌دانیم که مجموع عدد دو برتاب از ۹ بیشتر شده است. در این صورت، احتمال اینکه دست کم یک ۶ آمده باشد چقدر است؟

$$\left. \begin{array}{l} S = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\} \Rightarrow n(S) = 6 \\ A = \{(4,6), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\} \Rightarrow n(A) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{6}$$

## احتمال شرطی چگونه محاسبه می‌شود؟

همان طور که اشاره شد، اگر با احتمال هم‌شانس سروکار داشته باشیم محاسبه  $P(A|B)$  ساده است؛ کافی است تعداد حالات

$S$



مطلوب را به تعداد حالات ممکن تقسیم کنیم، ولی باید توجه داشته باشیم که جون می‌دانیم  $B$  رخ داده است دیگر همه اعضای پیشامد  $A$  ممکن نیستند و لذا مجموعه حالات‌های مطلوب در این وضعیت  $A \cap B$  است. پس

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

ولی در حالت کلی که احتمال می‌تواند هم‌شانس نباشد چه باید کرد؟



## فعالیت

دوباره فرض کنید موضوع گفت و گوی احتمال هم‌شانس باشد؛ آیا می‌توانید سمت راست فرمول احتمال شرطی در حالت هم‌شانس را به شکلی بازنویسی کنید که به جای تعداد اعضای پیشامدها احتمال آنها آمده باشد؟

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(A \cap B) / n(S)}{n(B) / n(S)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

اگر فعالیت قبل را بدستوری انجام داده بانسید، به تعریف کلی احتمال شرطی (برای فضاهای هم‌شانس و فضاهای غیرهم‌شانس) رسیده‌اید:

در صورتی که  $B$  پیشامدی باشد که  $P(B) > 0$ ، برای هر پیشامد  $A$ ، «احتمال  $A$  به شرط رخ دادن  $B$ » (که آن را « $P$  ای  $A$  به شرط  $B$ » نیز می‌خوانیم) به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

تذکر: در حالتی که  $P(B) = 0$ ، احتمال هیچ پیشامدی به شرط  $B$  تعریف نمی‌شود.

مثال: سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. می‌دانیم که دست کم یک بار رو آمده است. در این صورت، احتمال اینکه هر سه بار رو آمده باشد چقدر است؟

حل: سه بار رو آمدن سکه را  $A$  و دست کم یک بار رو آمدن سکه را  $B$  می‌نامیم. باید  $P(A|B)$  را حساب کنیم. پس با توجه به تعریف باید  $P(A \cap B)$  و  $P(B)$  را محاسبه کنیم. فضای نمونه  $\Lambda$  عضوی است و پیشامد  $A \cap B$ ، یعنی سکه سه بار رو آمده باشد و بعلاوه دست کم یک بار رو آمده باشد و این در واقع یعنی سکه در هر سه برتاب رو آمده باشد. پس

$$P(A \cap B) = \frac{1}{\Lambda}$$

برای محاسبه  $P(B)$  بهتر است به پیشامد متمم آن توجه کنیم؛ پیشامد  $B'$  یعنی سکه اصلاً رو نیامده باشد که فقط یک حالت است. در نتیجه:

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{1}{\Lambda} = \frac{\Lambda}{\Lambda}$$

ولذا

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{\Lambda}}{\frac{\Lambda}{\Lambda}} = \frac{1}{\Lambda}$$

مثال: دو تاس سبز و قرمز را پرتاب می‌کنیم.

الف) اگر بدانیم مجموع دو تاس «۱۰» شده است، احتمال اینکه تاس سبز ۶ آمده باشد چقدر است؟

ب) اگر بدانیم که تاس سبز ۶ آمده است، احتمال اینکه مجموع دو تاس «۱۰» شده باشد چقدر است؟

حل: الف) فرض کنید پیشامد  $A$  یعنی تاس سبز ۶ باید و پیشامد  $B$  یعنی مجموع دو تاس «۱۰» شود. پس در این مثال،  $P(A|B)$  خواسته شده است و لذا باید  $P(A \cap B)$  و  $P(B)$  را محاسبه کنیم. فضای نمونه  $\Lambda$  عضو دارد و یک فضای

همشانس است بس باید تعداد اعضای یک پیشامد را برای رسیدن به احتمال آن به دست آوریم. روشن است که

$$\text{در نتیجه: } P(B) = \frac{3}{36} \quad \{4,6\}, \{5,5\}, \{6,4\}$$

$$\text{روشن است که } \{6,4\} = A \cap B \text{ و لذا } P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$\text{در نتیجه: } P(A|B) = \frac{1}{3}$$

ب) طبق نعادگذاری قسمت قبل، باید  $P(B|A)$  را محاسبه کنیم. توجه داشته باشید که  $P(A) = \frac{1}{6}$ . پس

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$



مثال: تیم ملی والیبال ایران، ۱۴ بازیکن دارد که قد همچو  
دو نفری برابر نیست. اگر یکی از بازیکن‌ها را به تصادف  
انتخاب کنیم.

(الف) احتمال اینکه آن بازیکن، بلندقدترین بازیکن تیم  
باشد چقدر است؟

ب) بازیکن دیگری را به تصادف انتخاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که از بازیکن اول کوتاه‌تر است. در این صورت، احتمال اینکه بازیکن اول بلندقدترین بازیکن تیم باشد چقدر است؟

حل: پاسخ قسمت (الف) ساده است: با توجه به اینکه بکی از ۱۴ بازیکن، بلندقدترین بازیکن تیم است، احتمال اینکه آن فرد همان باشد که ما تصادفاً انتخاب کردہ‌ایم  $\frac{1}{14}$  است.

برای به دست آوردن پاسخ قسمت (ب) دو پیشامد  $A$  و  $B$  را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$A$ : بازیکن اول بلندقدترین بازیکن تیم است.

$$\cancel{P(B|A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{14}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{7}$$

$B$ : بازیکن اول بلندقدتر از بازیکن دوم است.

$$P(A|B) \quad P(B)$$

دلیل اینکه  $P(B) = \frac{1}{2}$ ، این است احتمال اینکه بین دو بازیکن اولی یا دومی بلندقدتر باشد، برابر است.

### کار در کلاس

در فعالیت مربوط به دانشآموزان پایه یازدهم آمده بود که سه کلاس ۱۱-۱، ۱۱-۲ و ۱۱-۳ به ترتیب ۳۲، ۲۳ و ۲۵ دانشآموز دارند و در آزمون مشترک در این سه کلاس به ترتیب ۸، ۹ و ۶ نفر موفق به کسب نمره کامل شده‌اند. دانشآموزی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. پیشامد «دانشآموز کلاس ۱۱-۱ بودن» را  $P_1$  نامیم و  $P_2$  و  $P_3$  را به طور مشابه تعریف می‌کنیم. پیشامد «نمره کامل شدن» را نیز با  $A$  نمایش می‌دهیم.

الف) مقدار  $P(A|B)$  را برای  $i=1,2,3$  محاسبه کنید.

$$P(A|B_1) = \frac{n(A \cap B_1)}{n(B_1)} = \frac{8}{34} \text{ و } P(A|B_2) = \frac{n(A \cap B_2)}{n(B_2)} = \frac{9}{33} \text{ و } P(A|B_3) = \frac{n(A \cap B_3)}{n(B_3)} = \frac{6}{35}$$

ب) مقدار  $P(B_i|A)$  را برای  $i=1,2,3$  محاسبه کنید. معنای آنچه حساب کرده‌اید چیست؟

$$P(B_1|A) = \frac{n(B_1 \cap A)}{n(A)} = \frac{8}{23}, P(B_2|A) = \frac{n(B_2 \cap A)}{n(A)} = \frac{9}{22} \text{ و } P(B_3|A) = \frac{n(B_3 \cap A)}{n(A)} = \frac{6}{22}$$

احتمال اینکه فردی با نمره‌ی کامل از کلاس  $B_i$  باشد را مشخص می‌کنند که همان میزان موفقیت هر کلاس در آزمون است.

ب) با اطلاعات موجود در مورد سه کلاس، داشن‌آموزان کدام کلاس را در آزمون مشترک موفق‌تر می‌دانند؟ کلاس ۱۱-۱

برای پاسخ دادن به این سوال، پاسخ قسمت (الف) مهم است یا پاسخ قسمت (ب)؟ پاسخ الف

### کار در کلاس

ایمیات در صفحه‌ی بعد می‌باشد.

فرض کنید  $B$  پیشامدی با احتمال ثابت باشد. نشان دهید:

الف) اگر  $A_1$  و  $A_2$  دو پیشامد ناسازگار باشند:

$$P((A_1 \cup A_2)|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$$

$$\text{ب) برای هر پیشامد } A \text{ داریم: } P(A'|B) = 1 - P(A|B)$$

دانستن تعریف احتمال شرطی و درک درستی از مفهوم آن برای حل مسائل، احتمال لازم است، ولی کافی نیست. در ادامه، با سه ابزار آشنا می‌شویم که در حل مسائل احتمال بسیار مفیدند. این سه ابزار «قانون ضرب احتمال»، «قانون احتمال کل» و «قانون بیز» هستند. هر سه مورد را، در برخی کتاب‌ها با عنوان «قضیه» و «فرمول» نیز می‌شناسند. توجه داشته باشید که شما علاوه بر اینکه باید با این سه قانون آشنا شوید، این را هم باید بیاموزید که هر کدام در چه مواردی به کار می‌آیند.

برای یادگیری بهتر هر قانون، مثال‌های مطرح خواهد شد که برخی بقدری ساده‌اند که با روش‌های قبلی نیز قابل حل کردن هستند. انتخاب چنین مثال‌هایی به این دلیل است که مطلب در ابتدا در ذهن شما بدرستی جای گرفتند. در ادامه برخی مثال‌های بیچیده‌تر هم آمده است، تا در استفاده از این ابزارها متعجرter شوید.

در برخی مثال‌ها، سعی شده است که صورت مسئله تا حدی شبیه یک مسئله واقعی باشد. در چنین مثال‌هایی فهم درست صورت مسئله و تبدیل درست آن به یک مسئله احتمال و تشخیص پیشامدهای مورد بحث و نام‌گذاری مناسب، پخشی از حل مسئله است و شما باید این کار را هم بهخوبی فرا بگیرید.

### قانون ضرب احتمال

تعریف احتمال شرطی، با یک محاسبه ساده به عبارتی تبدیل می‌شود که به آن «قانون ضرب احتمال» گفته می‌شود:

$$\text{اگر } A \text{ و } B \text{ دو پیشامد باشند که: } P(A \cap B) = P(A)P(B|A), \text{ آن‌گاه}$$

از این قانون، معمولاً وقتی استفاده می‌شود که بخواهیم عبارت سمت چپ تساوی را حساب کنیم.

مثال: در کیسه‌ای ۱ گوی سبز، ۲ گوی سفید و ۲ گوی قرمز است. از کیسه دو گوی به ترتیب و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. احتمال اینکه گوی اول سبز و گوی دوم سفید باشد، چقدر است؟

حل: پیشامد سبز بودن گوی اول را  $A$  و پیشامد سفید بودن گوی دوم را  $B$  می‌نامیم. در این صورت، آنچه خواسته شده  $P(A \cap B)$  است. با توجه به قانون ضرب احتمال باید  $P(A|B)$  و  $P(B|A)$  را به دست آوریم. در ابتدا ۶ گوی در کیسه است که

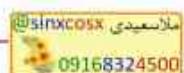
$$\text{یکی از آنها سبز است. پس } P(A) = \frac{1}{6}$$

الف) دو پیشامد  $A_1$  و  $A_2$  طبق فرض ناسازگار هستند در نتیجه دو پیشامد  $A_1 \cap B$  و  $A_2 \cap B$  نیز ناسازگار هستند . زیرا :  
 $(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = (A_1 \cap A_2) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$   
در نتیجه  $P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)$  خواهد بود .

بنابراین به اثبات حکم می پردازیم :

$$P((A_1 \cup A_2) | B) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$$



$$P(A \cup A' | B) = P(S | B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} \xrightarrow{B \subseteq S} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

بنابراین با توجه به قسمت الف ، به اثبات حکم می پردازیم :

$$P((A \cup A') | B) = P(A | B) + P(A' | B) \Rightarrow 1 = P(A | B) + P(A' | B) \Rightarrow P(A' | B) = 1 - P(A | B)$$

برای محاسبه  $P(B|A)$  نوجه کنید که بعد از خارج کردن گوی اقل، با این شرط که آن گوی سبز باشد، ۵ گوی در کیسه مانده که ۳ تا از آنها سفید است، درنتیجه:

$$P(B|A) = \frac{3}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$$

قانون ضرب احتمال را می‌توان به راحتی برای سه پیشامد نیز نوشت:

اگر  $A_1, A_2, A_3$  و  $A_4$  پیشامدهایی با احتمال ناصف باشند، آن‌گاه

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

در یکی از تمرین‌های پایانی درس از شما خواسته شده تا این قانون را ثابت کنید.

### کار در کلاس

با داده‌های مثال قبل، اگر سه گوی را به ترتیب و بدون جای‌گذاری خارج کنیم، احتمال اینکه اولی سبز، دومی سفید و سومی قرمز باشد چقدر است؟

قسمتی از راه حل، مشابه مثال قبلی است. کافی است  $C$  را پیشامد قرمز بودن گوی سوم بگیریم. در این صورت، باید  $P(A \cap B \cap C)$  را بدست آوریم. با استفاده از قانون ضرب برای سه پیشامد، راه حل را ادامه دهید.

پیشامد سیز بودن گوی اول  $A$ ، پیشامد سفید بودن گوی دوم  $B$  و پیشامد قرمز بودن گوی سوم را  $C$  در نظر می‌گیریم درنتیجه:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{20}$$

ملاسعیدی  
09168324500

### کار در کلاس

بسکتبالیستی هر بار که اقدام به پرتاب می‌کند، اگر روحیه خوبی داشته باشد، پرتابش به احتمال ۹۰٪ درصد گل می‌شود و اگر روحیه‌اش ضعیف باشد، احتمال گل شدن پرتابش ۶۰٪ درصد است. به علاوه می‌دانیم او اگر پرتابی را گل کند، در پرتاب بعدی روحیه خوبی دارد و در غیر این صورت، روحیه‌اش ضعیف خواهد شد. فرض کنید بسکتبالیست، پیش از اولین پرتاب، روحیه خوبی داشته باشد. احتمال اینکه از سه پرتاب متوالی، دقیقاً دو پرتاب آخر گل شود چقدر است؟

برای حل این مسئله، پیشامد گل شدن پرتاب  $A$  را  $A_1 \cap A_2 \cap A_3$  بنامید. آنچه باید محاسبه کنید  $P(A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3)$  است.

با استفاده از فرضیات مسئله و قانون ضرب احتمال داریم:



تصویر مربوط به تیم ملی بسکتبال باویلجر کشورمان در بازی‌های بار المپیک ۲۰۱۶ ریو است که در اولین دیدار خود ۶۹ بر ۶۳ تیم آلمان را شکست داد.

$$P(A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3) = P(A'_1)P(A'_2|A'_1)P(A'_3|A'_1 \cap A'_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

چرا  $P(A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3) = \frac{2}{27}$  است؟ زیرا در پرتاب قبل از  $A$  برنده شده و روحیه‌ی خوبی برای این پرتاب پیدا کرده است.

مثال: فرض کنید سه کارت داریم. دو روی کارت اول سبز و دو روی کارت دوم قرمز است و یک روی کارت سوم سبز و روی دیگر سه قرمز است. کارتی را به تصادف بر می‌داریم و مشاهده می‌کنیم که یک روی آن سبز است. احتمال اینکه هر دو روی آن سبز باشد چقدر است؟

حل: فرض کنید:

$A$ : کارت دو روی سبز است.

$B$ : روی مشاهده شده کارت انتخابی سبز است.

باید  $P(A \cap B)$  و  $P(B)$  را محاسبه کنیم. واضح است که بعد از انتخاب یک کارت و نگاه کردن به یک روی آن، یکی از شش روی سه کارت را با احتمال‌های برابر، خواهیم دید و چون در مجموع سه روی سبز و سه روی قرمز داریم، پس

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

احتمال پیشامد  $A \cap B$  را به راحتی می‌توان با استفاده از قانون ضرب به دست آورد:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

دلیل اینکه  $P(A)$  برابر  $\frac{1}{3}$  است، این است که از سه کارت، یکی دو روی سبز است و  $P(A|B) = 1$  چون اگر کارت انتخابی

$$P(B|A) = 1 \quad P(A|B) = \frac{2}{3}$$

## قانون احتمال کل

رسیدن از داده‌های جزئی به نتایج کلی بسیار معمول است؛ مثلاً اطلاعاتی آماری که در استان‌های کشور تهیه شده، می‌تواند بعد از انجام برخی محاسبات منجر به آمارهای درباره کل کشور شود. یا اطلاعاتی در مورد رفتار ترافیکی گروه‌های مختلف سنی و جنسی را می‌توان جمع‌بندی کرد و به آماری درباره همه رانندگان رسید. موضوع قانون احتمال کل چنین چزهایی است.

### فالیت

دو کیسه داریم که اولی شامل ۲ گوی سفید و ۳ گوی سبز و دومی شامل ۱ گوی سفید و ۹ گوی قرمز است. یکی از دو کیسه را به تصادف انتخاب می‌کنیم و از آن گویی را بر می‌داریم. می‌خواهیم احتمال سفید بودن این گوی را محاسبه کنیم. سه پیشامد  $A$ ،  $B_1$  و  $B_2$  را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$A$ : گوی برداشته شده سفید است.

$B_1$ : کیسه اول انتخاب شده است.

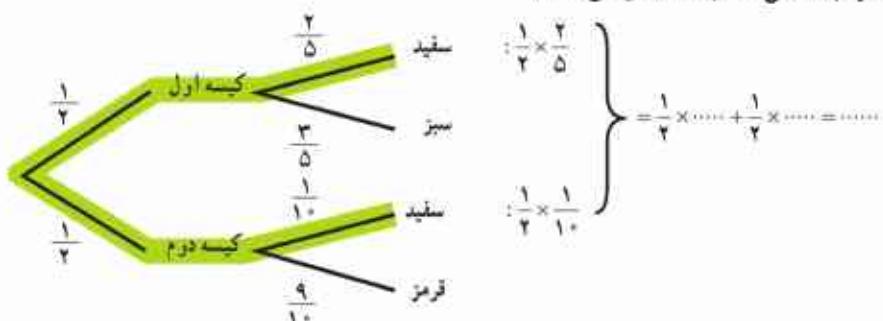
$B_2$ : کیسه دوم انتخاب شده است.

بس هدف محاسبه  $P(A)$  است. طبق اطلاعات داده شده  $P(A|B_1) = P(A|B_2)$ ، به ترتیب، برابر  $\frac{2}{5}$  و  $\frac{1}{10}$  هستند. به علاوه واضح است که  $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$ . چون کیسه انتخابی یا کیسه اول است یا کیسه دوم. پس  $B_1$  و  $B_2$  فضای نمونه را افزایش می‌کنند. این نتیجه می‌دهد که  $A \cap B_1$  و  $A \cap B_2$  نیز  $A$  را افزایش می‌کنند. پس

$$P(A) = P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)$$

$$= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{4}$$

در محاسبات صفحه قبل دو بار از قانون ضرب احتمال استفاده کردیم. «کجا؟» در محاسبه‌ی  $P(A \cap B_1)$  و  $P(A \cap B_2)$  از قانون ضرب احتمال استفاده شده است. نمودار درختی زیر، محاسبات را به شکل دیگری نمایش می‌دهد:



«قانون احتمال کل»، که شما در فعالیت قبل تلویحاً از آن استفاده کردید، به این شکل است:

فرض کنید  $B_1, B_2, \dots, B_n$  پیشامدهای با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افزایی می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه  $A$ ، داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n) = \sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)$$

در فعالیت قبل، فضای نمونه به دو پیشامد  $B_1$  و  $B_2$  افزایش شده بود؛ کيسه انتخابی، یا کيسه اول است، یا کيسه دوم است.

@sinxcosx  
09168324500

### کار در کلاس

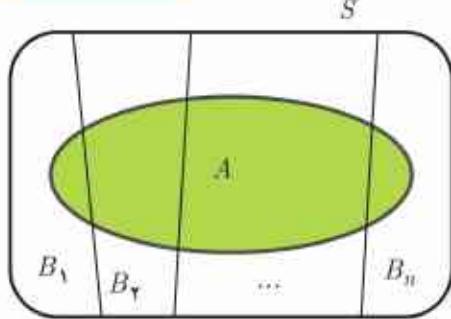
با انجام مراحل زیر قانون احتمال کل را ثابت کنید:

۱ این فرض که  $B_1, B_2, \dots, B_n$  فضای نمونه را افزایی می‌کنند؛ یعنی دو به دو **جزا از هم** هستند و  $B_k = \bigcap_{i=1}^n B_i$ .

۲ در این صورت  $A \cap B_1, A \cap B_2, \dots, A \cap B_n$  دو به دو **جزا از هم** هستند و اجتماع آنها برابر  $A$  می‌شود. در نتیجه داریم

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A \cap B_k)$$

۳ اگر جملات داخل سیگما را به کمک قانون ضرب احتمال بازنویسی کنید، به قانون احتمال کل می‌رسید.

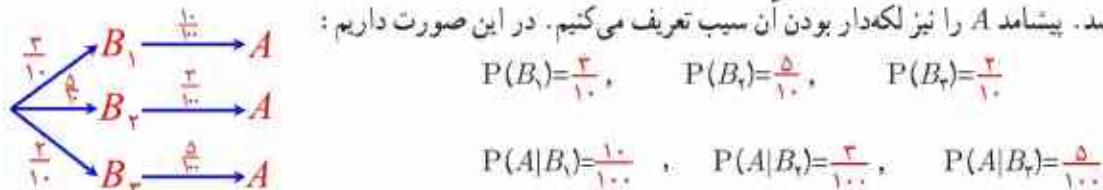


### کار در کلاس



میوه‌فروشی ده صندوق سیب از سه باغ مختلف خریده است. ۳ صندوق از باغ شمالی، ۵ صندوق از باغ مرکزی و ۲ صندوق از باغ جنوبی. در این سه باغ احتمال اینکه یک سیب لکدار باشد، به ترتیب، ۰.۱ درصد، ۰.۳ درصد و ۰.۵ درصد است. با فرض اینکه تعداد سیب در صندوق‌های مختلف برابر است، احتمال اینکه سیبی که از یکی از صندوق‌ها برآمی داریم لکدار باشد چقدر است؟

برای حل این مسئله گیریم،  $B_1$ ،  $B_2$  و  $B_3$  به ترتیب، این پیشامدها باشند که سبب انتخابی از باغ شمالی، باغ مرکزی و باغ جنوبی باشد. پیشامد  $A$  را نیز لکه‌دار بودن آن سبب تعریف می‌کنیم. در این صورت داریم:



آنچه در مسئله از ما خواسته شده است  $P(A)$  است که با استفاده از قانون احتمال کل به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{5}{10} = \frac{28}{100}$$

با تکمیل محاسبات جواب به دست می‌آید.

می‌دانیم که  $B$  و  $B'$  فضای  $S$  را افزای می‌کنند؛ لذا ساده‌ترین شکل قانون احتمال کل در حالت  $n=2$  به شکل زیر بیان می‌شود:

فرض کنید  $B$  پیشامدی باشد که  $P(B) < 1$ . در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه  $A$ ، داریم:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

مثال: دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کارتی را به تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و بک روی آن را می‌بینیم. احتمال اینکه آن رو قرمز باشد چقدر است؟

حل: این پیشامد را که رنگ قرمز دیده شود  $A$  و این پیشامد را که دو روی کارت انتخابی قرمز باشد  $B$  می‌نامیم. باید  $(A)$  را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل داریم:

$$\text{واضح است که } P(A|B) = \frac{1}{5} \text{ و } P(A|B') = \frac{1}{8} \text{ و با توجه به تعداد، دو نوع کارت داریم}$$

$$P(B) = \frac{2}{2+8} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}, \quad P(B') = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$



وقتی شما برای اولین بار با فردی آشنا می‌شوید، پیش‌فرض‌هایی از میزان صداقت او دارید. در طول زمان که اعمال و رفتار او را می‌بینید این پیش‌فرض‌ها به شکل مثبت یا منفی تغییر می‌کند. اگر مربی ورزش دانش‌آموزی را تحت نظر بگیرد، در ابتدا نسبت به توانایی او در ضربه زدن به توب پیش‌فرض‌هایی دارد و هر جهه بازی او را مشاهده کند، این پیش‌فرض‌ها تغییر می‌کند. قانون بیز که از مهم‌ترین قوانین در علم احتمال است، این موضوع را به زبان ریاضی فرمول بندی می‌کند.



توماس بیز<sup>۱</sup> آماردان، فیلسوف و کتبیش انگلیسی است که به دلیل فرمول بندهی حالت خاصی از قانون بیز، معروف شده است. او البته هیچ گاه کارهایی که در نهایت منجر به قانون بیز شد را منتشر نکرد؛ بلکه بعد از مرگش ریچارد برایس<sup>۲</sup>، فیلسوف و ریاضی‌دان اهل ولز سی از ویرایش پادداشت‌های بیز آنها را منتشر کرد.

@sinxcosx  
09168324500

### فعالیت

- فرض کنید سه صندوق، با تعداد زیاد سبب، از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم. در این باغ‌ها، به ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد سبب‌ها لکه دارند. یکی از صندوق‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم.
- (الف) احتمال اینکه این صندوق مربوط به باغ شمالی باشد چقدر است؟  $\frac{1}{3}$  در مورد دو باغ دیگر این احتمال چقدر است؟ **هر کدام  $\frac{1}{3}$  است.**
- (ب) اکنون سببی را به تصادف از داخل صندوق انتخابی خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که لکدار است. آیا بعد از این مشاهده، نظر شما در مورد احتمال اینکه صندوق انتخابی مربوط به باغ شمالی باشد، تغییر کرده است؟
- (پ) به طور شهودی، فکر می‌کنید آیا این احتمال نسبت به قبل از مشاهده سبب لکدار افزایش یافدا کرده است، یا کاهش؟ **افزایش**

در علم احتمال گاهی با مسائلی مانند فعالیت قبل مواجه هستیم که در آنها وقوع یک پیشامد، موجب تغییر نگرش ما به احتمال وقوع پیشامدهای دیگر می‌شود. شما در زندگی با این نوع مسائل، البته با نگاهی کفی و نادقيق، مواجه بوده‌اید. قانون بیز مشخص می‌کند که «احتمال‌های پیش از مشاهده» چگونه به «احتمال‌های پس از مشاهده» تبدیل می‌شوند. فرضیات قانون بیز کاملاً مشابه فرضیات قانون احتمال کل است:

فرض کنید  $B_1, B_2, \dots, B_n$  پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افزایش می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه  $A$  و هر  $n \leq i$  داریم:

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{P(A)}$$

این قانون توضیح می‌دهد که چگونه  $P(B)$ ‌ها بعد از مشاهده رخدادن پیشامد  $A$ ، به  $P(B_i | A)$ ‌ها تبدیل می‌شوند. گاهی قانون بیز را به شکل زیر می‌نویسند:

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k)P(A | B_k)}$$

هدف از این نوع نوشتن قانون بیز این است که تصریح شود در یک مسئله مربوط به قانون بیز معمولاً آددهای موجود  $P(B_i | A)$  و  $P(A | B_i)$  هاستند. توجه کنید که آنچه در مخرج عبارت سمت راست آمده است، طبق قانون احتمال کل، همان  $P(A)$  است.

<sup>۱</sup>— Thomas Bayes (۱۷۰۲ – ۱۷۶۱)

<sup>۲</sup>— Richard Price (۱۷۲۳ – ۱۷۹۱)

ساده‌ترین حالت قانون بیز وقتی است که  $n$  برابر ۲ باشد. در این صورت،  $B$  و  $B'$  دو پیشامد متمم‌اند.

فرض کنید  $B$  پیشامدی باشد که احتمال آن مخالف صفر و یک است. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه  $A$  :

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')}$$

اگر احتمال  $B$  صفر، یا یک باشد چه مشکلی در فرمول بالا پیش می‌آید؟

اگر  $P(B)$  صفر شود ( $P(B) = 0$ ) آنگاه  $P(A|B) = 1$  تعریف نشده است و در صورتی که  $P(B') = 1$  تعریف نشده است.

مثال : دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کارتی را به تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و فقط یک روی آن را مشاهده می‌کنیم و می‌بینیم که قرمز است. احتمال اینکه روی دیگر کارت نیز قرمز باشد چقدر است؟

حل : این پیشامد که رنگ قرمز دیده شود را  $A$  و این پیشامد که دو روی کارت انتخابی قرمز باشد را  $B$  می‌نامیم. باید  $P(A)$  را حساب کنیم. با توجه به اینکه  $B$  و  $B'$  فضای نمونه را افزایی می‌کنند داریم :

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B') = \frac{1}{10} \times 1 + \frac{9}{10} \times 0 = \frac{1}{10}$$

توجه کنید که پیشامد  $B'$  یعنی کارت انتخابی دو رو قرمز نباشد و به همین دلیل احتمال آن  $\frac{9}{10}$  است. طبق قانون بیز داریم :

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10} \times 1}{\frac{1}{10}} = 1$$

مثال : سه صندوق سبب، هر کدام شامل ۱۰ سبب داریم. سبب‌های صندوق اول سبز؛ سبب‌های صندوق دوم، قرمز است. صندوق سوم شامل ۲ سبب سبز و ۸ سبب قرمز است. صندوقی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. فرض کنید دست در صندوق کنیم و سبب را تصادفاً در آوریم و بینیم که سبز است. احتمال اینکه همه سبب‌های صندوق سبز باشد چقدر است؟

حل : فرض کنید پیشامد  $A$ ، یعنی سبب مشاهده شده سبز باشد و پیشامدهای  $B_1$ ،  $B_2$  و  $B_3$  به ترتیب به معنای انتخاب صندوق‌های اول، دوم و سوم باشند. لذا

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$$

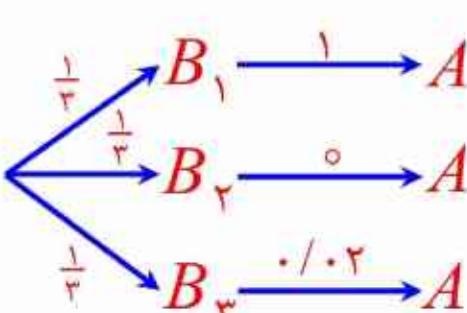
$$P(A|B_1) = 1 \quad \text{و} \quad P(A|B_2) = 0 \quad \text{و} \quad P(A|B_3) = \frac{2}{10} = 0.2$$

برای محاسبه  $P(A)$  ابتدا  $P(B_i|A)$  را محاسبه می‌کنیم. طبق قانون احتمال کل

$$P(A) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0.2 = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{1} = 1$$

در نتیجه :



فرض کنید سه صندوق سبب، از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم. در این باغ‌ها، به ترتیب، ۱ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد سبب‌ها لکه‌دارند. یکی از صندوق‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و نمی‌دانیم که صندوق انتخابی مربوط به کدام باغ است. سببی را از آن صندوق خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که لکه‌دار است. در این صورت، احتمال اینکه صندوق انتخابی مربوط به باغ شمالی باشد، چقدر است؟

برای حل این مسئله، این پیشامد را که سبب انتخابی لکه‌دار باشد با  $A$  و اینکه صندوق انتخابی مربوط به سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی باشد را به ترتیب با  $B_1, B_2$  و  $B_3$  نمایش دهید.

در صورت مسئله جه احتمال‌های مشخص شده است؟ آنها را مشخص می‌کنیم:

$$P(B_1) = \frac{1}{3}, \quad P(B_2) = \frac{1}{3}, \quad P(B_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(A|B_1) = \frac{1}{100}, \quad P(A|B_2) = \frac{3}{100}, \quad P(A|B_3) = \frac{5}{100}$$

آنچه در مسئله از ما خواسته شده است  $P(B_i|A)$  است. ابتدا  $P(A)$  را محاسبه می‌کنیم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) = \frac{1}{3} + \frac{3}{3} + \frac{5}{3} = 0.6$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{100}}{0.6} = \frac{5}{9}$$



مثال: در یک کارخانه شیر پاستوریزه، وقتی خط تولید سالم است، تنها ۲ درصد از پاکت‌ها کمتر از ۲۹۷ سی سی شیر دارند، ولی وقتی یکی از قطعات اصلی خط تولید دچار عیب می‌شود، این مقدار به ۱۰ درصد افزایش پیدا می‌کند. تجربه نشان داده است که احتمال خراب شدن خط تولید که تقریباً همیشه ناشی از معیوب شدن آن قطعه است، پس از یک ماه، ۵ درصد است. ماه گذشته آخرین باری بوده است که مسئول فنی، خط تولید را به طور کامل سرویس کرده است.

مسئول کنترل کیفیت کارخانه، به تصادف یک پاکت شیر را مورد بررسی قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که حاوی کمتر از ۲۹۷ سی سی شیر است. در این صورت احتمال خراب بودن خط تولید چقدر است؟

حل:

دو پیشامد  $A$  و  $B$  را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$A$ : حجم شیر پاکت انتخاب شده کمتر از ۲۹۷ سی سی است.

$B$ : خط تولید خراب شده است.

در این صورت باید  $P(B|A)$  را محاسبه کنیم. اطلاعات مسئله به این صورت خلاصه می‌شود:

$$P(B) = 0.5$$

$$P(A|B) = 0.1$$

$$P(A|B') = 0.2$$

زیرا  $P(B)$  یعنی احتمال خراب بودن خط تولید،  $P(A|B)$  یعنی احتمال اینکه یک پاکت کمتر از ۲۹۷ میلی‌شیر داشته باشد، به شرط آنکه خط تولید خراب شده باشد و  $P(A|B')$  یعنی احتمال اینکه یک پاکت کمتر از ۲۹۷ میلی‌شیر داشته باشد، به شرط آنکه خط تولید سالم باشد.

طبق قانون بیز داریم:

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')} = \frac{0.5 \times 0.1}{0.5 \times 0.1 + 0.5 \times 0.2} \\ &= \frac{0.5}{2.5} = 0.2 \end{aligned}$$

یعنی مسئول کنترل کیفیت که ابتدا فقط ۵ درصد احتمال می‌داد که خط تولید خراب شده باشد، بعد از مشاهده یک پاکت با محتویات کمتر از ۲۹۷ میلی‌شیر، ۰.۲ درصد احتمال می‌دهد که خط تولید خراب شده باشد.

### تمرین

۱ در باره خانواده‌ای چهار فرزندی، می‌دانیم که دست کم یکی از فرزندان آنها پسر است. احتمال اینکه دقیقاً ۲ پسر داشته باشند چقدر است؟



۲ ستاد مرکزی معاشرة فنی خودروهای تهران در اواخر سال ۱۳۹۵ اعلام کرد: «امسال بر کار نزین سال در عرصه معاشرة فنی خودروهای کشور از ابتدای تأسیس تاکنون بوده و ۸۷ هزار خودرو در تهران معاشرة فنی شده‌اند. امسال یکی از سخت‌ترین سال‌های مبارزه با آلودگی هوا بود...»

در این طرح، سیزده مرکز مستولیت معاشرة فنی خودروهای سبک را به عنده داشتند. فرض کنید جدول زیر آمار خودروهای مراجعته کرده و خودروهای مردودی در معاشرة فنی باشد: (تعداد به هزار دستگاه است).

شماره مرکز	تعداد مراجعته	تعداد مردودی
۱۲	۱۲	۱۱
۸۵	۵۱	۵۵
۱۸	۲۲	۲۲
۱۰	۵۰	۴۸
۶	۴۸	۵۹
۸	۵۹	۵۶
۷	۷۹	۷۹
۶	۷۹	۷۹
۵	۸۵	۸۵
۴	۸۶	۸۶
۳	۷۷	۷۷
۲	۶۰	۶۰
۱	۲۸	۲۸

خودروی را از بین خودروهای مراجعت کرده انتخاب می‌کنیم.

الف) خودروی انتخابی به چه احتمالی مردود شده است؟

ب) اگر بدانیم آن خودرو به مرکز شماره ۵ مراجعت کرده، جواب سوال قبل چند است؟

ب) اگر بدانیم آن خودرو مردود شده است، احتمال اینکه به مرکز شماره ۵ مراجعت کرده باشد چقدر است؟



۳ بررسی‌های آماری نشان داده است که اگر یک روز ساحل جزیره هرمز آرام باشد، فردای آن روز به احتمال  $0.9$  درصد آرام و به احتمال  $0.1$  درصد طوفانی است و اگر ساحل در یک روز طوفانی باشد فردای آن روز به احتمال  $0.5$  درصد آرام و به احتمال  $0.5$  درصد طوفانی است. اگر امروز ساحل آرام باشد، احتمال اینکه در دو روز بعد ساحل طوفانی باشد چقدر است؟

۴ قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد را ثابت کنید:

۵ قانون ضرب احتمال  $n$  پیشامد را بنویسید. اگر بخواهیم از این قانون برای محاسبه احتمال اشتراک  $n$  پیشامد استفاده کنیم، به چند حالت مختلف این کار قابل انجام است؟

۶ جمعیت بزرگسال ساکن در یک روستا،  $55$  درصد زن و  $45$  درصد مرد است. می‌دانیم که  $20$  درصد زنان بزرگسال و  $70$  درصد مردان بزرگسال در این روستا گواهینامه تراکتور دارند. اگر بزرگسالی را از ساکنان روستا به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه گواهینامه تراکتور داشته باشد چقدر است؟

۷ دو ظرف داریم. در اولی  $4$  مهره سبز و  $3$  مهره قرمز و در دومی  $3$  مهره سبز و  $5$  مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اول یک مهره به طور تصادفی بر می‌داریم و بدون مشاهده آن را به ظرف دوم منتقل می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم بیرون می‌آوریم؛ با چه احتمالی این مهره سبز است؟

۸ در شهری  $60$  درصد رانندها مرد و  $40$  درصد زن هستند. احتمال اینکه یک راننده مرد، وقتی جراغ راهنمایی قرمز است، روی خط عابر توقف کند  $50\%$  است و زن‌ها چنین تخلفی را به احتمال  $10\%$  انجام می‌دهند. احتمال اینکه یک راننده در این شهر هنگام قرمز بودن جراغ راهنمایی روی خط عابر توقف کند چقدر است؟

۹ در دو جعبه به ترتیب،  $10$  و  $12$  لامپ موجود است. در جعبه اول  $4$  لامپ و در جعبه دوم  $3$  لامپ معیوب است. از هر کدام از جعبه‌ها  $5$  لامپ به تصادف انتخاب و در یک جعبه جدید قرار می‌دهیم. احتمال آنکه لامپ انتخابی از جعبه جدید، معیوب باشد را محاسبه کنید.

۱۰  $5$  درصد واجدین شرایط در شهر  $A$  و  $8$  درصد واجدین شرایط در شهر  $B$  در انتخابات شورای شهر شرکت کرده‌اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر  $A$  سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر  $B$  باشد و فردی به تصادف از بین رأی‌دهنده‌های این دو شهر انتخاب شود، به چه احتمالی از شهر  $A$  خواهد بود؟

۱۱ احتمال مبتلا شدن به یک بیماری خاص برای کودکی که واکسن زده  $200\%$  و برای کودکی که واکسن نزده  $10\%$  است.

اگر در شهری  $90\%$  درصد کودکان، واکسن زده باشند، احتمال اینکه یک کودک از این شهر به این بیماری مبتلا شود چقدر است؟

۱۲ قانون بیز را ثابت کنید:

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

راهنمایی: در دو طرف تساوی از تعریف احتمال شرطی استفاده کنید، تا درستی آن را بینید.

۱۳ با فرض شرایط قانون احتمال کل، ثابت کنید:

$$\min \{P(A|B_1), \dots, P(A|B_n)\} \leq P(A) \leq \max \{P(A|B_1), \dots, P(A|B_n)\}$$

۱۴ فرض کنید  $B$  و  $C$  دو پیشامد ناسازگار باشند و  $P(A|B) \leq P(A|C)$ . ثابت کنید:

$$P(A|B) \leq P(A|(B \cup C)) \leq P(A|C)$$

۱۵ امیر و بابک عضو تیم ده نفره والیبال مدرسه‌اند. در این تیم قد همچو دو نفری برابر نیست. اگر بدانیم امیر از بابک بلندتر است، احتمال اینکه امیر بلندقدترین عضو تیم باشد چقدر است؟ احتمال اینکه امیر از نظر بلندی قد، نفر نهم باشد چقدر است؟

۱۶ علی و مازیار هر کدام بهترتب، با احتمال‌های  $40\%$  و  $30\%$  برای دیدن یک مسابقه ورزشی به ورزشگاه می‌روند. اگر علی به ورزشگاه رفته باشد، مازیار با احتمال  $80\%$  به ورزشگاه می‌رود. فرض کنید علی به ورزشگاه نرفته باشد. با جه احتمالی مازیار نیز به ورزشگاه نرفته است؟

۱۷ خانم‌ها اکبری، برنا و چمنی نسخه‌خوان‌های یک مؤسسه انتشاراتی اندکه بهترتب،  $20\%$ ،  $30\%$  و  $50\%$  درصد از کارهای نسخه‌خوانی را انجام می‌دهند. احتمال اینکه این سه نفر صفحه‌ای که به آنها سپرده شده را بی‌غلط تصحیح کنند بهترتب  $90\%$  و  $95\%$  است. صفحه‌ای نسخه‌خوانی شده، ولی هنوز غلط دارد. احتمال اینکه مستول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد چقدر است؟

۱۸ فرض کنید از بین چهار کارت با شماره‌های ۱ تا ۴ کارتی را به تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت برتتاب می‌کنیم. اگر ۲ بار رو بباید، احتمال اینکه شماره کارت خارج شده ۳ باشد چقدر است؟

۱۹ یک شرکت بیمه، بیمه‌گزاران خود را به دو گروه تقسیم کرده است؛ گروه «پرخطر» که در یک سال با احتمال  $40\%$  تصادف می‌کنند و گروه «کم خطر» که احتمال تصادف کردن آنها در یک سال  $20\%$  است. می‌دانیم که  $30\%$  درصد بیمه‌گزاران پرخطرند. الف) احتمال اینکه یک بیمه‌گزار در سال آینده تصادف کند را به دست آورید.

ب) اگر یک بیمه‌گزار در سال گذشته تصادف کرده باشد، احتمال اینکه جزو گروه پرخطر باشد چقدر است؟

۱- روش اول : با توجه به این که حداقل یکی از غریزندان پسر است فضای نمونه ای به صورت زیر می باشد : (پسر = b و دختر = g)

**کاهشی**  $S = \{bggg, gbgg, ggbg, gggb, bbgg, bgbg, bggg, gbgg, ggbb, bbbg, bbgb, bgbb, gbbb, bbbb\}$

$$A = \{bbgg, bgbg, bggg, gbbg, gbgg, ggbb\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{16} = .375$$

روش دوم : بیشامد حداقل یک پسر را با A نمایش داده و  $P(A) = \frac{15}{16}$  است ، همچنین بیشامد دقیقاً دو پسر را با B نمایش داده و

است . از طرفی واضح است که  $B \subseteq A$  و در نتیجه  $P(B) = \frac{6}{16}$  است . بنابراین :

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{16}}{\frac{15}{16}} = \frac{2}{5} = .4$$



۲- الف) از بین ۸۷۰ هزار خودروی مراجعه کننده ، ۲۵۸ هزار تای آنها مردود شده اند پس احتمال مردودی  $\frac{258}{870} = \frac{43}{145}$  است .

ب) تعداد ۷۹ هزار خودرو مراجعه داشته که ۲۶ هزار تای آنها مردود است پس احتمال مردودی در این مرکز  $\frac{26}{79}$  است .

پ) تعداد کل مردودی ها ۲۵۸ هزار بوده که ۲۶ هزار تای آنها مربوط به مرکز شماره ۵ است پس احتمال آن  $\frac{26}{258} = \frac{13}{129}$  است .

پ) روش دوم : بیشامد مردود شدن را با M و بیشامد مراجعه به مرکز شماره ۵ را با N نمایش می دهیم در نتیجه :

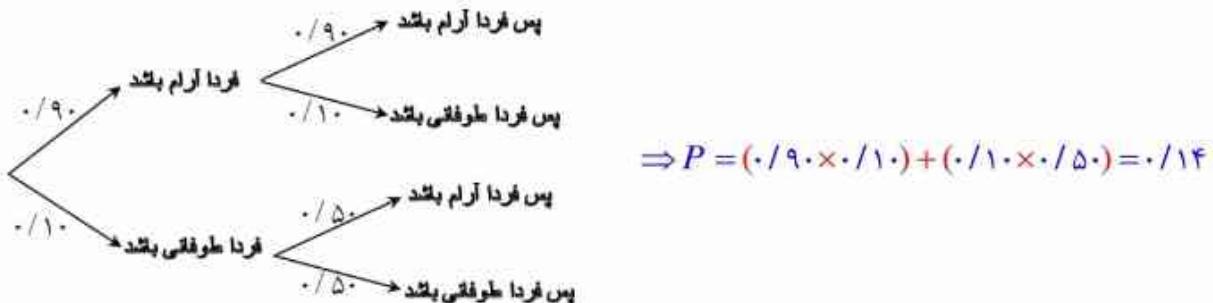
$$P(N|M) = \frac{P(N \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{13}{129}}{\frac{26}{258}} = \frac{26}{26} = \frac{13}{129}$$



۳- نوع پرسشن احتمال خواسته شده ابهام دارد : احتمال اینکه در دو روز بعد ساحل طوفانی باشد چقدر است؟

آیا منظور هر دو روز آینده است یا فقط دومین روز در آینده می باشد؟

با فرض اینکه منظور ، فقط دومین روز در آینده (یعنی فقط پس فردا) است ، مسئله را حل می کنیم :



$$\text{راست} = P(A_1) \times \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \times \frac{P(A_3 \cap [A_1 \cap A_2])}{P(A_2 \cap A_1)} = P(A_1 \cap [A_1 \cap A_2]) = P(A_1 \cap A_1 \cap A_2) = \text{چپ} \quad -4$$

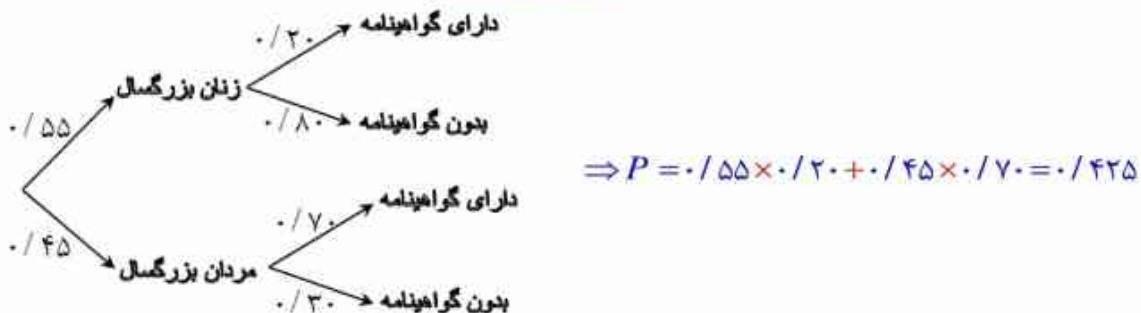
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) =$$

-۵

$$P(A_1) \times P(A_2 | A_1) \times P(A_3 | A_1 \cap A_2) \times P(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3) \times \dots \times P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

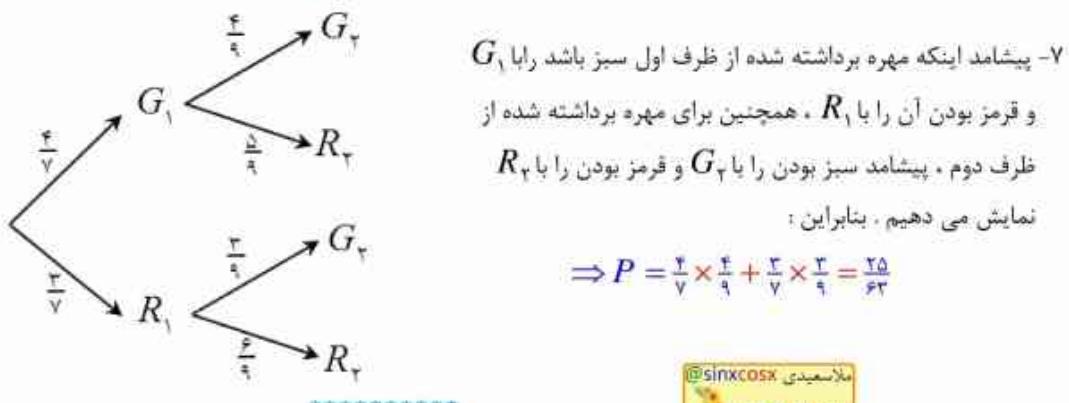
با توجه به خاصیت جایی در اشتراک، می‌توان  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$  را به صورت  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$  و حالت‌های دیگر نوشت و آن را محاسبه نمود. تعداد حالات آن همان تعداد حالات جایی  $A_i$ ‌ها می‌باشد که به  $n$  حالت می‌توان نوشت.

\*\*\*\*\*



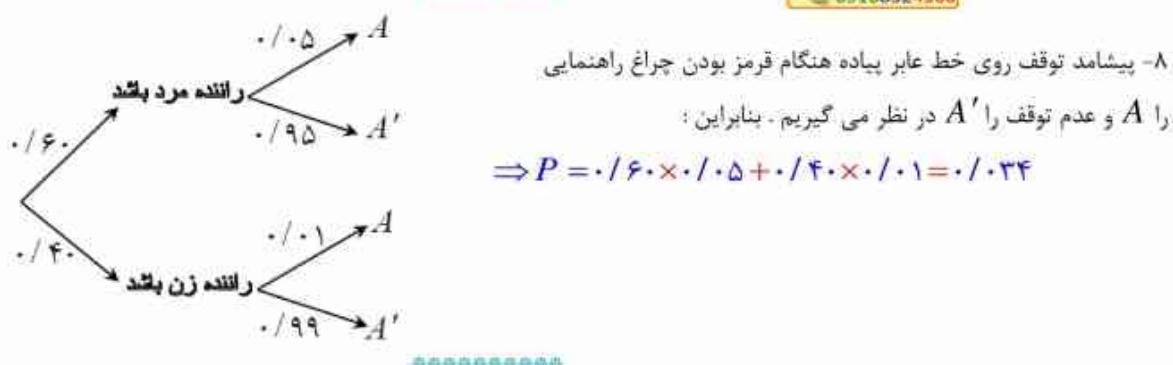
-۶

\*\*\*\*\*



@sinxcosx  
ملاسعیدی  
09168324500

۷- پیشامد اینکه مهره برداشته شده از طرف اول سبز باشد را با  $G_1$  و قرمز بودن آن را با  $R_1$ ، همچنین برای مهره برداشته شده از طرف دوم، پیشامد سبز بودن را با  $G_2$  و قرمز بودن را با  $R_2$  نمایش می‌دهیم. بنابراین:

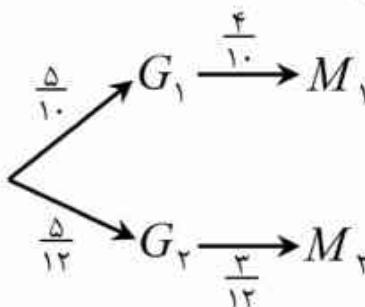


\*\*\*\*\*

۸- پیشامد توقف روی خط عابر پیاده هنگام قرمز بودن چراغ راهنمایی را  $A$  و عدم توقف را  $A'$  در نظر می‌گیریم. بنابراین:

$$\Rightarrow P = 0.6 \times 0.5 + 0.4 \times 0.1 = 0.34$$

۹- پیشامد اینکه لامپ انتخابی از جعبه اول باشد،  $G_1$  و پیشامد اینکه از جعبه دوم باشد را با  $G_2$  نمایش می‌دهیم. همچنین پیشامد معیوب بودن لامپ انتخابی در جعبه‌ی اول را با  $M_1$  و در جعبه‌ی دوم را با  $M_2$  نمایش می‌دهیم. بنابراین:

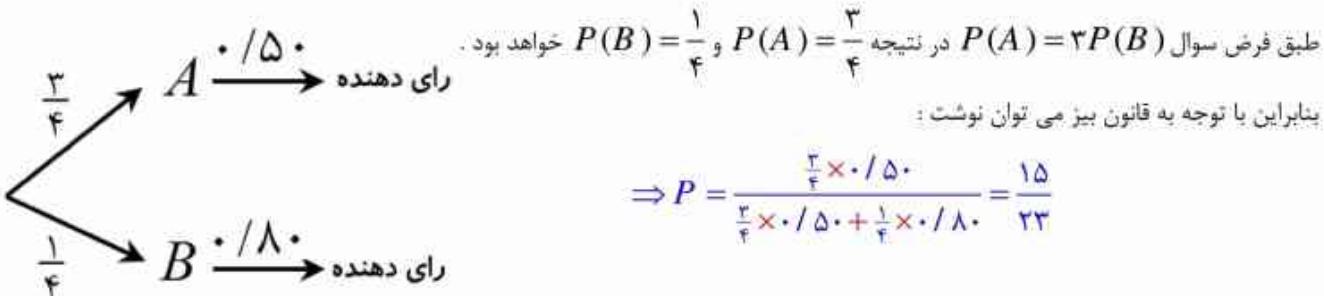


$$P(G_1) = \frac{5}{10}, \quad P(G_2) = \frac{5}{12}, \quad P(M_1) = \frac{4}{10}, \quad P(M_2) = \frac{3}{12}$$

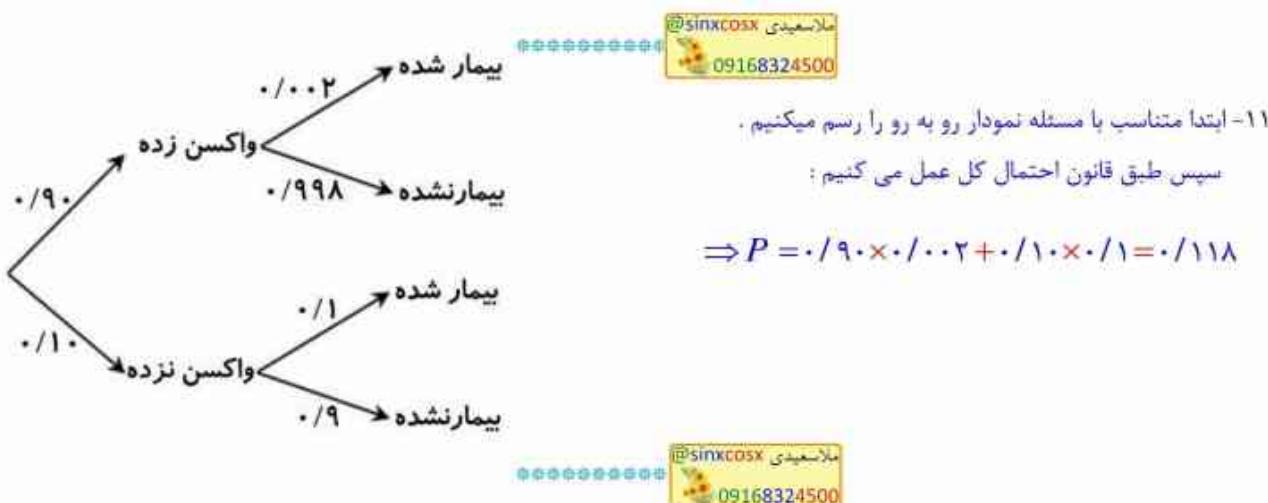
$$\Rightarrow P = \frac{5}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{12} \times \frac{3}{12} = \frac{73}{240}$$

@sinxcosx  
ملاسعیدی  
09168324500

۱۰- احتمال واجد شرایط بودن در شهر  $A$  را با  $P(A)$  و واجد شرایط بودن در شهر  $B$  را با  $P(B)$  نمایش می‌دهید.



بنابراین با توجه به قانون بیز می‌توان نوشت:



۱۱- ابتدا متناسب با مسئله نمودار رو به رو رسم می‌کنیم.

سپس طبق قانون احتمال کل عمل می‌کنیم:

$$\text{چپ} = \frac{P(B_i) \times \frac{P(A \cap B_i)}{P(B_i)}}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = P(B_i | A) \quad ۱۲$$

۱۳- طی دو مرحله نامساوی داده شده را اثبات می‌کنیم:

مرحله اول: باید نشان دهید  $\min\{P(A|B_1), P(A|B_2), \dots, P(A|B_n)\} \leq P(A)$ ، برای این منظور از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

گیریم چنین نامساوی برقرار نباشد، پس به ازای هر  $i$  و در نتیجه  $P(A \cap B_i) > P(A) \times P(B_i)$  است. بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B_1) > P(A) \times P(B_1) \\ P(A \cap B_2) > P(A) \times P(B_2) \\ \vdots \\ P(A \cap B_n) > P(A) \times P(B_n) \end{array} \right\} \xrightarrow{+} P(A) > P(A) \times \sum_{i=1}^n P(B_i) \xrightarrow[P(S)=1]{} P(A) > P(A) \rightarrow \text{تناقض است.}$$

مرحله ای دوم: باید نشان دهید  $P(A) \leq \max\{P(A|B_1), P(A|B_2), \dots, P(A|B_n)\}$ ، برای این منظور از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

گیریم این نامساوی برقرار نباشد، پس به ازای هر  $i$   $P(A) > P(A|B_i)$  و در نتیجه  $P(A) \times P(B_i) > P(A \cap B_i)$  است. بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} P(A) \times P(B_1) > P(A \cap B_1) \\ P(A) \times P(B_2) > P(A \cap B_2) \\ \vdots \\ P(A) \times P(B_n) > P(A \cap B_n) \end{array} \right\} \xrightarrow{+} P(A) \times \sum_{i=1}^n P(B_i) > P(A) \Rightarrow P(A) > P(A) \rightarrow \text{تناقض است.}$$

@sinxcosx ملاسعبدی  
09168324500

۱۴- روش اول : طی دو مرحله اثبات صورت می‌گیرد.

$$P(A|B) \leq P(A|B \cup C)$$

گیریم این نامساوی برقرار نباشد، پس  $P(A|B) > P(A|B \cup C)$  بوده و با توجه به فرضیات مسئله می‌توان نوشت:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} > \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(B \cup C)} \quad B \cap C = \emptyset \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} > \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C)}{P(B) + P(C)}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \times (P(B) + P(C)) > P(B) \times (P(A \cap B) + P(A \cap C))$$

$$\Rightarrow (P(A \cap B) \times P(B)) + (P(A \cap B) \times P(C)) > (P(B) \times P(A \cap B)) + (P(B) \times P(A \cap C))$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \times P(C) > P(B) \times P(A \cap C)$$

$$\xrightarrow{+P(B)P(C)} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} > \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \Rightarrow P(A|B) > P(A|C) \Rightarrow$$

مرحله‌ی دوم: دقیقاً مشابه مرحله‌ی اول عمل گرده و به تناقض می‌رسیم.

نکته: به شرط مثبت بودن تمام متغیرها، اگر  $\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+c} \leq \frac{c}{d}$  آنگاه  $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$  خواهد بود.

روش دوم :

بنایه فرض سوال  $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \Leftrightarrow P(A|B) \leq P(A|C)$  می‌توان نوشت:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C)}{P(B) + P(C)} \leq \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$$

$$\Rightarrow P(A|B) \leq \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C)}{P(B) + P(C)} \leq P(A|C)$$

از طرفی با توجه به ناسازگار بودن  $B$  و  $C$  می‌دانیم  $P(A|(B \cup C)) = \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(B \cup C)} = \frac{P((A \cap B) \cup (A \cap C))}{P(B) + P(C)} = \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C)}{P(B) + P(C)}$

$P(A|B) \leq P(A|(B \cup C)) \leq P(A|C)$  جایگذاری آن در نامساوی فوق خواهیم داشت:

@sinxcosx ملاسعبدی  
09168324500

۱۵- دو پیشامد  $A$  و  $B$  را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow A: \text{امیر بلند قدرترين عضو تيم است.}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow B: \text{امير از بابک بلند قدرترين است.}$$

$$\text{احتمال اينكه امير بلندقدترین باشد با فرض اينكه امير از بابک بلندتر است} \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

همچنان پیشامد  $C$  را تعریف می‌کنیم: امير از نظر بلندی قد نفر نهم باشد، يعني بابک کوتاه قدرترين باشد.

$$\text{احتمال اينكه امير از نظر بلندی قد نفر نهم باشد با فرض اينكه امير از بابک بلندتر است} \Rightarrow P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{P(C)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$

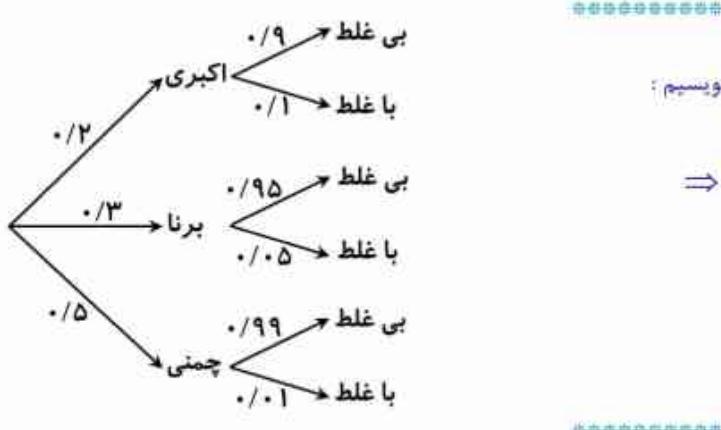
۱۶- پيشامد آنکه علی به ورزشگاه برود را  $A$  و پيشامد آنکه مازيار به ورزشگاه برود را  $M$  می تاميم . بنابراين :

$$P(A) = \frac{1}{4} \quad P(M) = \frac{1}{3} \quad P(M|A) = \frac{1}{8} \quad P(M'|A') = ?$$

$$P(M \cap A) = P(A) \times P(M|A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$$

$$P(M \cup A) = P(M) + P(A) - P(M \cap A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} = \frac{28}{32}$$

$$P(M'|A') = \frac{P(M' \cap A')}{P(A')} = \frac{1 - P(M \cup A)}{1 - P(A)} = \frac{1 - \frac{28}{32}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{8}$$



۱۷- ابتدا نمودار روپرور را رسم می کنیم . سپس طبق قانون بیز می نویسیم :

$$\Rightarrow P = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{1}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{1} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{1}} = \frac{1}{5}$$



۱۸- ابتدا نمودار روپرور را برای آن ترسیم می کنیم و بنا به قانون بیز :

$$\Rightarrow P = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{8}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{8}} = \frac{3}{8}$$



۱۹- ابتدا نمودار روپرور را برای آن ترسیم می کنیم .

$$P = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{26} \quad \text{(الف)}$$

$$P = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{26}} = \frac{6}{13} \quad \text{ب) طبق قانون بیز}$$



## درس ۴ پیشامدهای مستقل و وابسته



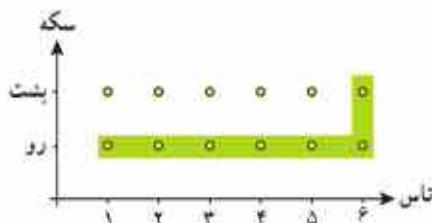
دنبالی که در آن زندگی می‌کنیم، سرتشار از واقعی است که به یکدیگر وابسته‌اند؛ مثلاً سونامی‌های بزرگ پس از زلزله‌های عظیم در داخل دریا اتفاق می‌افتد. بسیاری از رفتارهای انسانی نیز به یکدیگر وابسته‌اند؛ به عنوان مثال، اخلاق نیکوی یک فرد و روابط اجتماعی او به یکدیگر وابسته‌اند. از سوی دیگر بعضی از رخدادها به یکدیگر وابسته نیستند و اصطلاحاً، مستقل از یکدیگراند. آیا گروه خونی شما به گروه خونی دوستان وابسته است؟ البته تشخیص وابستگی و با مستقل بودن خیلی از پیشامدها، واضح نیست و به ابزاری دقیق برای بررسی آنها نیاز داریم.

### فعالیت

یک سکه و یک تاس را به طور همزمان بزناب می‌کنیم. فرض کنید  $A$  پیشامد ۶ آمدن تاس و  $B$  پیشامد رو شدن سکه باشد.

۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی و پیشامدهای  $A$ ،  $B$  و  $A \cap B$  را بنویسید.

$$\begin{aligned} S &= \{(6\text{وب})(5\text{وب})(4\text{وب})(3\text{وب})(2\text{وب})(1\text{وب})(6\text{اور})(5\text{اور})(4\text{اور})(3\text{اور})(2\text{اور})(1\text{اور})\} \\ A &= \{(6\text{وب})(6\text{اور})\} \\ B &= \{(1\text{وب})(1\text{اور})\} \\ A \cap B &= \{(6\text{اور})\} \end{aligned}$$



۲ احتمال وقوع پیشامدهای  $A$ ،  $B$  و  $A \cap B$  را تعیین کنید.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{12}, \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{12}.$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{12}$$

اگر سکه رو آمده باشد، احتمال اینکه تاس عدد ۶ بیاید، یعنی  $P(A|B)$  را به دست آورید.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{6}{12}} = \frac{1}{6}$$

۷ با مقایسه  $P(A)$  و  $P(A|B)$  تأثیری در احتمال وقوع پیشامد  $A$  داشته است؟

هر دو احتمال با هم برابر شده اند، ظاهراً شرط  $B$  روی آن تأثیر نداشته است.

۸ اگر  $P(A|B)=P(A)$  و  $P(B|A)=P(B)$  برقار است؟

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

۹ در تساوی  $P(A|B)=P(A)$  و با استفاده از تعریف احتمال شرطی، تساوی  $P(B|A)=P(B)$  را نتیجه بگیرید.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\cancel{P(A)} \cdot P(B)}{\cancel{P(A)}} = P(B)$$

پیشامدهای  $A$  و  $B$  را مستقل می‌گوییم، هرگاه وقوع یکی از آنها در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. به عبارت دیگر دو پیشامد  $A$  و  $B$  مستقل اند، اگر و تنها اگر

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

دو پیشامدی که مستقل نباشند، وابسته نامیده می‌شوند.

اگر  $P(A)$  و  $P(B)$  ناصلف باشند، برقاری تساوی  $P(B|A)=P(B)$  و یا تساوی  $P(A|B)=P(A)$  نیز مستقل بودن  $A$  و  $B$  را نتیجه می‌دهد. در فعالیت بالا،  $P(A|B)=P(A)$ ، بنابراین، پیشامدهای  $A$  و  $B$  مستقل اند. مستقل بودن این دو پیشامد، یعنی روآمدن سکه و ۶ آمدن تاس، بدون محاسبه احتمال‌های مشاهده است، ولی مستقل بودن از پیشامدهای چندان واضح نیست.

مثال ۱) در پرتاب دو تاس، فرض کنید  $A$  پیشامد مشاهده عدد ۳ در تاس اول و  $B$  پیشامد مجموع ۷ در برآمدهای دو تاس باشد، مستقل بودن  $A$  و  $B$  را بررسی می‌کنیم.

برآمد هر تاس ۶ حالت دارد. بنابراین، فضای نمونه‌ای این آزمایش  $n(S) = 6 \times 6 = 36$  عضو دارد. اکنون پیشامدهای  $A$ ،  $B$  و  $A \cap B$  و احتمال‌های آنها را به دست می‌آوریم.

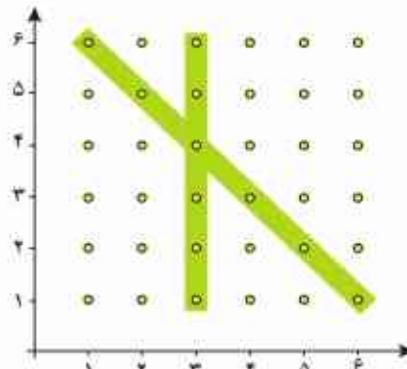
$$A = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

$$B = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

$$A \cap B = \{(3,4)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$



پس  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ، بنابراین پیشامدهای  $A$  و  $B$  مستقل از یکدیگرند.

مستقل بودن بسیاری از پیشامدهای نیاز به بررسی ندارد؛ به عنوان مثال، قبولی در یک درس برای دو نفر، یا جنسیت فرزندان یک خانواده مستقل از یکدیگرند. از استقلال این پیشامدهای می‌توانیم در حل مسائل استفاده کنیم.

مثال ۲) احتمال قبولی زهرا در درس فیزیک، ۹ درصد و احتمال قبولی ریحانه در این درس، ۷ درصد است. احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در این درس قبول شود، را به دست می‌آوریم.

اگر  $P(A)$  احتمال قبولی زهرا و  $P(B)$  احتمال قبولی ریحانه در این درس باشد، احتمال قبولی حداقل یکی از آنها، همان  $P(A \cup B)$  است و می‌دانیم که :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

با توجه به مستقل بودن  $A$  و  $B$ ، پس  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{5}{12} + \frac{7}{12} - \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{11}{12}$$

### کار در کلاس

**۱** سکه سالمی را سه بار برتاب می‌کنیم. اگر  $A$  بیشامد مشاهده رو در برتاب دوم و  $B$  بیشامد مشاهده فقط دو رو به طور متواലی باشد، مستقل بودن  $A$  و  $B$  را بررسی کنید. پشت  $P$  و رو  $R$  بنابراین:

$$A = \{PRP, PRR, RRP, RRR\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$B = \{RRP, PRR\} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$A \cap B = \{RRP, PRR\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A)P(B) \Rightarrow \text{دو بیشامد مستقل نیستند.}$$

**۲** در برتاب دو تاس،  $A$  را بیشامد عدد ۳ در تاس اول و  $B$  را مشاهده مجموع ۱۰ در تاس دو نظر بگیرید. آیا  $A$  و  $B$  مستقل‌اند؟

$$A = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$B = \{(4,6), (5,5), (6,4)\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

**۳** در یک مسابقه تیراندازی، احتمال اینکه محمد به هدف بزند،  $\frac{5}{7}$  و این احتمال برای مرتضی،  $\frac{7}{11}$  است. اگر آنها به تابع به هدف تیراندازی کنند، احتمال اینکه هر دو به هدف بزنند، چقدر است؟



$$P(\text{محمد}) = \frac{5}{7}, \quad P(\text{مرتضی}) = \frac{7}{11} \Rightarrow P(\text{مرتضی} \cap \text{محمد}) = \frac{5}{7} \times \frac{7}{11} = \frac{1}{2}$$

@sinxcosx  
09168324500

### انتخاب‌های با جای گذاری و بدون جای گذاری

مثال ۳) از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره آبی و ۸ مهره قرمز است، دو مهره به صورت می‌درینی و بدون جای گذاری، بیرون می‌آوریم. اگر  $A$  بیشامد آبی بودن مهره اول و  $B$  بیشامد قرمز بودن دومین مهره باشد.

(الف) احتمال اینکه هر دو بیشامد رخ دهند، چقدر است؟

(ب) بیشامدی  $A$  و  $B$  مستقل‌اند یا وابسته؟



حل) با توجه به رابطه  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$  در احتمال شرطی داریم:

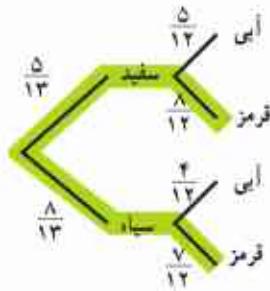
$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{5}{13} \times \frac{8}{12} = \frac{10}{39}$$

برای بررسی وابستگی یا استقلال این بیشامدها،  $P(B|A)$  و  $P(A|B)$  را محاسبه و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. برای محاسبه  $P(B|A)$  از قانون احتمال کلی استفاده کرده و نمودار درختی انتخاب مهره‌ها و تعیین حالت مطلوب را نیز محاسبه کرده‌ایم.

$$P(B) = P(\text{مهره دوم قرمز})$$

برتاب دوم      برتاب اول

$$\begin{aligned} &= P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A') \\ &= \frac{5}{13} \times \frac{8}{12} + \frac{8}{13} \times \frac{7}{12} \\ &= \frac{8}{13} \end{aligned}$$



از سوی دیگر  $P(B|A) \neq P(B)$ ، پس  $P(B|A) \neq P(B|A)$  و  $B$  وابسته‌اند.

در مثال صفحه قبل، اگر مهره دوم را پس از جایگذاری مهره اول در جعبه بیرون آوریم. با محاسبه  $P(B)$  و  $P(A|B)$  مستقل بودن  $A$  و  $B$  را توجه بگیرید. واضح است که  $P(B) = \frac{1}{13}$ .

$P(B) = P(B|A) = \frac{1}{13}$ . بنابراین با توجه به جایگذاری مهره ای اول، تعداد کل مهره ها ۱۳ مانده و درنتیجه  $P(B) = \frac{1}{13}$ . یعنی دو پیشامد مستقل از یکدیگرند.

مستقل بودن پیشامدهای  $A$  و  $B$  در کار در کلاس بالا قابل حدس زدن است؛ زیرا با جایگذاری مهره اول انتخاب شده در جعبه، شرایط برای انتخاب مهره دوم، دقیقاً همانند انتخاب مهره اول است و در حقیقت آزمایش اول تکرار می‌شود. در حالت کلی، انتخاب هایی که با جایگذاری انجام می‌شوند، مستقل اند. مفهوم استقلال برای بیش از دو پیشامد نیز تعریف می‌شود.

سه پیشامد  $A$ ،  $B$  و  $C$  را مستقل می‌گوییم، هرگاه چهار تساوی زیر برقرار باشند.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

در حالت کلی،  $n$  پیشامد،  $A_1, A_2, \dots, A_n$  را مستقل می‌گوییم، هرگاه احتمال اشتراک هر تعداد از این پیشامدها با حاصل ضرب احتمال آنها برابر باشد.

مثال ۴) خانواده ای ۴ فرزند دارد.

الف) احتمال اینکه ۴ فرزند این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه فقط فرزند اول و آخر این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

پ) احتمال اینکه دو فرزند این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

حل الف) فرض کنید  $A$  پیشامد این باشد که هر ۴ فرزند خانواده دختر باشند، با توجه به مستقل بودن جنسیت فرزندان، داریم:

$$P(A) = P(\text{دختر}, \text{دختر}, \text{دختر}, \text{دختر})$$

$$= P(\text{دختر}) \times P(\text{دختر}) \times P(\text{دختر}) \times P(\text{دختر})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{16}$$

حل ب) مشابه بالا، اگر  $B$  پیشامد دختر بودن فقط فرزند اول و آخر این خانواده باشد، سپس:

$$P(B) = P(\text{دختر}, \text{پسر}, \text{پسر}, \text{دختر})$$

$$= P(\text{دختر}) \times P(\text{پسر}) \times P(\text{پسر}) \times P(\text{دختر})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{16}$$

اگنون فرض کنید  $C$  بیشامد وجود دو دختر در این خانواده باشد، بکی از حالت‌ها به صورت زیر است:

فرزند چهارم	فرزند سوم	فرزند دوم	فرزند اول
پسر	دختر	پسر	دختر

و احتمال بیشامد بالا عبارت است از:

$$P = (\text{پسر}) P \times (\text{دختر}) P \times (\text{پسر}) P \times (\text{دختر}) P = (\text{پسر، دختر، پسر، دختر}) P$$

قرار گرفتن دو دختر در این خانواده، به  $\frac{1}{16}$  حالت میسر است و احتمال هر کدام از این حالت‌ها، همان  $\frac{1}{16}$  است.

$$P(C) = \frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

مثال ۵) درصد افراد شهری با سوادند. ۵ نفر از این شهر انتخاب می‌شوند. احتمال اینکه هر ۵ نفر بی‌سواد باشند را به دست می‌آوریم. احتمال اینکه اولین نفر بی‌سواد باشد،  $\frac{1}{2}$  درصد یا  $50\%$  است. با توجه به اینکه جای‌گذاری انجام نشده است، بی‌سواد بودن فرد دوم مستقل از بی‌سوادی فرد اول نیست، ولی چون انتخاب از یک جامعه بر جمعیت انجام می‌شود، می‌توان فرض کرد که بی‌سواد بودن افراد انتخاب شده، مستقل از یکدیگر است و احتمال بی‌سواد بودن هر کدام از آنها  $\frac{1}{2}$  است. پس:

$$\begin{aligned} &(\text{نفر پنجم بی‌سواد}) P \times (\text{نفر چهارم بی‌سواد}) P \times (\text{نفر سوم بی‌سواد}) P \times (\text{نفر دوم بی‌سواد}) P \times (\text{نفر اول بی‌سواد}) P = (\text{هر پنج نفر بی‌سواد}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= \frac{1}{32} \end{aligned}$$

### تمرین

۱ اگر  $A$  و  $B$  دو بیشامد ناتهی و ناسازگار از فضای نمونه‌ای  $S$  باشند، آیا  $A$  و  $B$  می‌توانند مستقل باشند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

۲ اگر  $A$  و  $B$  دو بیشامد مستقل و  $E \subseteq A$  و  $F \subseteq B$  دو زیرمجموعه ناتهی باشند، آیا  $E$  و  $F$  نیز همیشه مستقل‌اند؟ چرا؟

۳ اگر  $A$  و  $B$  دو بیشامد مستقل باشند، تسان دهید که بیشامدهای زیر نیز مستقل‌اند.

(الف)  $A'$  و  $B'$

(ب)  $A'$  و  $B$

۴ در برتاب دو تاس به طور بی‌دریبی، اگر  $A$  بیشامد متواالی بودن اعداد ظاهر شده و  $B$  بیشامد ظاهر شدن عدد ۳ در تاس اول باشد، مستقل بودن  $A$  و  $B$  را بررسی کنید.

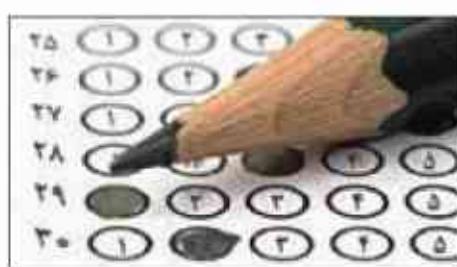
۵ از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$  یک عضو انتخاب می‌کنیم. فرض کنید  $A$  بیشامد یک عدد زوج و  $B$  بیشامد وقوع عددی بخش‌پذیر بر ۳ باشد، مستقل بودن  $A$  و  $B$  را بررسی کنید.



۷ احتمال موفقیت عمل بیوند کلیه روی یک بیمار  $\frac{1}{6}$  و روی بیمار دیگر  $\frac{1}{8}$  است. اگر این عمل روی این دو نفر انجام شود، مطلوب است احتمال اینکه:

- (الف) روی هر دو بیمار موفقیت آمیز باشد.
- (ب) روی هیچ کدام موفقیت آمیز نباشد.
- (پ) فقط روی بیمار دوم موفقیت آمیز باشد.

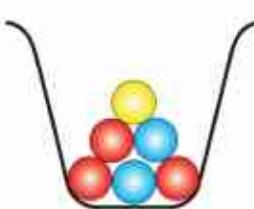
۸ یک سکه و دو تاس به طور همزمان برتاب می‌شوند. احتمال اینکه سکه، رو و هردو تاس عدد ۶ را نشان دهند، چقدر است؟



۹ در یک امتحان پنج گزینه‌ای، ۱۰ سوال مطرح شده است. اگر یک دانش‌آموز به تمام سوالات به طور تصادفی پاسخ دهد، احتمال آن را بدست آورید که:

- (الف) به تمام سوال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.
- (ب) تنها به پنج سوال اول پاسخ صحیح داده باشد.
- (پ) به نیمی از سوال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

۱۰ در یک جعبه که شامل ۳ مهره قرمز، ۲ مهره آبی و ۱ مهره زرد است، دو مهره به تصادف و با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آنکه:



- (الف) هر دو مهره قرمز باشند.
- (ب) حداقل یک مهره آبی باشد.
- (پ) هر دو مهره همنگ باشند.

۱۱ جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که سه تای آنها معیوب است. اگر به تصادف و بدون جای‌گذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، احتمال آن را بدست آورید که:

- (الف) هر سه لامپ معیوب باشند.
- (ب) حداقل یک لامپ معیوب باشد.



۱۲ احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده،  $\frac{1}{9}$  است. اگر ۱۰ نفر را انتخاب کنیم، احتمال اینکه داروی ساخته شده، روی همه افراد جواب منفی داشته باشد، چقدر است؟

۱۳ اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل باشند به طوری که  $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$  و  $P(A \cup B') = \frac{3}{4}$ ، حاصل  $P(A \cap B')$  را بدست آورید.

۱- خیر دو پیشامد ناسازگار ، در صورتی مستقل از یکدیگرند که حداقل یکی از آنها ثبی باشد .  
اثبات : فرض کیم دو پیشامد  $A$  و  $B$  ناسازگار مستقل باشند ، بنابراین :

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0 \\ P(A \cap B) = P(A)P(B) \end{array} \right\} \Rightarrow P(A)P(B) = 0 \Rightarrow P(A) = 0 \vee P(B) = 0$$

\*\*\*\*\*

۲- خیر ، در نظر بگیرید  $S = \{a, b, c, d\}$  فضای نمونه و  $B = \{a, c\}$  و  $A = \{a, b\}$  دو پیشامد از آن باشند .  
 $P(A) = \frac{1}{2}$  ،  $P(B) = \frac{1}{2}$  ،  $A \cap B = \{a\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} \rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow B$  و  $A$  مستقلند  
 $P(E) = \frac{1}{4}$  ،  $P(F) = \frac{1}{4}$  ،  $E \cap F = \emptyset \Rightarrow P(E \cap F) = 0 \rightarrow P(E \cap F) \neq P(E)P(F) \Rightarrow E$  و  $F$  مستقل نیستند  
 پیشامد های  $F = \{c\}$  و  $E = \{a\}$  به ترتیب زیر مجموعه های  $A$  و  $B$  را در نظر می گیریم :

۳- فرض کنیم دو پیشامد  $A$  و  $B$  از فضای نمونه ای  $S$  مستقل باشند در نتیجه  $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

الف) با توجه به فرض ، نشان می دهیم  $P(B \cap A') = P(B).P(A')$

$$P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A).P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B).P(A')$$

نتیجه : اگر دو پیشامد مستقل باشند ، آنکه هر کدام از آنها مستقل از متمم دیگری است .

ب) **روش اول** : طبق قسمت قبل  $A'$  و  $B'$  مستقل هستند ، از طرفی بنا به نتیجه ای آن ، هر کدام از پیشامد ها مستقل از متمم دیگری است ، یعنی  $A'$  مستقل از متمم  $B$  خواهد بود ، پس  $A'$  و  $B'$  مستقلند .

**روش دوم** : با توجه به قسمت الف ، نشان می دهیم  $P(A' \cap B') = P(A').P(B')$

$$P(A' \cap B') = P(A' - B) = P(A') - P(A' \cap B) = P(A') - P(A')P(B) = P(A')(1 - P(B)) = P(A').P(B')$$

**روش سوم** : بدون استفاده از قسمت الف ، به کمک فرض سوال اثبات می کیم  $P(A' \cap B') = P(A').P(B')$

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A).P(B) \\ &= 1 - P(A) - P(B)(1 - P(A)) = P(A') - P(B).P(A') = P(A')(1 - P(B)) = P(A').P(B') \end{aligned}$$

\*\*\*\*\*

$$A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)\} \Rightarrow P(A) = \frac{10}{36} \quad -4$$

$$B = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\} \Rightarrow P(B) = \frac{6}{36}$$

$$A \cap B = \{(2,2), (2,4)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

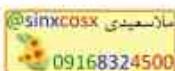
$\Rightarrow \frac{1}{36} \times \frac{6}{36} \neq \frac{2}{36} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$  دو پیشامد مستقل از هم نیستند.

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{10}$$

$$B = \{3, 6, 9\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{10}$$

$$A \cap B = \{6\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

$\Rightarrow \frac{5}{10} \times \frac{3}{10} \neq \frac{1}{10} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$  دو پیشامد مستقل از هم نیستند.



۶- پیشامد موقبیت عمل پیوند کلیه روی بیمار اول را با  $A$  و بیمار دوم را با  $B$  نمایش می‌دهیم. با توجه به مستقل بودن آنها داریم:

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{8} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{48}$$

ب) طبق آنچه در تمرین ۳ ثابت شد، هر گاه دو پیشامد مستقل باشند، متمم آنها نیز مستقلند، بنابراین:

$$P(A') = \frac{5}{6}, \quad P(B') = \frac{7}{8} \Rightarrow P(A' \cap B') = P(A').P(B') = \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} = \frac{35}{48}$$

ب) طبق تمرین ۳، هر گاه دو پیشامد مستقل از هم باشند، هر کدام از آنها مستقل از متمم دیگری است، بنابراین:

$$P(A') = \frac{5}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{8} \Rightarrow P(A' \cap B) = P(A').P(B) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{8} = \frac{5}{48}$$



۷- پیشامد رو بودن سکه را با  $A$  و پیشامد ۶ آمدن هر دو تاس را با  $B$  نمایش می‌دهیم. واضح است که این دو پیشامد مستقل از یکدیگرند بنابراین

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$



۸- الف) احتمال اینکه هر سوال را صحیح پاسخ دهد  $\frac{1}{5}$  است. از طرفی پیشامد های پاسخ دادن به هر سوال مستقل از سوال دیگر است. بنابراین

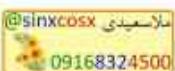
$$\text{احتمال پاسخ صحیح دادن تمام سوال ها} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \dots \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5^5}$$

ب) احتمال اینکه به هر سوال پاسخ صحیح دهد  $\frac{1}{5}$  و پاسخ غلط دهد  $\frac{4}{5}$  است. بنابراین:

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4^5}{5^5} = (\frac{4}{5})^5$$

پ) این سوال مشابه قسمت ب حل می‌شود با این تفاوت که باید از بین ۱۰ سوال ۵ سوال را برای پاسخ صحیح دادن برگزید یعنی  $\binom{10}{5}$  حالت

$$\binom{10}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4^5}{5^5} = \binom{10}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^5$$



۹- الف) با در نظر گرفتن اینکه بیرون آوردن مهره ها با جایگذاری است ، پیشامد برای هر مهره مستقل از مهره هی دیگر است .

$$\text{احتمال قرمز بودن هر مهره } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ است . بنابراین احتمال قرمز بودن دو مهره } \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \text{ است .}$$

$$P = \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{8}{36} \quad (\text{مهره اول آبی و دومی غیر آبی})$$

ب) روش اول :

$$P = \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{8}{36} \quad (\text{مهره اول غیر آبی و دومی آبی})$$

$$P = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{36} \quad (\text{مهره اول آبی و دومی نیز آبی})$$

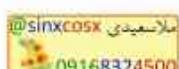
بنابراین احتمال اینکه حداقل یکی آبی باشد برابر است با  $\frac{8}{36} + \frac{8}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{9}$  است .

**روش دوم :** احتمال اینکه هیچ کدام آبی نباشد  $\frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{16}{36}$  متمم حداقل یک مهره آبی بودن ، است .

$$\text{بنابراین احتمال حداقل یک مهره آبی بودن برابر است با : } 1 - \frac{16}{36} = \frac{5}{9}$$

ب) مهره ها هر دو قرمز یا هر دو آبی اند . احتمال هر دو قرمز باشد  $\frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{36}$  و احتمال هر دو آبی باشد  $\frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{9}{36}$  است در نتیجه احتمال

$$\text{هر دو مهره همنگ باشد برابر است با : } \frac{9}{36} + \frac{4}{36} = \frac{13}{36}$$



$$P = \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{220} \quad 10-\text{الف)$$

$$P = 1 - \frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{7}{10} = \frac{34}{55} \quad 10-\text{ب)$$

\*\*\*\*\*

۱۱- احتمال عدم موفقیت دارو روی هر شخص  $= 1 - 0.9 = 0.1$  است .

با توجه به مستقل بودن افراد از یکدیگر ، احتمال اینکه روی همه ی افراد جواب منفی داشته باشد برابر است با :

$$0.1 \times 0.1 \times 0.1 \times \dots \times 0.1 = (0.1)^n$$



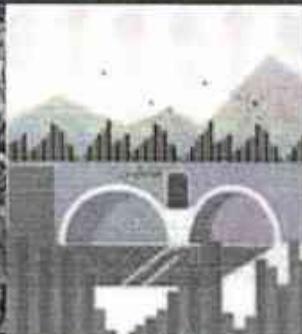
$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.4 = P(A) - 0.1 \Rightarrow P(A) = 0.5 \quad 11-\text{الف)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow 0.1 = 0.5 \times P(B) \Rightarrow P(B) = 0.2$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = 0.5 + (1 - 0.2) - 0.1 = 0.9$$

-۱۲

آمار هر بروزی و برداشت داده است.  
نمایش داده ها من توانند شبیه یک کوه و یا  
شبیه ساختمان های درختان باشند. من توان برای  
ساختن یک بدل از معیار های گرایش به مرکز  
و یا معیار های برآکندگی استفاده نمود.



## ۳ آمار توصیفی

- ۱ توصیف و نمایش داده ها
- ۲ معیار های گرایش به مرکز
- ۳ معیار های برآکندگی

نوبه گنده:

گروه ریاضی دوره دوم متوجه و ابجهن طلحان ریاضی، استان خوزستان

[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)

## درس ۱

### توصیف و نمایش داده‌ها



بعد از گردآوری داده‌ها، به تنظیم، رده‌بندی و خلاصه کردن آنها می‌پردازیم. به این منظور می‌توان از روش‌های زیر استفاده نمود:

- (الف) تنظیم و طبقه‌بندی داده‌ها در یک جدول به نام جدول فراوانی
- (ب) رسم کردن نمودارهای مختلف براساس مقادیر جدول فراوانی

#### مثال



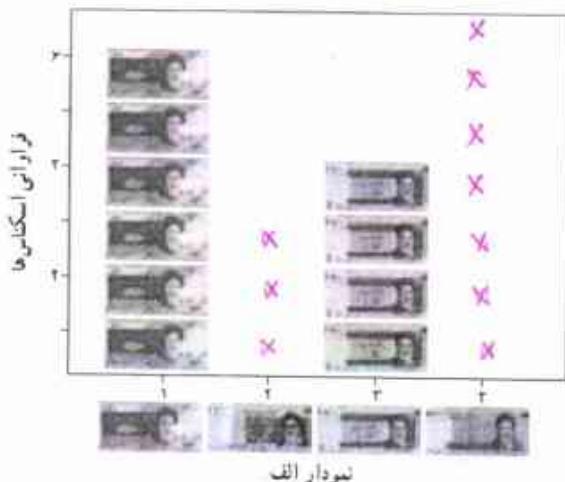
یک راننده تاکسی در یک روز، اسکناس‌های زیر را از مسافران دریافت می‌کند. او تصمیم دارد این اسکناس‌ها را در یکی از دسته‌بندی کند. برای انجام این دسته‌بندی، می‌خواهد مراحل زیر را انجام دهد. شما او را کمک کنید تا این کار را انجام دهد.



- ۱ ابتدا به هر نوع اسکناس عدد ۱ تا ۴ را بدهید و در ستون شماره وارد کنید.
- ۲ سپس به شمارش اسکناس‌ها پردازید و تعداد تکرار هر اسکناس را در ستون سوم وارد کنید.
- ۳ در ادامه تعداد هر اسکناس را بر تعداد کل اسکناس‌ها تقسیم کنید و آن را در ستون چهارم قرار دهید.

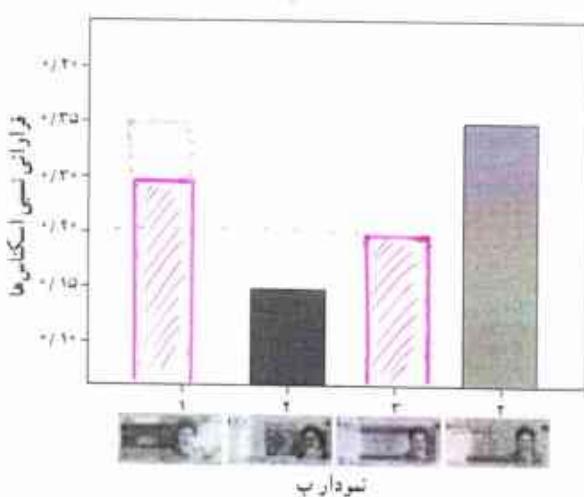
با توجه به اعداد موجود در جدول زیر، چند درصد اسکناس‌ها  $1$  هزار تومانی، چند درصد  $1000$  تومانی، چند درصد  $5$  هزار تومانی و چند درصد از اسکناس‌ها  $10$  هزار تومانی است؟

نوع اسکناس‌ها	تعداد کل اسکناس‌ها	نوع اسکناس	تعداد کل اسکناس‌ها	فرآوانی با تعداد تکرار هر اسکناس
		$1$	$\frac{4}{20} = 0.20$	$4$
		$2$	$0.15$	$3$
		$3$	$0.20$	$4$
		$4$	$0.25$	$5$
			$1$	$1$
				$20$



حال می‌خواهیم جدول بالا را به صورت سه نمودار الف، ب و ب نشان دهیم.

۱ در نمودار الف، ایندازو محور مختصات رسم می‌کنیم که محور عمودی نشان‌دهنده تعداد تکرار اسکناس‌ها، یا فراوانی اسکناس‌ها و محور افقی نشان‌دهنده نوع اسکناس‌ها باشد. در این نمودار، اسکناس‌های  $1000$  و  $5$  هزار تومانی روی هم قرار گرفته‌اند. سه اسکناس‌های  $2$  هزار تومانی را به صورت  $2$  و اسکناس‌های  $10$  هزار تومانی را به صورت  $1$  در نمودار قرارداده و آن را کامل کنید.



۲ در نمودار ب، نیز دو محور مختصات رسم می‌کنیم که محور عمودی نشان‌دهنده نسبت تکرار هر اسکناس به تعداد کل اسکناس‌ها یا فراوانی نسبی اسکناس‌ها و محور افقی نشان‌دهنده نوع اسکناس‌ها است. با رسم مستطیل‌هایی برای فراوانی نسبی اسکناس‌های  $1000$  و  $5$  هزار تومانی نمودار شکل ب را کامل کنید.

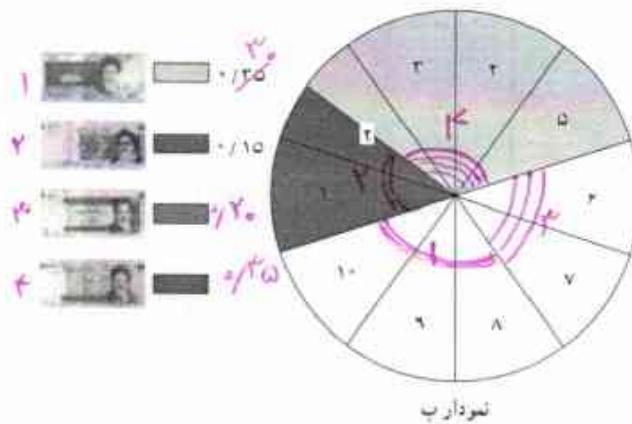
### نهاده

گروه رفیق دوره‌ی دوم متوسطه و لیگن هنرستان راهنمایی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

**۲** اگر راننده تاکسی بخواهد وضعیت تعداد اسکناس‌های خود را در یک هفته بیش‌بینی کند، کدام نمودار الف یا ب می‌تواند به او کمک کند؟ **حدوّض تواند کم کند، اما عوّض می‌نماید تراست.**

**۳** برای رسم نمودار دایره‌ای ایندا دایره را به  $10^{\circ}$  قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم که هر قسمت شان دهندۀ  $1^{\circ}$  درصد کل دایره است. سپس با استفاده از عدد مریوط به نسبت تکرار هر اسکناس به تعداد کل اسکناس‌ها یا فراوانی نسبی مریوط به اسکناس  $1^{\circ}$  هزار تومانی در ستون چهارم، قسمت اول دایره و نصف قسمت دوم دایره رنگ قرمز شده است که معادل  $15^{\circ}$  درصد کل دایره است و به طور مشابه برای اسکناس  $2$  هزار تومانی سه قسمت دایره به علاوه نصف قسمت دوم رنگ زرد می‌شود که معادل  $25^{\circ}$  درصد کل دایره است. برای اسکناس‌های  $1000$  و  $5$  هزار تومانی دایره را رنگ آبی و سبز کنید.



**داده‌ها :** واقعیت‌هایی درباره یک شیء با فردند که در محاسبه، برname ریزی و بیش‌بینی به کار می‌روند.

**متغیر :** هر ویزگی از انسیا با اشخاص، که در اعضای جامعه بکسان نیست و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند را متغیر می‌گویند و عددی که به آن ویزگی یک عضو نسبت داده می‌شود را مقدار متغیر، یا مشاهده می‌گویند.

**فراوانی یک داده :** تعداد دقیعاتی که هر داده مشاهده می‌شود را فراوانی آن داده می‌گویند.

**فراوانی نسبی یک داده :** با تقسیم فراوانی هر داده به تعداد کل داده‌ها، فراوانی نسبی آن داده بدست می‌آید. اگر فراوانی نسبی داده‌ها در  $100^{\circ}$  ضرب شود، آن گاه درصد داده‌ها بدست می‌آید.

### کاودر کلاس

در مورد اینکه مسافران یک قطار در طول سفر چگونه از وقت خود استفاده می‌کنند، تحقیقی صورت گرفته است و نتایج زیر به دست آمده است.

در شکل ت، تعداد مسافران یک قطار به عنوان متغیر گستره را ملاحظه می‌کنید.

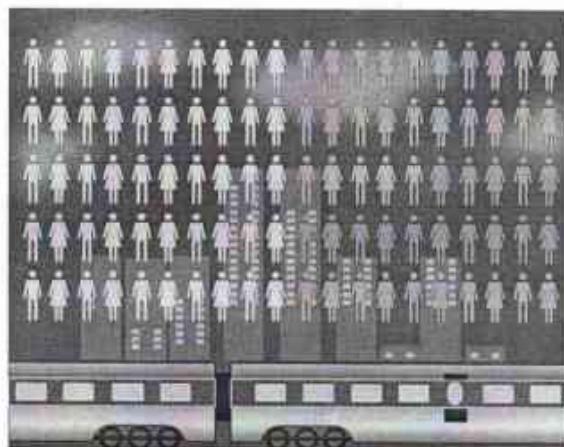
■ افرادی که با رنگ زرد مشخص شده‌اند، مسافرانی‌اند که در قطار استراحت می‌کنند. **۵۰ نفر**

■ افرادی که با رنگ نارنجی مشخص شده‌اند، مسافرانی‌اند که در قطار با تلفن همراه خود بازی می‌کنند. **۲۵ نفر**

■ افرادی که با رنگ سبز مشخص شده‌اند، مسافرانی‌اند که در قطار مطالعه می‌کنند. **۱۵ نفر**



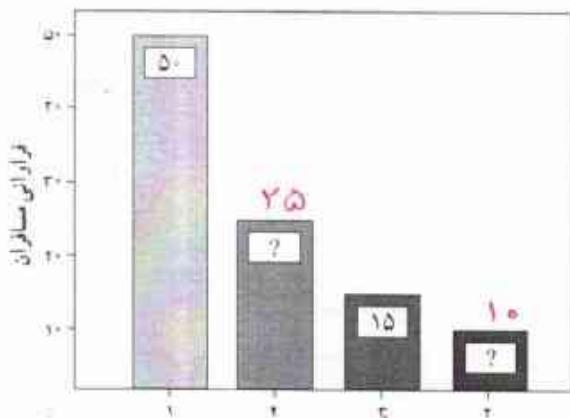
■ افرادی که بارنگ آبی مشخص شده‌اند، مسافرانی‌اند که در قطار غذا می‌خورند.



شکل

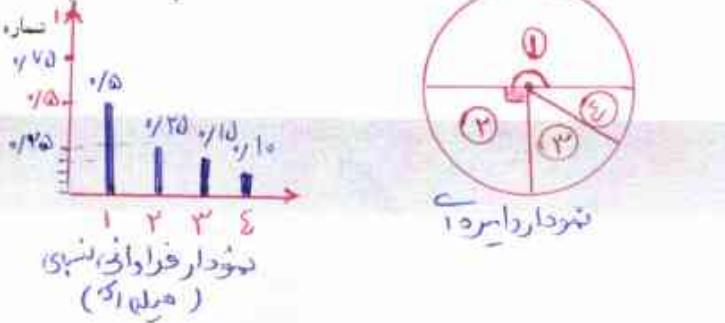
جدول فراوانی مربوط به فراوانی تعداد مسافران را کامل کنید.

مسافران قطار	تعداد کل مسافران	مسافرانی که غذا می‌خورند	مسافرانی که مطالعه می‌کنند	مسافرانی که با لنفن همراه خود یازی می‌کنند	مسافرانی که استراحت می‌کنند	فراوانی مسافران	فراوانی نسبی مسافران
۱	—	۱۰	۲	۴	۵۰	۰/۲۵	۰/۵۰
۲	—	۱۵	۳	۶	۷۵	۰/۱۵	۰/۲۵
۴	—	۲۵	۵	۱۰	۱۰۰	۰/۱۰	۰/۲۵
۵۰	۱۰۰	۵۰	۱۵	۲۵	۱۰۰	۰/۵۰	۰/۵۰



همچین نمودار مبله‌ای مربوط به فراوانی تعداد مسافران را کامل کنید.

فراوانی نسبی تعداد مسافران را براساس جدول کامل شده رسم کنید. نمودار دایره‌ای مربوط به فراوانی نسبی تعداد مسافران را رسم کنید.



سال هاست با مسئله آلودگی هوای آشنا هستیم و این مسئله به یکی از دغدغه های مهم تبدیل شده است.



شاخص کیفیت هوای (AQI)، متغیری بوسنه برای بیان کیفیت روزانه هواست. شاخص کیفیت هوای برای شش آلاینده اصلی هوای شامل مونوکسید کربن، ازن، دی اکسید گوگرد، دی اکسید نیتروز و میزان ذرات معلق در هوای سنجیده می شود.

آلاینده	تأثیر بهداشتی	منبع انتشار
O <sub>3</sub>	کاهش عملکرد ریه و افزایش علامت تنفسی مانند سرفه، تنگی نفس، تشده آسم و ساری بیماری های ریوی، افزایش استفاده از داروهای مراجعات و بهترش بیمارستانی، اورژانس و مرگ و میر زودرس	ابن آلاینده ناوله در ازو اکتشن شبیه ای ترکیبات آلی فرار و اکسید های نیتروز در حضور نور خورشید تولید می شود.
PM <sub>2.5</sub>	مواجهه کوتاه مدت با ابن آلاینده می تواند منجر به تشدید علامت بیماری های قلبی ریوی و علامت تنفسی، افزایش نیاز به استقاده از دارو و بهترش بیمارستانی گردد. مواجهه طولانی مدت عامل مرگ و میر زودرس و تشدید بیماری های قلبی و ریوی است.	ذرات معلق این آلاینده شامل احتراق سوخت (امانند سوزاندن زغال سنگ، چوب و سوخت گازل)، فرایند های صنعتی، کشاورزی و انتشار از جاده، خودروها (اگزوز، للت، لاستک و ...) می باشد.
PM <sub>10</sub>	تشدید بیماری های ریوی، افزایش مراجعات و دی اکسید نیتروز، اورژانس و افزایش آسیب به بدن و استعداد ابتلاء عقوبات های ریوی	احتراق سوخت (از وسائل نقلیه، واحد های تولید برق، صنایع، بولدها و همچنین سوزاندن چوب)
NO <sub>2</sub>	کاهش اکسیژن رسانی به بافت ها و اندام های مختلف بدن، تشدید بیماری های قلبی و درد فکه سینه، مونوکسید کربن	احتراق سوخت (به خصوص در وسائل نقلیه موتوری)
CO	تشدید آسم و افزایش علامت تنفسی، کمک به دی اکسید گوگرد	احتراق سوخت (بدویزه سوخت های با گوگرد بالا)، فرایند های تولید برق و صنایع، منابع طبیعی مانند آتشگاه
SO <sub>2</sub>	تشکل گبری و تشدید علامت و ازات بیماری های ریوی	

۱-Air Quality Index\*

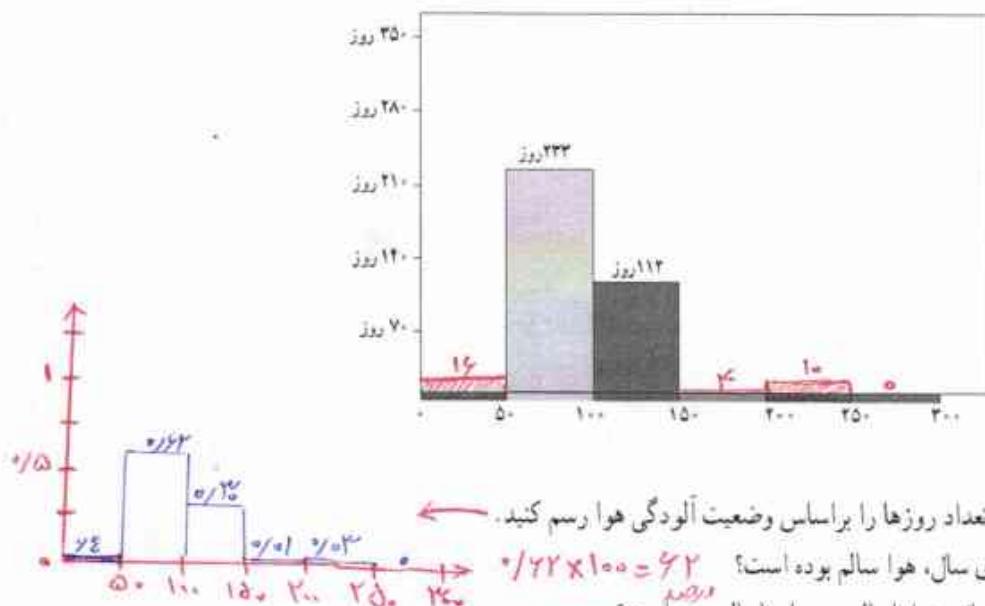
### نحوه کنترله:

گروه راهنمای فوره‌ی فنی هوسیه و اجمعن مطمان راهنمایی، استان خوزستان

اطلاعات تکمیلی و داده‌های مربوط به شاخص آلودگی هوا در سایت شرکت کنترل کیفیت هوا<sup>۱</sup> قابل دسترسی است. میزان شاخص کیفیت هوا در شهر تهران برای تمام روزهای سال ۱۳۹۲ در جدول زیر گزارش شده است. این جدول را کامل کنید:

وضعیت هوا	شاخص کیفیت هوا	فرارانی	فرارانی نسبی
باد	$\leq \text{AQI} \leq 50$	۱۶	$\frac{۱۶}{۳۶۵} = ۴\%$
سالم	$51 < \text{AQI} \leq 100$	۲۲۲	۵۲%
ناسالم برای گروه‌های حساس	$101 < \text{AQI} \leq 150$	۱۱۲	۳۰%
ناسالم	$151 < \text{AQI} \leq 200$	۴	۱%
بسیار ناسالم	$201 < \text{AQI} \leq 250$	۱۰	۲%
خطرناک	$251 < \text{AQI} \leq 300$	۰	۰%
تعداد کل روزهای یک سال	—	۳۶۵	۱

نمودار مربوط به فراوانی تعداد روزها براساس وضعیت آلودگی هوا را کامل کنید؟



- نمودار فراوانی نسبی تعداد روزها را براساس وضعیت آلودگی هوا رسم کنید.
- جند درصد از روزهای سال، هوا سالم بوده است؟  $۵۲\% = \frac{۲۲۲}{۳۶۵} \times 100$
- جند درصد روزهای سال، هوا ناسالم و بسیار ناسالم بوده است؟  $۳۰\% = \frac{۱۱۲ + ۱۰}{۳۶۵} \times 100$
- کدام نمودار، در باسیخ دادن به سوالات، مارا بهتر راهنمایی می‌کند؟

نمودار فراوانی نسبی

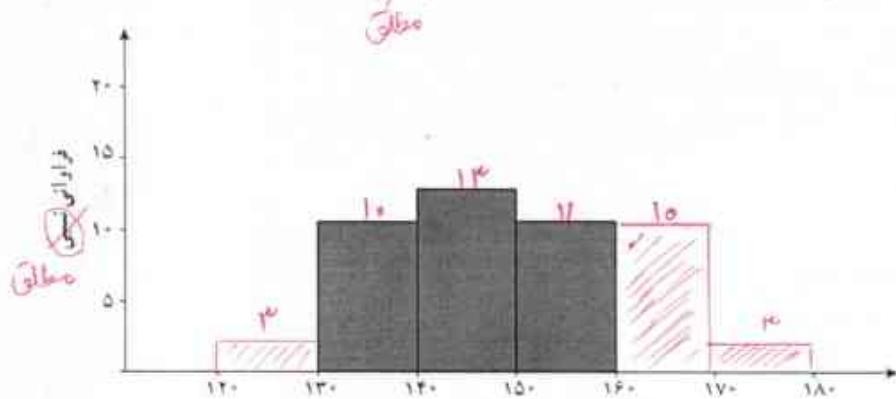
## کار در کلاس

جدول فراوانی زیر مربوط به قد (H) دانشآموز پایه یازدهم است. جاهای خالی جدول زیر را کامل کنید.



فرافرمانی	فرافرمانی	قد دانشآموزان
۰/۰۶	۳	$۱۲۰ \leq H < ۱۲۵$
۰/۲۵	۱۰	$۱۲۵ \leq H < ۱۳۰$
۰/۲۶	۱۲	$۱۳۰ \leq H < ۱۳۵$
۰/۲۲	۱۱	$۱۳۵ \leq H < ۱۴۰$
۰/۲۵	۱۰	$۱۴۰ \leq H < ۱۴۵$
۰/۰۶	۴	$۱۴۵ \leq H < ۱۵۰$
۱	۵۰	مجموع

بر اساس اعداد جدول، نمودارهای بافت نگاشت<sup>۱</sup> مربوط به فراوانی ~~نکی~~ قد دانشآموزان را کامل کنید.



قد جند درصد از دانشآموزان بین  $۱۴۰$  تا  $۱۷۰$  سانتی متر است؟ همچنین قد جند درصد از دانشآموزان بین  $۱۲۰$  تا  $۱۶۰$  سانتی متر است؟

$$۰/۰۶ + ۰/۲۵$$

$$= ۰/۲۶$$

$$۰/۰۶ + ۰/۲۵ + ۰/۲۶$$

$$۰/۰۶ + ۰/۲۵ + ۰/۲۶ = ۰/۲۶$$

سانتی متر است؟

نحوه کلته:

گروه را پس دوره‌ی دورم منوشه و انجمن هلمان را پس، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

<sup>۱</sup> Histogram

- ۱ داده‌های زیر، مسافتی را که ۲۰ راننده از مکان‌های مختلف برای رسیدن به مقصد A طی می‌کنند ت Shan می‌دهد. آین داده‌ها، در جدول زیر گردآوری شده است. جدول را کامل کرده و نمودار بافت نگاشت مربوطه را رسم کنید.



فرآوانی نسبی	فرآوانی	کیلومترهایی که توسط راننده طی شده است
۱		از ۵/۵ کیلومتر تا ۱۰/۵ کیلومتر
۲		از ۱۰/۵ کیلومتر تا ۱۵/۵ کیلومتر
۳		از ۱۵/۵ کیلومتر تا ۲۰/۵ کیلومتر
۵		از ۲۰/۵ کیلومتر تا ۲۵/۵ کیلومتر
۴		از ۲۵/۵ کیلومتر تا ۳۰/۵ کیلومتر
۲		از ۳۰/۵ کیلومتر تا ۳۵/۵ کیلومتر
۲		از ۳۵/۵ کیلومتر تا ۴۰/۵ کیلومتر
۴۰		مجموع

- ۲ رنگ چشم ۱۲۸ فرد به شرح زیر است: ۶۴ نفر قهوه‌ای، ۲۳ نفر آبی، ۳۶ نفر سبز و ۵ نفر سایر رنگ‌های است. جه نمودارهای می‌توان برای این اعداد رسم کرد. آن نمودار را رسم کنید؟

نمودار مبله‌ای  نمودار دایره‌ای  هر دو

- ۳ جملات زیر را کامل کنید:

الف) برای متغیرهای بیوسته از نمودار ..... استفاده می‌شود.

ب) برای متغیرهای گستته از نمودارهای ..... و ..... استفاده می‌شود.

ب) برای متغیرهای کمی از نمودارهای ..... و ..... استفاده می‌شود.

- ۴ گروه خونی ۵ دانش‌آموز پایه پازدهم به صورت زیر گردآوری شده‌اند:

الف) جدول فراوانی مربوط به گروه خونی این افراد را رسم کنید. ب) نمودار مبله‌ای مربوط به فراوانی و فراوانی نسبی و همچنین نمودار دایره‌ای مربوط به این افراد را رسم کنید؛ ب) جند درصد افراد، دارای گروه خونی O هستند؟



O	O	A	A	O
B	O	B	A	O
AB	B	A	B	AB
O	O	A	A	O
AB	O	A	B	A
O	A	A	O	A
O	A	O	AB	A
O	B	A	A	O
O	O	O	A	O
O	A	O	A	O

۵ اگر فراوانی نسبی مربوط به گروه خونی O،  $4/0$  باشد و مجموع فراوانی‌های همه گروه‌های خونی برابر  $20$  در نظر گرفته شود، فراوانی گروه خونی O چه عددی است؟

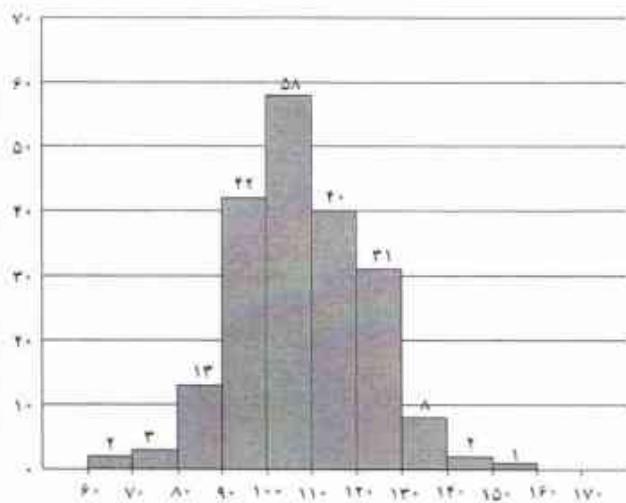
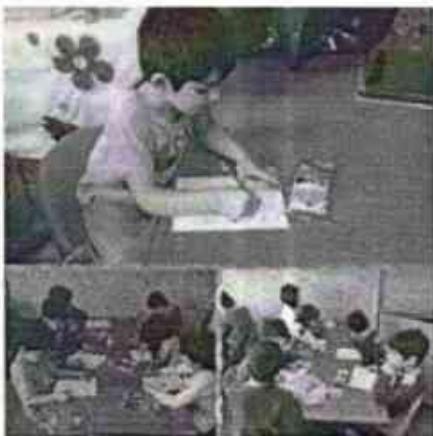
۶ نمودار بافت نگاشت نمرات IQ کودکان یک مهد کودک به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این نمودار، به سوالات زیر پاسخ دهید؟

الف) تعداد کل کودکان که نمره IQ آنها، مورد بررسی قرار گرفته است، چند نفر است؟

ب) نمره IQ در کدام رده بیشترین و در کدام رده کمترین فراوانی را دارد؟

ب) چند درصد کودکان دارای نمره IQ بین  $110$  تا  $114$  هستند؟

ت) جدول فراوانی آن را رسم کنید؟



۷ جدول فراوانی و نمودارهای مناسب مربوط به تعداد حروف بیت شعر زیر را به دست آورید؟

کبرت این همان مراد جان و تن کز زبان من حمی گوید هن

### نوبه گفته:

## گروه رفاضی دوره‌ی دوم متوسطه و انجمن معلمان رفاضی، استان خوزستان

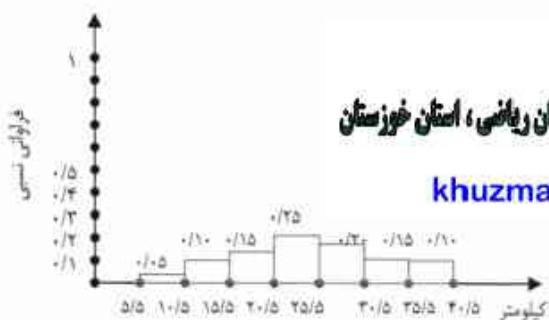
[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)

۱- این بیت شعر از کتاب گنجینه الاسرار عدان سامانی است.

## حل تمرین های صفحه ۸۱ (آمار و احتمال)

تمرین ۱ :

فراوانی نسبی	فراوانی	کیلومترهایی که توسط راننده طی شده است
۰/۰۵	۱	از ۵/۵ کیلومتر تا ۱۰/۵ کیلومتر
۰/۱۰	۲	از ۱۰/۵ کیلومتر تا ۱۵/۵ کیلومتر
۰/۱۵	۳	از ۱۵/۵ کیلومتر تا ۲۰/۵ کیلومتر
۰/۲۵	۵	از ۲۰/۵ کیلومتر تا ۲۵/۵ کیلومتر
۰/۲۰	۴	از ۲۵/۵ کیلومتر تا ۳۰/۵ کیلومتر
۰/۱۵	۳	از ۳۰/۵ کیلومتر تا ۳۵/۵ کیلومتر
۰/۱۰	۲	از ۳۵/۵ کیلومتر تا ۴۰/۵ کیلومتر
۱	۲۰	مجموع



نیمه نخست:

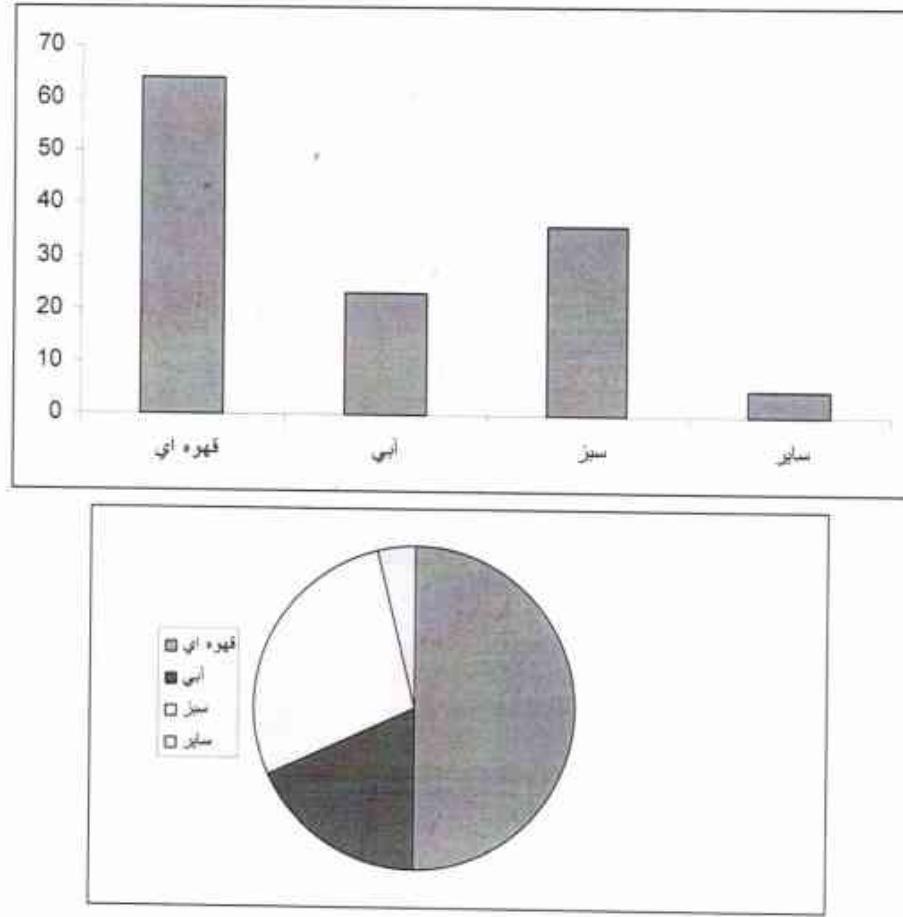
گروه رفاضی دوره دوم منوشه و اجمعن معلمان رفاضی، استان خوزستان

[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)

تمرین ۲ : از هر دو نمودار عی توان استفاده کرد. البته بهتر است که فراوانی نسبی را در ۳۶۰ درجه ضرب

نمود، که واحدها تبدیل به درجه شوند و به کمک نقاله نمودار دایره ای دقیق تری رسم نمود.

زاویه (بر حسب درجه)	فراوانی	رنگ
$A = \frac{۶۴}{۱۲۸} \times ۳۶۰ = ۱۸۰$	۶۴	قرهواره ای
$B = \frac{۲۳}{۱۲۸} \times ۳۶۰ = ۶۴/۷$	۲۳	آبی
$C = \frac{۳۶}{۱۲۸} \times ۳۶۰ = ۱۰۱/۲$	۳۶	سبز
$D = \frac{۵}{۱۲۸} \times ۳۶۰ = ۱۴/۱$	۵	سایر
۳۶۰	۱۲۸	جمع



تمرين ۳ : (الف) دایره ای و میله ای

تمرين ۳ : (ب) دایره ای و میله ای

تمرين ۳ : (الف) بافت نگار

تمرين ۴ :

گروه خونی	فراوانی	فراوانی نسبی
A	۱۸	.۰/۳۶
B	۶	.۰/۱۲
O	۲۲	.۰/۴۴
AB	۴	.۰/۰۸
جمع	۵۰	۱

رسم نمودارهاي فراوانی و فراوانی نسبی ساده است . برای نمودار دایره ای اگر زاویه‌ی را بر حسب درجه محاسبه کنیم، نمودار دقیق تری می‌توان رسم نمود.

$$f_O = .0/4 \rightarrow \frac{F_O}{20} = .0/40 \rightarrow F_O = 8$$

تمرين ۵ :

تمرين ۶ : (الف)

$$2 + 3 + 13 + 42 + 58 + 40 + 31 + 8 + 2 + 1 = 200$$

ب) بیشترین نمره‌ی IQ بین ۱۰۰ تا ۱۱۰ و کمترین نمره‌ی IQ بین ۱۵۰ تا ۱۶۰ می‌باشد.

$$\frac{2+1}{200} \times 100 = 1/5 \times 100 = 20$$

۸۲, ۲

ت) جدول فراوانی

فراوانی	حدود نمره‌ی IQ
۲	۶۰ - ۷۰
۳	۷۰ - ۸۰
۱۳	۸۰ - ۹۰
۴۲	۹۰ - ۱۰۰
۵۸	۱۰۰ - ۱۱۰
۴۰	۱۱۰ - ۱۲۰
۳۱	۱۲۰ - ۱۳۰
۸	۱۳۰ - ۱۴۰
۲	۱۴۰ - ۱۵۰
۱	۱۵۰ - ۱۶۰
۲۰۰	جمع

تمرین ۷:

فراواتی نسبی	فراواتی	حروف
۰/۰۵	۲	ک
۰/۱۰	۴	ی
۰/۰۵	۲	س
۰/۰۵	۲	ت
۰/۱۲	۵	ل
۰/۲۰	۸	ن
۰/۰۲	۱	پ
۰/۰۵	۲	ه
۰/۰۷	۳	م
۰/۰۵	۲	ر
۰/۰۵	۲	د
۰/۰۲	۱	ج
۰/۰۵	۲	و
۰/۰۵	۲	ز
۰/۰۲	۱	ب
۰/۰۲	۱	گ
۰/۰۲	۱	خ
۱	۴۱	جمع

نمودار میله‌ای و دایره‌ای می‌توانند، نمودارهای مناسبی باشند.

## تاریخچه علم آمار و علم احتمال

علم آمار تاریخچه‌ای بسیار طولانی دارد؛ منظمه‌پر آمار به صورت توصیفی اطلاعات را می‌توان سرشماری‌های که حدود ۴۰۰ سال قبل از میلاد مسیح توسط بالی‌ها و مصری‌ها و بعداً توسط امپراتوری‌های روم و ایران درباره اطلاعات مربوط به زاد و ولد و دارائی‌های افراد جامعه نیز سلطه خود انجام می‌گرفته، به حساب آورد.

در قرن ۱۴ میلادی برای محاسبه نرخ بیمه، جمع آوری اطلاعات درباره تولد و وفات و حوادث رایج شد. در اواسط قرن ۱۷ مطالعات آماری به صورت توصیفی انجام می‌گرفت. متلاکرونت با مطالعه تعداد متولدهای کشف تعدد پسرها کمی از تعداد دخترها بیشتر است، اما اسال‌های اول زندگی تعداد بیشتری از پسرها فوت می‌کنند. استفاده از علم احتمال در آمار، در اواخر قرن ۱۷ شروع شد. در این مورد می‌توان به مطالعات متدل در مورد قانون وراثت اشاره کرد.

دامنه علم آمار در اوایل قرن ۱۹ شامل جمع آوری و تحلیل داده‌ها می‌شد. لزاندر در ۱۸۵ «روش کمترین مربعات» را برای اولین بار سرح داد.

آمار مدرن در اوخر قرن ۱۹ و اوایل قرن ۲۰ بدید آمده است. گالتون و کارل بیرسون آمار را وارد جاری‌بود. دقیق ریاضیات کردند و فیشر در ابداع روش‌های مختلف «استنباط آماری» از جمله «آزمون فرض» قدم‌های مهمی برداشت.

علم احتمال عمری کوتاه‌تر از علم آمار دارد:

در اواسط قرن ۱۶ اولین کتاب احتمال توسط کاردانو با عنوان «بازی‌های شناس» نوشته شد.

در اواسط قرن ۱۷ پاسکال و فرمای اولین کسانی بودند که مطالعه احتمال را به طور علمی شروع نمودند. البته آنها کتابی در این مورد نوشته‌اند بلکه در مکاتبات خود به آنالیز ترکیبی و مسائل مربوط به علم احتمال پرداختند. هویگنس کتابی در مورد احتمال نوشت که از نظر تحلیل علمی در سطح بسیار بالاتری از کتاب کارданو قرار داشت.

یاکوب برنولی و دموآور در قرن ۱۸ کار را ادامه دادند. در قرن ۱۸ و ابتدای قرن ۱۹ علم احتمال در دانش‌های طبیعی و صنعت به طور جدی کاربرد پیدا کرد. در این دوره نخستین قضیه‌های علم احتمال یعنی قضایای لاپلاس، پواسون، لزاندر و گاووس ثابت شد.

در نیمه دوم قرن ۱۹ دانشمندان روسی تأثیر زیادی در پیشرفت علم احتمال داشتند؛ چیشف و ساگرداش، سنتله‌های لیاپونوف و مارکوف، از مسئله‌های کلی علم احتمال را حل کردند و قضایای برنولی و لاپلاس را تعمیم دادند.

در آغاز قرن ۲۰ متخصصان کارهای قبلی را منظم نموده و ساختمان اصول موضوعه احتمال را بنانمودند. در این دوره دانشمندان زیادی روی علم احتمال کار کردند اما در خشان‌ترین نام در این عرصه کولموگروف روسی است که اصول موضوع احتمال را در کتابی به نام مبانی علم احتمال در آلمان منتشر کرد.

با توجه به اینکه شکل‌گیری علم احتمال در اروپای قرن شانزدهم برای بروسی بازی‌های شناسی بوده است، بسیاری از مسائل احتمال هنوز هم به زبان بازی و سرتطبندی بیان می‌شود، در حالی که امروزه علم احتمال در بسیاری از مسائل مهندسی، برقی، اقتصادی، سیاسی، علوم انسانی و... مورد استفاده قرار می‌گیرد.

### تپه‌گذرهای

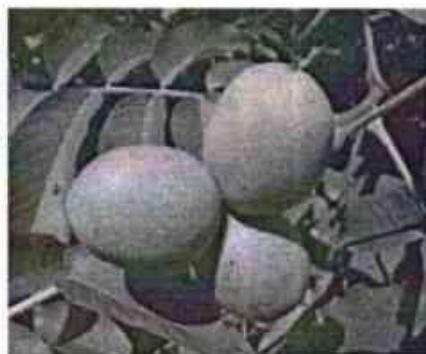
گروه رفæنی دوره‌ی دوم متode و انجمن معلم رفæنی، استان خوزستان

## درس ۲

### معیارهای گرایش به مرکز

#### الف) میانگین داده‌ها

##### فعالیت



در یک باغ، برای تعیین میزان محصولات گردو، چهار نوع درخت گردو وجود دارد که میزان محصولات انواع گردوها بر حسب تعداد به شرح زیر است:

میزان محصول گردو (تعداد)	نوع گردو	گردوبی نوع اول	گردوبی نوع دوم	گردوبی نوع سوم	گردوبی نوع چهارم
۱۰۰۰		۲۵۰۰	۲۵۰۰	۵۰۰۰	
$\bar{x} = \frac{8000 + 2500 + 35000 + 1000}{4} = 10875$					

الف) میانگین تعداد گردوی تولید شده برای این چهار نوع درخت چه تعداد است؟  
حال اگر علاوه بر داشتن اطلاعات میزان تولید گردو برای هر نوع درخت گردو، تعداد درخت‌های باغ مطابق جدول زیر مشخص شده باشند:

تعداد درخت‌ها	نوع	گردوبی نوع چهارم	گردوبی نوع سوم	گردوبی نوع دوم	گردوبی نوع اول	میزان محصول گردو برای هر درخت (تعداد)
۲		۷	۵	۲۵۰۰	۱۰۰۰	

تفیه گشته:

گروه ریاضی فرهادی فومن موسسه و انجمن علمی ریاضی، استان خوزستان

فصل سوم: آمار توصیفی

khuzmath1394@chmail.ir

ب) آیا می‌توان میانگین تعداد گردوبی تولید شده در قسمت (الف) را در این حالت به عنوان میانگین گردوبی تولید شده برای این جهار نوع درخت گردوب در نظر گرفت؟

$$x = \frac{128 + 248 + 308 + 525 + 1000 + 7230}{10 + 5 + 7 + 3} = \frac{12420}{25} = 496.8$$

ب) میانگین گردوبی تولید شده در این حالت، به چه هکلورت آست؟

مجموع داده‌ها: اگر  $n$  داده  $x_1, x_2, \dots, x_n$  داشته باشیم، مجموع آن داده‌ها را با نماد سیگما ( $\Sigma$ ) نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

و عبارت  $\sum_{i=1}^n x_i$ ، سبکمایی از  $n$  تا  $x_i$  می‌خوانیم.

**میانگین یا متوسط داده‌ها:** میانگین یا متوسط داده‌ها را با نماد  $\bar{x}$  نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

**میانگین موزون داده‌ها:** اگر  $n$  داده  $x_1, x_2, \dots, x_n$  داشته باشیم به طوری که هر یک از این داده‌ها دارای تعداد نکرار  $w_1, w_2, \dots, w_n$  هستند که به هر یک از آنها وزن داده متناظر با آن می‌گوییم. میانگین موزون داده‌ها را با نماد  $\bar{x}_w$  نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{j=1}^n w_j} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

### کار در کلاس



دانشآموزی در کنکور سراسری شرکت می‌کند و نتیجه کارنامه آزمون آن به شرح زیر است:

مواد امتحانی	ریاضیات	فرنگی	زبان فارسی	ادیات و زبان اังلیسی	زبان زندگی	دین و
درصد	۹۵	۵۲	۸۰	۶۵	۷۱	
ضریب درس	۲	۴	۱	۱	۳	۴

قویه گشته:

گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه و لیعن همان ریاضی، استان خوزستان

$$\bar{x} = \frac{71 + 60 + 80 + 62 + 95 + 100}{6} = \frac{473}{6} = 77,17$$

الف) متوسط درصد مواد امتحانی این دانش آموز بدون احتساب ضرایب مواد امتحانی چه عددی است؟

ب) متوسط درصد مواد امتحانی این دانش آموز با احتساب ضرایب مواد امتحانی را کامل کنید؟

$$\bar{x}_{\text{و}} = \frac{\sum_{i=1}^6 w_i x_i}{\sum_{i=1}^6 w_i} = \frac{4 \times 71 + 5 \times 60 + 1 \times 80 + 3 \times 62 + 2 \times 95 + 3 \times 100}{4 + 5 + 1 + 3 + 2 + 3} = \frac{282 + 195 + 80 + 182 + 380 + 300}{16}$$

$$= \frac{1291}{16} = 80,69$$

ب) کدام متوسط، مناسب است؟

## ب) میانه داده‌ها

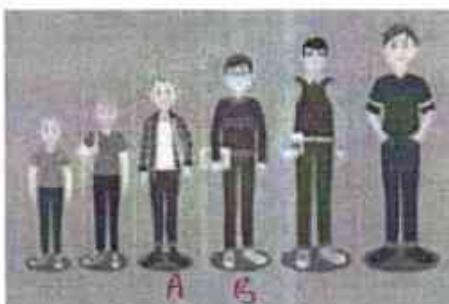
### فعالیت



سکل اف

در شکل اف افرادی را به ترتیب قد، در یک صفت مرتب کرده‌اند و داده‌های مربوط به اندازه قد آنها (برحسب سانتی‌متر)، به صورت رو به رو می‌باشد.

در شکل اف در بین پنج فرد، کدام فرد از نظر قد در وسط صفت قرار گرفته است؟ **A**



سکل ب

حال به شکل ب توجه کنید. در بین شش فرد، کدام فرد در وسط صفت قرار دارد؟

همان‌طور که مشاهده می‌شود، به راحتی نمی‌تواند عدد وسط در این حالت را بیندازد. برای به دست آوردن عدد وسط در این حالت مراحل زیر را انجام دهید:

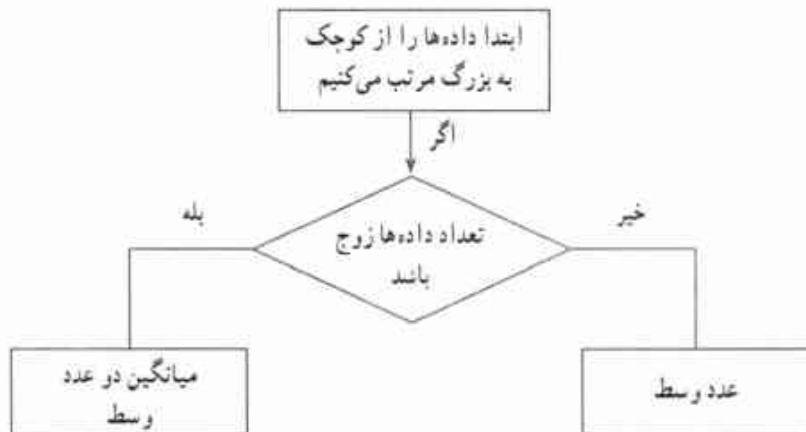
الف) دو فردی که در جایگاه وسط صفت قرار گرفته‌اند را بیندازید.

ب) میانگین این دو عدد را به عنوان عدد وسط قد این افراد به دست آورید.

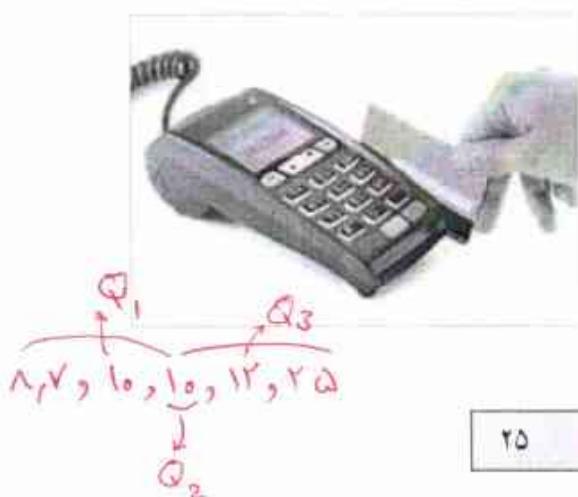
$$\frac{A+B}{2}$$

**میانه، چارک اول و چارک سوم:** عدد وسط مجموعه‌ای از داده‌های که از کوچک به بزرگ مرتب شده باشند میانه داده‌ها می‌گوییم و آن را با  $Q_1$  نشان می‌دهیم. میانه یک چهارم اول داده‌های مرتب شده را چارک اول داده‌ها گوییم و آن را با  $Q_1$  نشان می‌دهیم. همچنین میانه سه چهارم داده‌های مرتب شده را چارک سوم گوییم و آن را با  $Q_3$  نشان می‌دهیم.

## نحوه به دست آوردن میانه داده‌ها



### کار در کلاس



در یک شعبه بانک تراکنش‌های مالی بسیاری در یک روز انجام می‌گردد. یک تراکنش مالی ممکن است انتقال مبلغی از حساب پس انداز یک مشتری به حساب جاری مشتری دیگری در بک بانک باشد. این تراکنش را می‌توان به دو عملیات تقسیم کرد: پدهکار کردن حساب پس انداز یک مشتری به اندازه مبلغ مورد نظر و خلیکار کردن حساب جاری مشتری دیگر به اندازه همان مبلغ است.

(الف) فرض کنید تراکنش‌های مالی در بازه زمانی ۸ تا ۹ صبح یک شعبه بانک (به میلیون تومان) به سرح زیر گردآوری شود.

- میانه، چارک اول و سوم مربوط به تراکنش‌های مالی بر اساس داده‌های جمع‌آوری شده را مشخص کنید.
- ب) حال فرض کنید تراکنش‌های مالی دیگری در بازه زمانی ۹ تا ۱۰ صبح در همان شعبه بانک (به میلیون تومان) به سرح زیر گردآوری شود.

۲۴	۲۲	۲۰	۸۱/۷	۳۰	۷۰
----	----	----	------	----	----

- در این حالت نیز میانه، چارک اول و سوم مربوط به تراکنش‌های مالی بر اساس داده‌های جمع‌آوری شده را مشخص کنید.

$$Q_1 = ۳۰ \quad Q_3 = ۲۵$$

$$Q_2 = \frac{۳۲ + ۳۴}{۲} = ۳۳$$

$$\text{Handwritten note: } 30, 40, 45, 32, 34, 20, 70, 81.7 \rightarrow Q_3 = 25$$

**ب) مدد یا نما داده‌ها**

201

به تصاویر رویه را و توجه کنید. در شکل (الف)، (ب) و (ب) یک سری از حالت‌های صورتگ را مشاهده می‌کنید. تعداد این حالت‌ها را در شکل (الف)، (ب) و (ب) در جدول زیر کامل کنید.

به تصاویر رویه را توجه کنید. در شکل (الف)، (ب) و (پ) یک سری از حالت‌های صورت‌ک را مشاهده می‌کنید. تعداد این حالت‌ها را در شکل (الف)، (ب) و (پ) در جدول زیر کامل کنید.

نمودار صورت‌ک	نمودار صورت‌ک	نمودار صورت‌ک	نمودار صورت‌ک	نمودار صورت‌ک	نمودار صورت‌ک
۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۲	۱	۱	۲	۲
۲	۱	۱	۲	۲	۱
۳	۲	۲	۱	۱	۲
۴	۱	۱	۱	۱	۱
۵	۲	۱	۱	۱	۱
۶	۱	۱	۱	۱	۱

- در شکل الف کدام صورتک پیشتر از همه تکرار شده است؟ ①
  - در شکل ب کدام صورتک پیشتر از همه تکرار شده است؟ ②
  - در شکل پ کدام صورتک پیشتر از همه تکرار شده است؟ ③

مد نما داده‌ها: داده‌ای که بیشترین فراوانی را داشته باشد، مد نما داده‌ها نام دارد. اگر در داده‌هایی، همه داده‌ها یک فراوانی داشته باشند، آن‌گاه این داده‌ها مد ندارند. اگر در داده‌هایی، دو داده بیشترین فراوانی را داشته باشند، آن‌گاه این داده‌ها دو مد ندارند.

کار در کلاسی

در یک مسابقه پر نگار دارد، سه نفر شرکت کرده‌اند. بر اساس ۱۰ بنایی که آنها انجام داده‌اند، امتیاز‌های زیر به دست آمده است:

- مد نظر اول چه عددی است؟
  - مد نظر دوم چه عددی است؟
  - مد نظر سوم چه عددی است؟

۸	۸	۶	۱۰	۹	۵	۷	۱۰	۴	۱۰	۷	نفر اول
۷	۴	۵	۳	۲	۱	۶	۸	۹	۱۰	۴	نفر دوم
۷	۴	۵	۴	۳	۱۰	۱۰	۷	۹	۹	۶	نفر سوم

1003

*Journal of Child Abuse and Neglect* 2000, Vol. 34(1), pp. 1-10.

## میانگین، میانه و مددادهای کدام معیار را انتخاب می‌کنید؟

### کار در کلاس



دو کارخانه تولید لامپ را در نظر بگیرید. کارخانه (الف)، لامپ‌های کم مصرف و کارخانه (ب)، لامپ‌های بر مصرف تولید می‌کند. مدیر این دو کارخانه می‌خواهد در مورد طول عمر لامپ‌های تولیدی کارخانه هایشان تحقیقی انجام دهد.

بر اساس داده‌های سال‌های گذشته در کارخانه (الف) و (ب)، طول عمر پنج لامپ بر حسب ماه ثبت شده است و نتایج را به صورت زیر جمع‌آوری می‌نمایند.

لامپ انتخاب شده	نیم	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم
طول عمر لامپ تولید شده در کارخانه (الف)	۱۷	۱۵	۱۴	۱۵	۱۶	۱۶
طول عمر لامپ تولید شده در کارخانه (ب)	۱۵	۱۶	۱۶	۱۳	۱۵	۱۴

■ آیا میانگین طول عمر لامپ‌های تولید شده در کارخانه (الف)، معیار گرایش به مرکز خوبی برای طول عمر لامپ‌های تولید شده کارخانه (الف) است؟

■ بدلیل وجود لامپ‌های تولید شده با طول عمر صفر در کارخانه (ب) آیا بازهم میانگین طول عمر لامپ‌های تولید شده در کارخانه (ب)، معیار گرایش به مرکز خوبی برای طول عمر لامپ‌های تولید شده است؟ چه معیار گرایش به مرکز مناسب است؟

■ مدیر کارخانه بر اساس فروش سال گذشته، متوجه شده است که لامپ‌های کم مصرف با نور سفید در منازل مردم رایج شده است. اگر او بخواهد برای امسال لامپ‌های کم مصرف با نور سفید تولید کند، کدام معیار گرایش به مرکز، برای تعادل این لامپ‌های تولیدی به او کمک می‌کند؟

داده دور افتاده: مشاهده‌ای که تفاوت بسیار زیادی با سایر مشاهدات مجموعه داده‌ها داشته باشد، میانگین داده‌ها را تحت تأثیر قرار داده در حالی که تأثیری بر میانه و مدداده‌ها ندارد. در فعالیت مربوط به تعداد لامپ‌های تولیدی کارخانه (ب)، عدد صفر داده دور افتاده است.

در تفسیر و تحلیل مسائل آماری، در نظر گرفتن تنها یک شاخص گرایش به مرکز کافی نیست. می‌بایست هر سه معیار میانگین، میانه و مدداده شود و بر اساس هدف مورد بررسی، معیار مناسب انتخاب و از آن برای انجام تفسیر، قصارت و یعنی مورد استفاده قرار گیرد.

### نیمه‌گذشته:

گروه ریاضی دوره‌ی دوم هنرستان و انجمن هنرمندان ریاضی، استان خوزستان

درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز

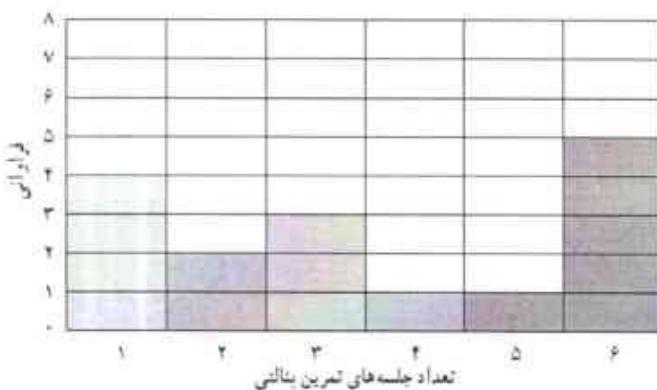
## تمرین

- ۱ تعداد حمله‌های یک تیم فوتبال در شش مسابقه گذشته به صورت ۴۸، ۴۵، ۴۵، ۴۲، ۴۴، ۴۰ است. میانگین تعداد حملات این تیم در شش بازی گذشته را به دست آورید؟
- ۲ بالاترین دما در هر یک از روزهای هفته گذشته اندازه گیری شده و نتایج زیر به دست آمده است. معدل با میانگین دما در هفته گذشته چه عددی است؟

۵۵، ۵۷، ۵۹، ۵۲، ۵۸، ۵۱

- ۳ میانه و مد هر یک از داده‌های زیر را به دست آورید؟
- (ب) ۸، ۹، ۹، ۹، ۹  
۱۵، ۸، ۳، ۱۰  
۷، ۴، ۱۲، ۷  
(ت) ۵، ۱۲، ۹، ۶، ۴

- ۴ نمودار زیر، نمودار میله‌ای مربوط به تعداد ضربات پنالتی گل شده یک بازیکن در شش جلسه تمرین بیالتی است. با توجه به نمودار، میانگین، میانه و مد تعداد ضربات گل شده را به دست آورید؟



- ۵ در جدول زیر، نمرات درس ریاضی ۱۰ دانشآموز گردآوری شده و میانگین نمرات داده شده است. علامت‌های سوال چه اعدادی‌اند؟

نمرات درس ریاضی				
۱۷/۵	۱۹	۱۷	۱۶	۲۰
۱۶	۱۵	۱۸	۱۴	۱۸

$$\text{میانگین نمرات} = ۱۵/۶۵$$

$$\text{مد نمرات} = ?$$



- ۶ داده‌های زیر مدت زمان مطالعه یک دانشآموز را در روزهای هفته نشان می‌دهد.

روزهای هفته	سبه	پنجه	دونبه	سه‌سبه	چهارشنبه	پنج‌سبه	جمع
مدت زمان مطالعه (ساعت)	۲	۱/۵	۲/۵	۱/۵	۲	۲	۱۰

این دانش آموز به طور میانگین چند ساعت در روز، در هفته گذشته مطالعه کرده است؟

۷) یک شرکت بmeye برای تعیین حق بmeye شخص ثالث در سال آینده، نمونه‌ای از خسارت‌های برداخت شده امسال را جمع‌آوری نموده است. میانگین خسارت‌های برداخت شده برابر ۸۵ میلیون ریال به دست آمده است در صورتی که میانه و مد آن برای این خسارت‌های برداخت شده برابر  $\frac{42}{2}$  میلیون ریال و عدد ۹۰ میلیون ریال می‌باشد. به نظر شما مدیر شرکت، کدام معیار گراپیش به مرکز را به منظور تعیین حق بmeye در سال آینده در نظر بگیرد تا اینکه این شرکت ضرر نکند؟

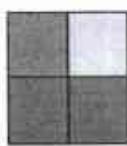
۸) دانش آموزی در کنکور سراسری شرکت می‌کند و نتیجه کارنامه آزمون آن به شرح زیر است:

مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	نیمی	زبان انگلیسی	ادبیات و زبان فارسی	دین و زندگی
درصد	۶۷	۸۰	۲۴	۶۷	؟	۵۳
ضریب درس	۳	۴	۱	۱	۲	۴

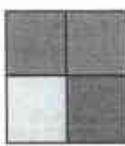
سوال امداد دارد، پل رفته امداد  
محول حوزله را به ۴۳۰ تبدیل  
کنید.

اگر معدل موزون درصد این دانش آموز  $\frac{73}{73}$  باشد، درس فیزیک را چند درصد زده است؟

۹) میانگین ۵ داده آماری ۱۷ است، اگر دو عدد ۱۷ و ۱۱ را به داده‌های قبلی اضافه کنیم، میانگین جدید چه عددی خواهد شد؟



$$\begin{pmatrix} 470 & 580 \\ 690 & 690 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 470 & 470 \\ 580 & 690 \end{pmatrix}$$

رنگ‌ها	طیف رنگ‌ها
۴۹۵ تا ۴۲۵	
۵۷۰ تا ۴۹۵	
۵۹۰ تا ۵۷۰	
۶۲۰ تا ۵۷۰	
۷۵۰ تا ۶۴۲	

۱۰) دو دانش آموز، جدول‌های چهارخانه‌ای را به صورت رو به رو رنگ‌آمیزی کرده‌اند، بر اساس جدول مربوط به طیف رنگ‌ها، جدول عددی این دو شکل به صورت رو به رو نشان داده شده است:  
حال جدول عددی مربوط به این دو شکل را ابتدا یا هم جمع و سپس هر یک از اعضای جدول عددی را به عدد ۲ تقسیم می‌کنیم.  
جدول عددی حاصل را به دست آورده و شکل مورد نظر را با توجه به جدول طیف رنگ‌ها، به دست آورید. آیا این شکل میانگین دو شکل بالا است؟

برای باسخ به این سوال، کاربرد علم آمار در علوم شناختی و مغز را مطالعه کنید. عدد مربوط به طیف رنگ‌ها در جدول موجود در حالتی نشان داده شده است.

### نوبه گشته!

کروه رفاضی دوره‌ی دوم هنرستان و اجمعن هنرستان ریاضی، استاد فوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

## حل تمرین های صفحه‌ی ۹۰ (آمار و احتمال)

تمرین ۱ :

$$\bar{x} = \frac{48 + 45 + 44 + 45 + 42 + 43}{6} = \frac{267}{6} = 44.5$$

تمرین ۲ :

$$\bar{x} = \frac{55 + 27 + 29 + 32 + 28 + 31 + 29}{7} = \frac{221}{7} = 31$$

تمرین ۳ : برای محاسبه‌ی میانه، ابتدا داده را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

الف) مد برابر ۹ و میانه برابر ۹  
ب) مد ندارد. میانه برابر ۵۰

ج) مد برابر ۷ و میانه برابر ۱۷/۵  
ت) مد ندارد. میانه برابر ۶

تمرین ۴ : داده‌ها را تعداد ضربات پنالتی را در هر جلسه در نظر گرفتیم.

شماره جلسه	تعداد ضربات پنالتی گل شده
۱	۴
۲	۲
۳	۳
۴	۱
۵	۱
۶	۵
جمع	۱۶

$$\bar{x} = \frac{16}{6} = 2.666\ldots \text{ میانگین}$$

$$5, 1, 3, 2, 2, 1 \rightarrow \bar{x} = Q_3 = \frac{2+3}{2} = 2.5 \text{ میانه}$$

$$\hat{x} = 1 \text{ مد}$$

تمرین ۵ :

$$\bar{x} = 15/65 \rightarrow \frac{17/5 + 19 + 17 + 16 + 20 + 16 + 15 + 18 + a + 18}{10} = 15/65$$

$$\rightarrow \frac{a + 156/5}{10} = 15/65 \rightarrow a + 156/5 = 156/5 \rightarrow a = \dots$$

نحوه کشیده:

گروه ریاضی دوره‌ی دوم فوزستان و انجمن معلمان ریاضی، استان فوزستان

$$\hat{x} = 18, 16 \text{ مد نمرات}$$

khuzmath1394@chmail.ir

### تمرین ۶ :

$$\bar{x} = \frac{۲ + ۱/۵ + ۲/۵ + ۱/۵ + ۲ + ۳ + ۳}{۷} = \frac{۱۵/۵}{۷} = ۲/۲۱$$

تمرین ۷ : برای اینکه شرکت بیمه کننده ، ضرر نکند، میانگین مناسب است. ولی برای شخص بیمه شده ، شاید میانه مناسب تر باشد.

تمرین ۸ : گیریم که درصد فیزیک برابر  $k$  باشد، در این صورت: (اگر میانگین موزون به ۶۳ تبدیل شود.)

$$\bar{x} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} \rightarrow \frac{(۴)(۵۳) + (۳)(k) + (۱)(۶۷) + (۱)(۳۴) + (۴)(۸۰) + (۳)(۶۷)}{۴ + ۳ + ۱ + ۱ + ۴ + ۳} = ۶۳$$

$$\rightarrow \frac{۲۱۲ + ۳k + ۶۷ + ۳۴ + ۳۲۰ + ۲۰۱}{۱۶} = ۶۳ \rightarrow ۸۳۴ + ۳k = ۱۰۰۸$$

$$\rightarrow ۳k = ۱۷۴ \rightarrow k = ۵۸$$

### تمرین ۹ :

تعداد داده های قبلی  $n = ۵$

$$\text{مجموع داده های آماری قبلی} \quad \sum x_i = n\bar{x} = ۵ \times ۱۷ = ۸۵$$

نیمه کننده:

$m = n + ۲ = ۷$  تعداد داده های جدید

گروه ایالتی فرهنگ و ارشاد اسلامی، اسلام خوزستان

[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)

$$\text{مجموع جدید داده های آماری} \quad \sum y_i = ۸۵ + ۱۷ + ۱۱ = ۱۱۳$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{m} = \frac{۱۱۳}{۷} = ۱۶/۱۴ \quad \text{میانگین داده های جدید}$$

### تمرین ۱۰ :



$$\begin{pmatrix} ۴۷۰ & ۵۸۰ \\ ۶۹۰ & ۶۹۰ \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} ۴۷۰ & ۴۷۰ \\ ۵۸۰ & ۶۹۰ \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{cc} \frac{۴۷۰ + ۴۷۰}{۲} & \frac{۵۸۰ + ۴۷۰}{۲} \\ \frac{۶۹۰ + ۵۸۰}{۲} & \frac{۶۹۰ + ۶۹۰}{۲} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} ۴۷۰ & ۵۲۵ \\ ۶۳۵ & ۶۹۰ \end{pmatrix}$$



۹۱، ۲

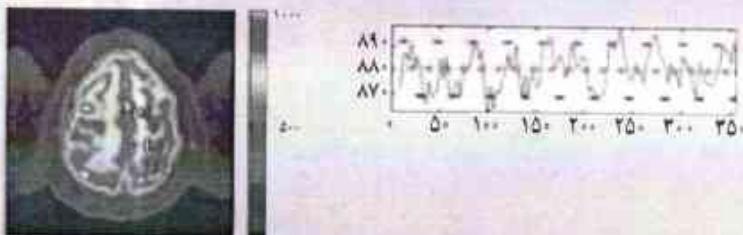
## کاربرد علم آمار در علوم شناختی و مغز

### تفسیر تصاویر مغزی

در شکل زیر با میانگین تصویر مغزی «۱» فرد آشنا می‌شویم.



این تصویر از شکل زیر، برشی از یک تصویر مغزی است. رنگ قرمز نشان دهنده ناحیه‌ای است که در آن فشار خون بالایی وجود دارد. این ناحیه که مشکوک به وجود تومور است با استفاده از علم آمار شناسایی و محل تومور حدس زده می‌شود. به عنوان مثال، نقطه «۱» به عنوان نقطه‌ای شناخته می‌شود که با احتمال بالایی محل قرار گرفتن تومور است، ولی نقاط «۲» و «۳» به رغم داشتن فشار خون بالا، محل تومور نیستند.



## درس ۳ معیارهای پراکندگی

### ۱- انحراف معیار و واریانس داده‌ها

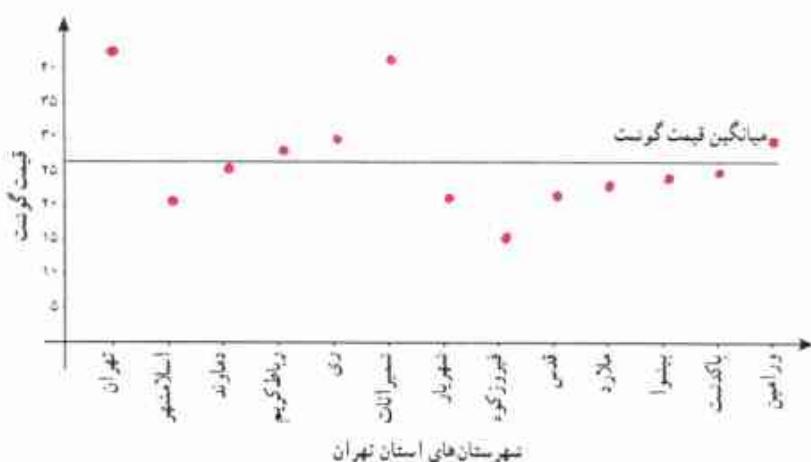
#### فعالیت



در اقتصاد هر کشوری شاخصی تحت عنوان نرخ توزم، نفس بسیار مهمی را ایفا می‌کند. یکی از افلام مصرفی مورد نیاز در محاسبه نرخ توزم در یک کشور، قیمت گوشت قرمز است. در جدول رویه‌رو قیمت گوشت قرمز در سال ۱۳۹۵ در شهرستان‌های استان تهران گردآوری شده است.

■ میانگین قیمت گوشت قرمز در شهرستان‌های استان تهران را به دست آورید؟  $\bar{x} = 25,23$

■ درنمودار زیر، میانگین قیمت گوشت قرمز در شهرستان‌های استان تهران نشان داده شده است. قیمت گوشت قرمز در هر یک از شهرستان‌های استان تهران را با کشیدن نقطه روی نمودار مشخص کنید.



$$\text{میانگین قیمت گوشت} = \bar{x} = \frac{۳۲۸}{۱۳} = 25,23$$

## ۵ نکله - حجع کلام

- ۱** چند نقطه بالای خط قرمز، چند نقطه بین خط قرمز و چند نقطه روی خط قرمز قرار دارند؟
- ۲** منظور از برآندگی قیمت گوشت قرمز یعنی اینکه قیمت گوشت قرمز در هریک از شهرستان‌های استان تهران چقدر از میانگین قیمت دورتر است. هر چقدر نقاط با همان قیمت گوشت قرمز در هریک از شهرستان‌های استان تهران حول خط قرمز با همان میانگین قیمت گوشت قرمز نزدیک‌تر باشند، نشان دهنده جیست؟ هر چقدر دورتر باشند چطور؟ **برآندگی نقطه‌ها**
- ۳** معیاری را برای اندازه‌گیری برآندگی قیمت گوشت قرمز با همان نقاط حول خط قرمز می‌توانید معرفی کنید؟

### انحراف معیار

دیدیم برآندگی قیمت گوشت قرمز یعنی اینکه قیمت گوشت قرمز در هریک از شهرستان‌های استان تهران چقدر از میانگین قیمت دورتر است. برای معرفی معیار مناسب بک راه حل ابتدایی این است که تک نک قیمت‌های را از میانگینشان کم کیم. این تفاضل‌های را انحراف از میانگین می‌نامیم. مجموع انحراف از میانگین‌ها برابر با صفر خواهد شد و این به دلیل آن است که برخی از داده‌ها از میانگین بزرگ‌تر و برخی دیگر کوچک‌ترند در نتیجه مقادیر مثبت و منفی حاصل می‌شوند که مجموع آنها همچویر را ختنی می‌کنند. برای رفع این مشکل، قدر مطلق انحراف از میانگین داده‌ها در نظر گرفته می‌شود. میانگین این مقادیر می‌تواند معیاری برای سنجش برآندگی داده‌ها باشد، اما کار کردن با قدر مطلق کار آسانی نیست. از این‌رو، توان دوم انحراف از میانگین داده‌ها در نظر گرفته می‌شود.

در آمار، بک معیار سنجش برای میزان برآندگی داده‌ها حول میانگینشان، انحراف معیار است.

انحراف معیار به صورت زیر محاسبه می‌شود:

انحراف معیار داده‌ها: اگر  $n$  داده از جامعه به صورت  $x_1, x_2, \dots, x_n$  داشته باشیم، انحراف آنها را با نماد  $\sigma$  نشان می‌دهیم، که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

که در آن  $\bar{x}$  را انحراف داده‌نام از میانگین داده‌ها می‌گویند.

واریانس داده‌ها: توان دوم انحراف معیار داده‌ها را واریانس داده‌ها گویند و آن را با نماد  $s^2$  نشان می‌دهیم.

اگر انحراف معیار مجموعه داده‌ها عدد کوچکی باشد، بدین معناست که برآندگی داده‌ها حول میانگینشان کم و در نتیجه داده‌ها به هم نزدیک‌تر است و اگر انحراف معیار مجموعه داده‌ها عددی بزرگ باشد، بدین معناست که برآندگی داده‌ها حول میانگینشان زیاد و در نتیجه داده‌ها از هم دورتر است.

**نمایسته است که ابتدا واریانس تعریف شود و پسین به لحاظ آن تعریف انحراف معیار کنید و سواد.**



## کار در کلاس

انحراف معیار و واریانس مربوط به داده‌های قیمت گوشت قرمز در شهرستان‌های تهران را می‌توانید با تکمیل جدول رویه را محاسبه کنید.

$$\bar{x} = 20 \quad \text{قرار می‌دیم}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum \omega}{n} = \omega \sum, 23$$

$$\sigma = \sqrt{\omega \sum, 23} = \sqrt{136} = 11.6$$

$(x_i - \bar{x})^2$	$x_i - \bar{x}$	قیمت گوشت قرمز
۲۸۹	$22 - 20 = 2$	۲۲
۲۰	$20 - 20 = 0$	۲۰
$\sum (x_i - \bar{x})^2$	$20 - 20 = 0$	۲۵
$= 136$	$24 - 20 = 4$	۲۶
	$27 - 20 = 7$	۲۷
۲۲۰	$20 - 20 = 0$	۲۰
۲۰	$20 - 20 = 0$	۲۰
۱۶	$14 - 20 = -6$	۱۶
۲۰	$20 - 20 = 0$	۲۰
۱۶	$21 - 20 = 1$	۲۱
۹	$22 - 20 = 2$	۲۲
۴	$23 - 20 = 3$	۲۳
۱	$26 - 20 = 6$	۲۶
۱۱.۶		$\sigma$
۱۳۶		$\sigma^2$

## خواندنی

### نرخ تورم

در علوم اقتصادی با استفاده از علم آمار، ساخته شده نتیجه نرخ تورم بیان می‌شود. نرخ تورم، در صد غیر سطح قیمت مجموعه کالاهای مصرفی مانند خوراک و بوشک و کالاهای خدماتی مانند مسکن، آب و برق خانوارها در طول زمان را اندازه می‌گیرد.

فرض کنید متوسط قیمت مجموعه کالاهای مصرفی یک خانوار در سال  $a$ ,  $P_a$  و متوسط قیمت همان مجموعه کالاهای مصرفی در سال  $a-1$ ,  $P_{a-1}$  باشد. در این صورت نرخ تورم در طی سال  $a$  به صورت زیر به دست می‌آید:



$$\frac{P_a - P_{a-1}}{P_{a-1}} \times 100\% = \text{نرخ تورم}$$

به عنوان مثال، اگر متوسط قیمت گوشت قرمز به عنوان کالای مصرفی در سال  $a-1$  و  $a$  به ترتیب، ۲۸ و ۲۲ هزار تومان برای هر کیلو باشد. در این صورت نرخ تورم برای قیمت گوشت قرمز در سال  $a$  برابر:

$$\frac{(32 - 28)}{28} \times 100 = 14\%$$

فیلم کننده:

گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه و آنچه معلمان ریاضی، استان فوزستان

بعنی متوسط قیمت گوشت فرمز در سال ۱۴۰۰ درصد نسبت به سال گذشته افزایش یافته است.

لازم به ذکر است هر چقدر نرخ توزم افزایش باید، قدرت خرید مردم کاهش بدها می‌کند. همچنین مرکز آمار ایران برای محاسبه نرخ توزم در یک سال، متوسط قیمت ۱۰۰ قلم کالای گروه خوراکی‌ها و آنسامبلی‌ها و ۲۵۹ قلم کالای خدماتی برای سال جاری و سال قبل آن در نظر گرفته و این نرخ را محاسبه می‌کند.



## ۲- ضریب تغییرات داده‌ها

### فعالیت



بکی از شاخص‌های کیفیت در لاستیک‌های تولید شده اتومبیل توسط یک کارخانه، طول عمر آن لاستیک‌هاست. هر چقدر متوسط طول عمر لاستیک‌های تولیدی بیشتر و انحراف معیار طول عمر لاستیک‌ها کمتر باشد، به این معناست که لاستیک‌ها کیفیت بالایی از نظر طول عمر دارند.

حال با توجه به مطالب گفته شده، به بررسی کیفیت لاستیک‌های تولیدی از نظر طول عمر دو کارخانه (الف) و (ب) می‌پردازم. براساس داده‌های به دست آمده میانگین طول عمر لاستیک‌ها در دو کارخانه و انحراف معیار آنها به شرح جدول رو به رو است:

- تما ترجیح می‌دهید از کدام کارخانه لاستیک بخرید؟
- آیا می‌توان براساس میانگین و انحراف معیار و نمونه‌های در نظر گرفته شده قضاوت کرد؟

### نظر کارخانه الف مایل توانست.

برای پاسخ به سؤالات فوق نیاز به معرفی معیار جدیدی برای سنجش برآکندگی داده وجود دارد. این معیار را ضریب تغییرات داده‌ها می‌نامند.

ضریب تغییرات داده‌ها: معیاری است که از تقسیم انحراف معیار داده‌ها ( $s$ ) به میانگین داده‌ها ( $\bar{x}$ ) به دست می‌آید و آن را با نعاد  $CV$  نشان می‌دهند.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

هر قدر ضریب تغییرات کمتر باشد، میزان برآکندگی داده‌ها کمتر خواهد شد که این موضوع برای ما مطلوب است.

## کار در کلاس

(الف) با کامل کردن جدول زیر، ضریب تغییرات مربوط به طول عمر دو کارخانه را محاسبه کنید.

کارخانه	میانگین	انحراف معیار	ضریب تغییرات
کارخانه الف	۵۴۰۰۰ کیلومتر	۵ کیلومتر	۰/۰۰۰۹
کارخانه ب	۶۵۰۰۰ کیلومتر	۱۰۰ کیلومتر	۰/۰۰۱۵

محصولات کدام کارخانه را انتخاب می کنید؟ «الف»

ب) حال با تغییر واحد اندازه گیری در جدول قبلی میانگین و انحراف معیار طول عمر لاستیک ها در دو کارخانه (الف) و (ب) به صورت زیر گزارش داده شده است.

کارخانه	میانگین	انحراف معیار	ضریب تغییرات
کارخانه الف	۵۴۰۰۰ متر	۵ متر	۰/۰۰۰۹
کارخانه ب	۶۵۰۰۰ کیلومتر	۱۰۰ کیلومتر	۰/۰۰۱۵

همان طور که ملاحظه می کنید میانگین و انحراف معیار لاستیک ها برای کارخانه (الف) بحسب واحد اندازه گیری متر و برای کارخانه (ب) بحسب کیلومتر است. در این حالت نیز ضریب تغییرات را در جدول زیر محاسبه کنید. آیا ضریب تغییرات به واحد اندازه گیری وابسته است؟ خیر، بستگی ندارد.

## نمودار جعبه ای

در ابتدای این درس با معیارهای پراکندگی آشنایی نداشیم، حال می خواهیم با استفاده از نمودارهای آماری، معیارهای پراکندگی داده ها را به صورت تصویری نشان دهیم.

## فعالیت

میزان بارش برف سالانه در دو پیست اسکی «الف» و «ب» برای هفت سال اندازه گیری و نتایج، در جدول زیر گردآوری شده است:

سال	۱۳۸۸	۱۳۸۹	۱۳۹۰	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳	۱۳۹۴	میزان بارش برف در پیست اسکی الف
۵۵۱	۱۹۰	۳۲۵	۷۸۷	۴۷۲	۷۲۸	۸۲۵	۵۵۱	۵۵۱
میزان بارش برف در پیست اسکی ب	۲۷۱	۰	۵۲۵	۱۰۶	۹۳	۵۸۱	۵۶۶	۲۷۱

عدد ۰ در جدول به این معناست که میزان بارش کمتر از ۱ سانتی متر است.

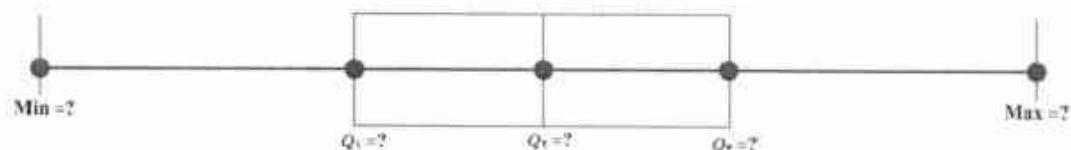
برای رسم نمودار آماری، مراحل زیر را انجام دهد.

کمترین مقدار Min	میزان بارش برف Q <sub>1</sub>	میانه Q <sub>2</sub>	چارک سوم Q <sub>3</sub>	بیشترین مقدار Max	سال
۱۹.۰	۳۳۵	۵۵۱	۷۸۷	۸۲۵	یست اسکی الف

ب) حال مقادیر جدول را روی یک محور نمایش می‌دهیم.



ب) برای مشخص کردن حدود دامنه میان چارکی (IQR) یک جعبه به عرض دلخواه رسم می‌کیم، سپس با استفاده از یک خط، میانه را در جعبه مشخص می‌کنیم و در انتهایها، از دو طرف جعبه به کمترین و بیشترین مقدار داده‌ها دو خط رسم می‌کنیم.

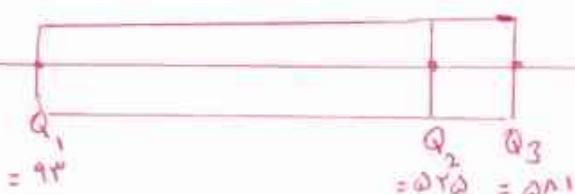


به این نمودار، نمودار جعبه‌ای می‌گوییم. در این نمودار چارک اول، میانه، چارک سوم، بیشترین و کمترین مقدار داده‌ها به طور همزمان نشان داده می‌شود.

**کار در کلاس**

نمودار جعبه‌ای مربوط به پیست «ب» را رسم کنید. و سپس با نمودار جعبه‌ای پیست «الف» مقایسه کنید.

اگر داده دورافتاده‌ای در داده‌ها باشد، نمودار جعبه‌ای چه تغییری می‌کند؟ **کشیده**، **سرمه** شود، (یا **از بزرگتر**)



با مقادیری این نمودار با نمودار «الف» مقایسه شود. در نمودار «ب» بیشتر دارد.

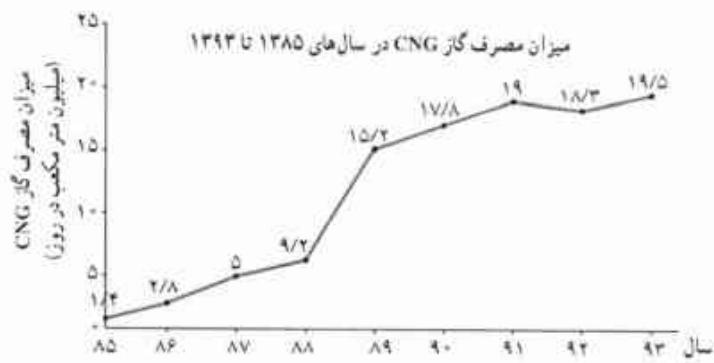
فرض کنید سه افرادی که در یک روز سوار اتوبوس شده‌اند، به صورت زیر است:

۲۲.۵۹، ۲۶.۵۳، ۷۴.۱۷، ۴۵.۲۲، ۶۴.۵، ۶۱

انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات سه افراد را به دست آورید.



نمودار زیر میزان مصرف گاز CNG را از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۲ نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات میزان مصرف گاز CNG از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۲ را به دست آورید.



کتاب  
لرن

انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای هر یک از اعداد جدول زیر به دست آورید.

اعداد	ضریب تغییرات	انحراف معیار	واریانس	CNG
۱۰۰، ۱۲۰، ۸۰، ۱۰۰، ۴۰، ۷	-۰.۲، ۰.۲، ۰.۰، -۰.۰، -۰.۰، -۰.۰	۱۰/۱۱، ۱۱/۳۶، ۱۰/۱۱	۱۱/۳۶، ۱۱/۳۶، ۱۰/۱۱	۱۰/۱۱، ۱۱/۳۶، ۱۰/۱۱
۳۰۰، ۱۰۰، ۰، -۳۰۰، -۲۰۰، -۱	۰/۸۸، ۰/۴۲، ۰/۷۶، ۰/۶۲	۰/۸۸، ۰/۴۲، ۰/۷۶، ۰/۶۲	۰/۸۸، ۰/۴۲، ۰/۷۶، ۰/۶۲	۰/۸۸، ۰/۴۲، ۰/۷۶، ۰/۶۲
۲۰۰۰۰، ۲۵۰۰۰، ۲۰۰۰۰				

اعداد دلخواه را در جدول زیر بنویسید و انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای هر یک از اعداد به دست آورید.

اعداد	انحراف معیار	واریانس	ضریب تغییرات

### آنها

۵ اگر ضریب تغییرات ۱ = داده ۲ باشد و میانگین آن  $\bar{x}$  واریانس داده‌ها را به دست آورید.

۶ اگر  $n$  داده را  $c$  برابر کنیم ضریب تغییرات داده‌ها چند برابر می‌شود؟

۷ فرض کنید ۲۲ بونه گل قرمز را انتخاب و تعداد گل‌های هر بونه را شمرده‌ایم و نتایج زیر به دست آمده است:

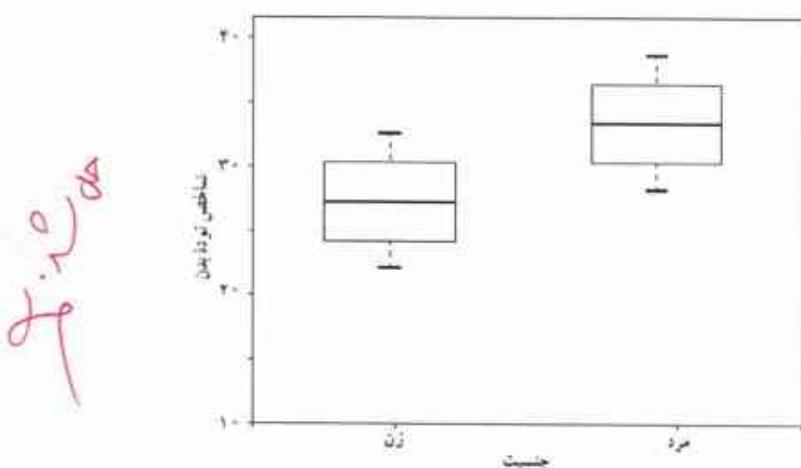
۷, ۴, ۳, ۸, ۶, ۴, ۱, ۷, ۴, ۲, ۱, ۱, ۱, ۳, ۲, ۲, ۵, ۵, ۷, ۲

نمودار جعبه‌ای را برای این داده‌ها رسم کنید.

۸ نمودار جعبه‌ای مربوط به شاخص توده بدن (BMI) به تفکیک جنسیت رسم شده است. این نمودار را تفسیر کنید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) میانگین شاخص توده بدن در خانم‌ها بیشتر است یا آقایان؟

ب) میزان برآکندگی شاخص توده بدن در خانم‌ها بیشتر است یا آقایان؟



۹ داده‌های زیر مربوط به نرخ بیکاری یک کشور در ده سال گذشته است:

سال	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم
نرخ بیکاری	۱۱/۵	۱۱/۳	۱۰/۵	۱۰/۴	۱۱/۸	۱۲/۵	۱۲/۳	۱۲/۲	۱۰/۴	۱۰/۱

نمودار جعبه‌ای این داده‌ها را رسم کنید.

## حل تمرین های صفحه‌ی ۹۹ (آمار و احتمال)

: ۱

$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
۳۲	-۱۴	۱۹۶
۵۹	۱۳	۱۶۹
۲۶	-۲۰	۴۰۰
۵۳	۷	۴۹
۷۴	۲۸	۷۸۴
۱۷	-۲۹	۸۴۱
۴۵	-۱	۱
۲۳	-۲۳	۵۲۹
۶۴	۱۸	۳۲۴
۵۰	۴	۱۶
۶۱	۱۵	۲۲۵
جمع = ۵۰۴	---	۳۵۳۴

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{504}{11} = 45.81 \approx 46 \quad \text{میانگین}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{3534}{11} = 321/27 \quad \text{واریانس}$$

$$\sigma = \sqrt{321/27} = 18/0.9 \quad \text{انحراف میکار} \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{18/0.9}{46} = .39 \quad \text{ضریب تغییرات}$$

: ۲

سال	$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
۸۵	۱/۴	-۱۰/۶	۱۱۲/۳۶
۸۶	۲/۸	-۹/۲	۸۴/۶۴
۸۷	۵	-۷	۴۹
۸۸	۹/۲	-۲/۸	۷/۸۴
۸۹	۱۵/۲	۳/۲	۱۰/۲۴
۹۰	۱۷/۸	۵/۸	۳۳/۶۴
۹۱	۱۹	۷	۴۹
۹۲	۱۸/۲	۶/۳	۳۶/۶۴
۹۳	۱۹/۵	۷/۵	۴۹/۲۵
جمع	۱۰۸/۲	---	۴۴۲/۶۶

نحوه کشند:

گروه ریاضی دوره دوم همراه با انجمن ملیان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{108/2}{9} = 12/0.2 \approx 12$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{442/664}{9} = 49/18$$

$$\sigma = \sqrt{49/18} = 7/0.1$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{7/0.1}{12} = 0.58$$

\*\*\*

: ۳

ضریب تغییرات	انحراف معیار	واریانس	میانگین	اعداد
1/42	21/86	1015/39	22/42	100 و 4 و 16 و 8 و 12 و 10 و 7
نامعین	1/87	3/50	.	-1 و -2 و -3 و 0 و 0 و 1 و 2 و 3
0.06	0.059	0.025	10/0.4	9/88 و 9/42 و 9/76 و 9/62 و 10/11 و 11/36 و 11/11 و 10/11
0.61	1137/98	1295000/75	1875/5	2000 و 2500 و 3000 و 2 و 3

\*\*\*

: ۴

ضریب تغییرات	انحراف معیار	واریانس	میانگین	اعداد
.	.	.	7	7 و 7 و 7 و 7 و 7
0.42	1/95	3/84	4/6	3 و 7 و 3 و 7 و 3
0.60	4/24	18	7	1 و 4 و 7 و 10 و 13
نامعین	2/28	5/20	.	-3 و 2 و 0 و 2 و 3

\*\*\*

( ذکر تعداد داده ها ، لازم نیست.)

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow 2 = \frac{\sigma}{4} \rightarrow \sigma = 8 \rightarrow \sigma^2 = 64$$

: ۵

$$y_1 = cx_1 \text{ و } y_2 = cx_2 \text{ و } y_3 = cx_3 \text{ و } \dots \text{ و } y_n = cx_n$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{\sum cx_i}{n} = \frac{\sum cx_i}{n} = \frac{c \sum x_i}{n} = c\bar{x}$$

100٪

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{\sum (cx_i - c\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum c^2(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{c^2 \sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = c^2 \sigma_x^2$$

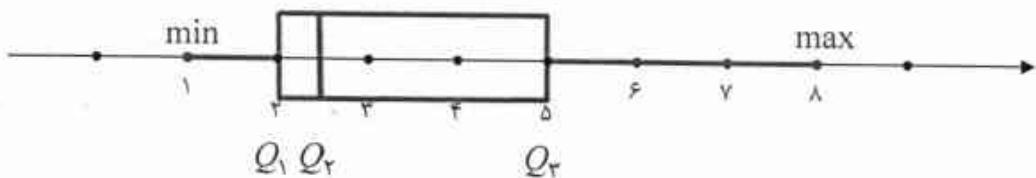
$$\rightarrow \sigma_y = |c| \sigma_x$$

$$CV_y = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} = \frac{|c| \sigma_x}{c\bar{x}} = \pm \sigma_x$$

: ۷

$$\boxed{1 \text{ و } 1 \text{ و } 1 \text{ و } 2 \text{ و } 2 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } 3 \text{ و } 4 \text{ و } 4 \text{ و } 5 \text{ و } 5 \text{ و } 6 \text{ و } 7 \text{ و } 7 \text{ و } 8}$$

$$\min = 1, Q_1 = 2, Q_2 = \frac{2+3}{2} = 2.5, Q_3 = 5, \max = 8$$



: ۸

الف) با توجه به نمودار، میانگین شاخص تودهی بدنی در آفایان بیشتر است.

ب) به نظر من رسید، پراکندگی یکسان است.

: ۹

$$\boxed{10/1 \text{ و } 10/2 \text{ و } 10/4 \text{ و } 10/5 \text{ و } 11/3 \text{ و } 11/5 \text{ و } 11/9 \text{ و } 12/2 \text{ و } 12/3 \text{ و } 13/5}$$

$$\min = 10/2, Q_1 = 10/5, Q_2 = \frac{11/5 + 11/9}{2} = 11/7, Q_3 = 12/2, \max = 13/5$$



نحوه کشیده:

گروه رفته‌ی دوم متوجه و اتفاق مطلعان روانی، استثن خورستان

[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)

## فرخ بیکاری

امروزه بیکاری یکی از موضوعات مهم در جوامع بشری است که دولتمردان و سیاست‌گذاران تمامی کشورهای جهان به دنبال راهکارهایی برای از بین بردن این مسئله در کشورشان و فراهم کردن زمینه‌ای برای به کار گیری استعدادهای مردم کشورشان هستند. در علوم اقتصادی با استفاده از علم آمار، ساختهای تحت عنوان نرخ بیکاری بیان می‌شود. نرخ بیکاری، به صورت زیر تعریف می‌شود.



$$\frac{\text{جمعیت بیکار}}{\text{کل جمعیت فعل}} = \text{نرخ بیکاری}$$

جمعیت بیکار به افراد ۱۰ ساله و یا بالاتر از ۱۰ ساله‌ای گفته می‌شود که سه شرط زیر را توان آمادانه باشند:

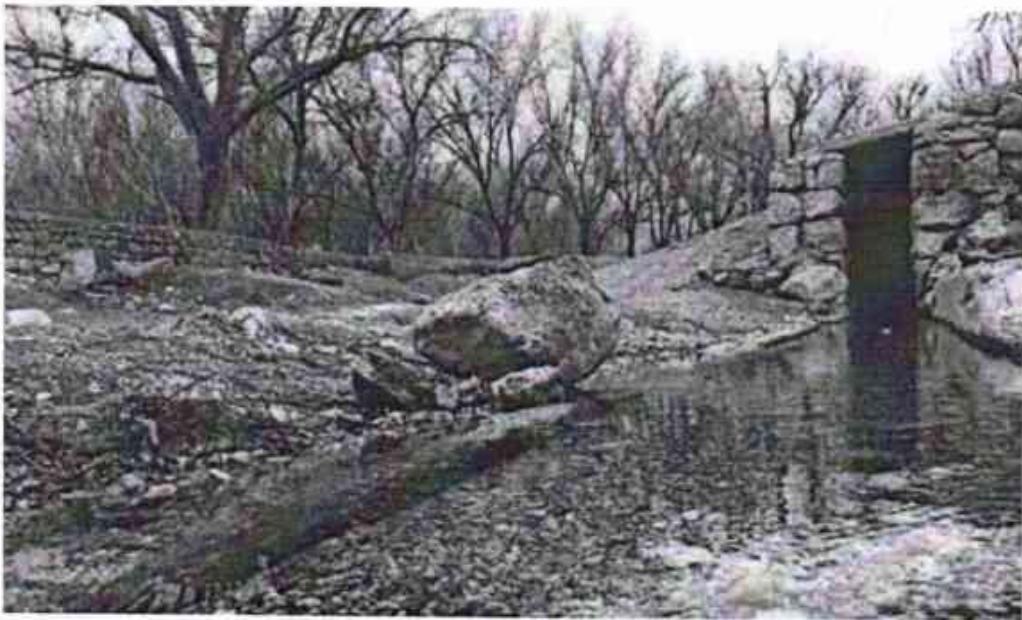
- در هفته منسخن حق یک ساعت هم کار نکرده باشد.

- آمادگی برای انجام کار داشته باشد.

■ در هفته منسخن و سه هفته قبل از آن جویای کار باشد. (اقدامات منسخن را به منظور جستجوی اشتغال، مزدگیری و یا خود اشتغالی به عمل آورده باشد.)

**جمعیت شاغل:** به افراد ۱۰ ساله، یا بالاتر از ۱۰ ساله‌ای که در طول هفته منسخن (بازه زمانی ۷ روزه‌ای) که وضع فعالیت افراد در این بازه زمانی متنظر باشد) حداقل یک ساعت کار کرده باشند شاغل گویند.

**جمعیت فعل:** به مجموع جمعیت بیکار و شاغل گفته می‌شود.





1905