

مثلثات

۱ تناوب و تأثیرات

۲ معادلات مثلثاتی



فصل

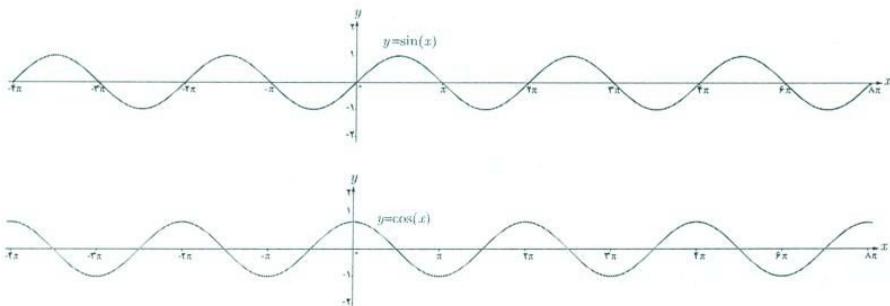


انشعاب رگ‌ها در بدن انسان به گونه‌ای است که مقاومت هیدرولیکی درون رگ‌های متناظر از زاویه بین هر دو رگ متصل بهم است. در شبیه‌سازی کامپیوتری از شبکه رگ‌ها این خاصیت مورد توجه قرار می‌گیرد.

۱ درس

تناوب و تافزافت

با توابع مثلثاتی $f(x) = \cos x$ و $f(x) = \sin x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصله 2π روی محور x یکسان است ($\cos(x \pm 2k\pi) = \cos(x)$ و $\sin(x \pm 2k\pi) = \sin(x)$). به عبارتی اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول 2π داشته باشیم، با تکرار این تکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.



با دقت به نمودار توابع فوق می‌توان مشاهده کرد که نمودار در بازه‌هایی به طول $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ تکرار می‌شود. اما کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان 2π است. چنین توابع را تابع متناوب و 2π را دوره تناوب آنها می‌نامیم.

تعريف:

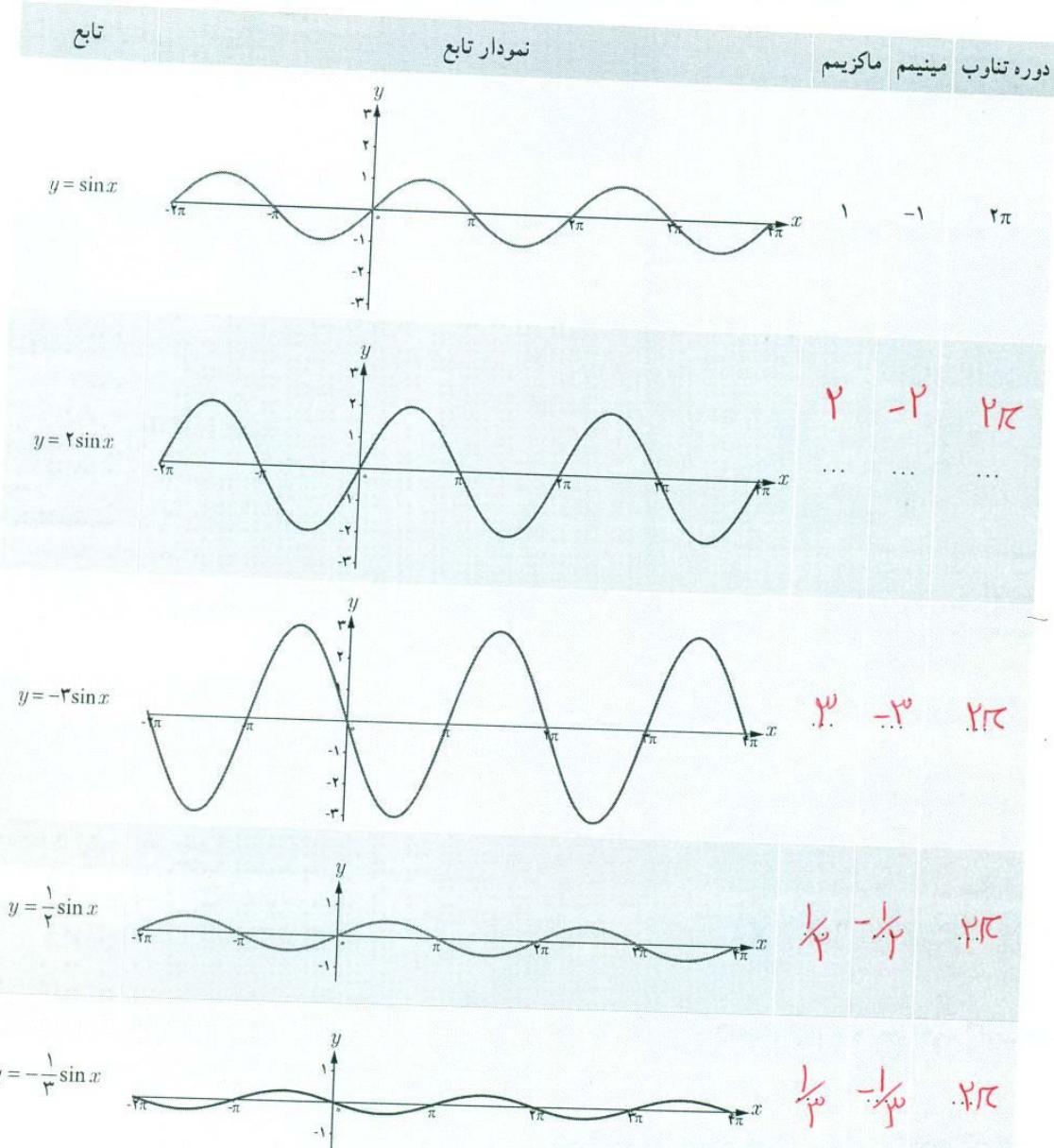
تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f می‌نامیم.

فعالیت

- ۱ می‌دانیم دوره تناوب تابع $f(x) = \cos x$ برابر 2π و مقادیر ماکریزم و مینیمم این تابع به ترتیب ۱ و -۱ است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x) = a \sin x$ بر دوره تناوب و مقادیر ماکریزم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۲۵ فصل دوم: مثالشات



۱ با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = a \sin x$ را مشخص نماید.

آنچه در دره ستاره 2π رخواهد داشت

۲ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانید مشخص نماید دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = a \sin x + c$.

۳ با انجام مراحلی مشابه مراحل بالا می‌توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y = a \cos x$ و $y = b \cos x + c$ چگونه است.

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-a \leq a \sin x \leq a$$

$$-a+c \leq a \sin x + c \leq a+c$$

$$-a+c \leq y \leq a+c$$

$$\downarrow \text{MIN} \quad \downarrow \text{MAX}$$

$$y = a \cos x + c \text{ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-a \leq a \cos x \leq a$$

$$-a+c \leq a \cos x + c \leq a+c$$

$$-a+c \leq y \leq a+c$$

$$\downarrow \text{MIN} \quad \downarrow \text{MAX}$$

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۲۶

فعالیت



- ۱ با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شده زیر، دوره تناوب و مقادیر ماکریسم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضرب b در تابع $y = \sin bx$ را بر دوره تناوب و مقادیر ماکریسم و مینیمم این تابع بررسی کیم.

تابع	نمودار تابع	دوره تناوب	مینیمم	ماکریسم
$y = \sin x$		2π	-1	1
$y = \sin 2x$		π	-1	1
$y = \sin (-3x)$		$\frac{2\pi}{3}$	-1	1
$y = \sin \frac{x}{2}$		4π	-1	1
$y = \sin (-\frac{x}{3})$		6π	-1	1

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۲۷ مثلثات

- ۲ با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکریم و مینیم تابع $y = \sin bx$ را مشخص نماید.

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

- ۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانیم، مشخص نماید دوره تناوب و مقادیر ماکریم و مینیم تابع $y = \sin bx + c$ چگونه است.
- با انجام مراحل مشابه مراحل بالا می‌توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکریم و مینیم تابع $y = a \cos x + c$ و $y = a \cos x$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

همان‌طور که در فعالیت‌های قبل دیدیم در توابع $y = a \cos bx + c$ و $y = a \sin bx + c$ ضرب a در دوره تناوب تابع بی‌تأثیر است، اما در مقدار ماکریم و مینیم تابع تأثیرگذار است. بر عکس، ضرب b در دوره تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکریم و مینیم تابع بی‌تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می‌شود، در دوره تناوب بی‌تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکریم و مینیم تابع تأثیرگذار است.

توابع $y = a \cos bx + c$ و $y = a \sin bx + c$ دارای مقدار ماکریم $|a| + c$ و مقدار مینیم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

بنابراین با داشتن ضابطه تابعی به صورت فوق می‌توان مقادیر ماکریم و مینیم و دوره تناوب تابع را به دست آورد و بر عکس با داشتن مقادیر ماکریم، مینیم و دوره تناوب یک تابع مثلثاتی، می‌توان ضابطه تابع مورد نظر را به دست آورد.

مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکریم و مینیم هر یک از توابع زیر را مشخص نماید.

(الف) $y = 3 \sin(2x) - 2$

(ب) $y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$

(ب) $y = \pi \sin(-x) + 1$

(ت) $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

حل:

(الف) $\max = |3| - 2 = 1$ $\min = -|3| - 2 = -5$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

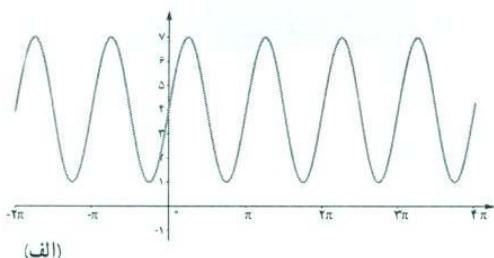
(ب) $\max = \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4}$ $\min = -\left| -\frac{1}{4} \right| = -\frac{1}{4}$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

(ب) $\max = |\pi| + 1 = \pi + 1$ $\min = -|\pi| + 1 = 1 - \pi$ $T = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

(ت) $\max = |\lambda| = \lambda$ $\min = -|\lambda| = -\lambda$ $T = \frac{2\pi}{|\lambda|} = \frac{2\pi}{3} = 6\pi$

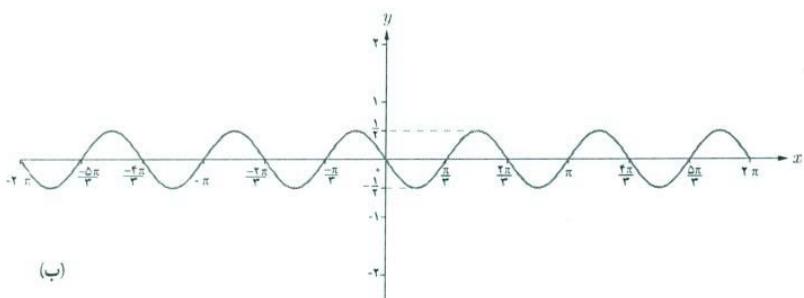
گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۲۸

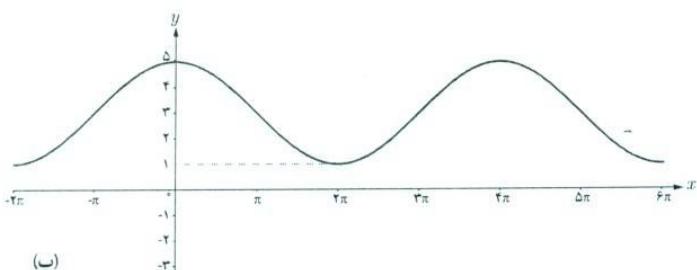


(الف)

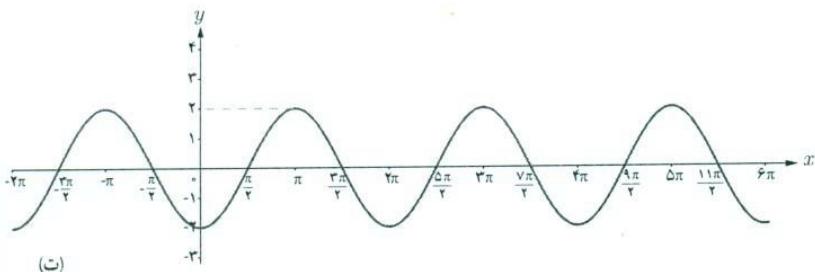
مثال: هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \cos bx + c$ یا $f(x) = a \sin bx + c$ است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکریم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص نماید.



(ب)



(پ)



(ت)

حل:

(الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکریم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و طول دوره تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$. از طرفی چون مقادیر ماکریم و مینیمم به ترتیب $c + |a|$ و $c - |a|$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکریم و مینیمم است، داریم $c = \frac{4}{2} = 2$ و در نتیجه $|a| = 3$.

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۲۹. مثالثات

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت باشند لذا ضابطه تابع مورد نظر به صورت مقابل است:

(ب) با توجه به نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکریم و مینیم و دوره تناوب از روی نمودار، $c = 0$ و $3|b| = |a|$ به دست می‌آید که در آن علامت a منفی و b مثبت است.

$$y = -\frac{1}{2} \sin 3x$$

بنابراین داریم:

(پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکریم و مینیم آن برابر 5 و 1 و طول دوره تناوب برابر 4π است. بنابراین $3|b| = |a|$ و $\frac{1}{2}|b| = 2|a|$ که در آن علامت a مثبت و علامت b منفی است.

$$y = 2 \cos(-\frac{x}{2}) + 3$$

لذا $a = 2$ و $b = -\frac{1}{2}$ و بنابراین داریم:

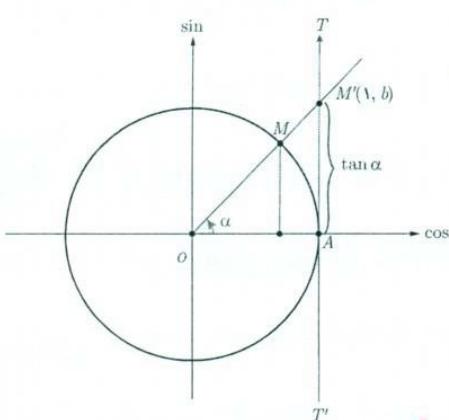
(ت) ضابطه این نمودار نیز می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و $c = 0$ و $|a| = 1$ و $|b| = 1$ و a منفی و b مثبت است.

$$y = -2 \cos x$$

بنابراین داریم:

تابع تانژانت

فعالیت



در دایره مثلثاتی رویه رو خط TAT' در نقطه A بر محور کسینوس‌ها عمود است.

(الف) زاویه α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطه M' قطع کند. نشان دهید:

$$\tan \alpha = AM' = b$$

می‌توان دید که تانژانت هر زاویه دلخواه مانند α ، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود. بنابراین خط TAT' را محور تانژانت می‌نامیم. نقطه A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

(ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع

دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟

(پ) آیا مقدار $\tan \frac{\pi}{2}$ عددی حقیقی است؟ $\tan \frac{3\pi}{2}$ چطور؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.

چون بله $\frac{\pi}{2}$ را $\frac{3\pi}{2}$ خط OM مولزی مور
تانژانت‌ها من سوی راست را قطع می‌کند که سوی
لطف ممکن از این رحیمی را که تانژانت آنها
حرسته کرفت

چون بله $\frac{\pi}{2}$ را $\frac{3\pi}{2}$ خط OM مولزی مور
تانژانت‌ها من سوی راست را قطع می‌کند که سوی
لطف ممکن از این رحیمی را که تانژانت آنها
حرسته کرفت

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۳۰

تغییرات قائم‌افت

فعالیت

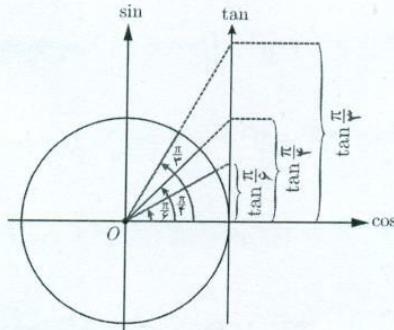
با تغییر زاویه α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایره مثلثاتی بررسی می‌کیم. اگر $\alpha = 0^\circ$, مقدار $\tan \alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه α , مقدار $\tan \alpha$ نیز افزایش می‌یابد.

الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویه α در ربع اول و تزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{2}$, مقادیر تانژانت تاچه حد افزایش می‌یابد؟
ب) توضیح دهید که در ربع اول تانژانت ها جایی کسر نیز ممکن است

ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت a را داشته باشیم، چگونه می‌توان زاویه‌ای مانند α یافت، به طوری که $\tan \alpha = a$.

ب) از زاویه α روی محور کاوشی می‌گذرد تا جایی که $\tan \alpha = a$ وصل می‌کشم

$$\tan \alpha = \frac{a}{1} = a$$



کاردر کلاس

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع‌های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهشی؟

+ ۰۰ - ۰۰ + ۰۰ - ۰۰

ب) بازه تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

- در ربع اول تغییرات کاوشی از ۰° تا ۹۰° (قرمز)
- در ربع دوم تغییرات کاوشی از -۹۰° تا ۰° (آفرازی)
- در ربع سوم تغییرات کاوشی از ۹۰° تا ۱۸۰° (قرمز)
- در ربع چهارم تغییرات کاوشی از ۱۸۰° تا ۲۷۰° (قرمز)

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

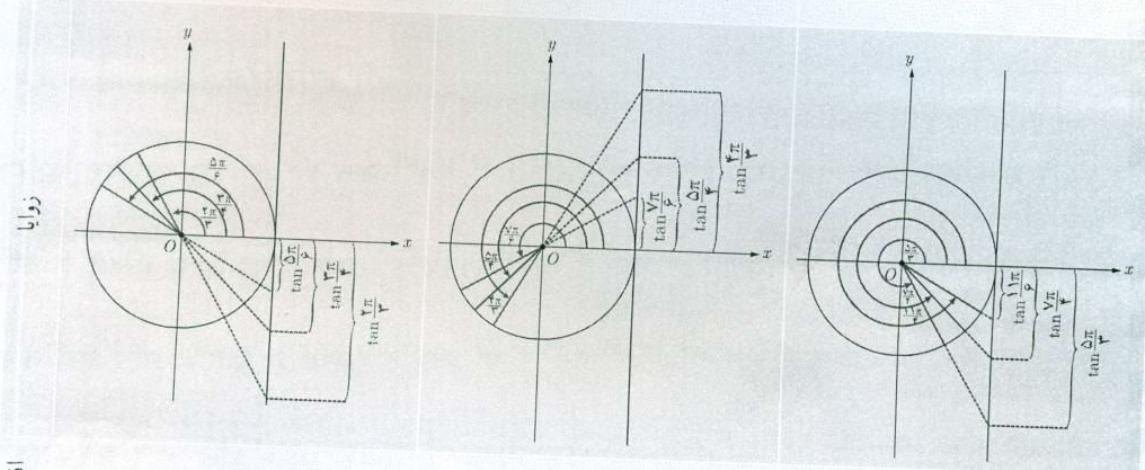
۲۱

2

دو

سوم

چهارم



افزار پیشی یا کاهشی

اُخْرَاسِی

اپریل

اچڑا

بازه تغییرات

$(-\infty, \rho]$

$$[0, +\infty)$$

$(-\infty, 0]$

ب) جدول زیر را کامل کنید. (علامت \uparrow به معنی افزایش یافتن و علامت \downarrow به معنی کاهش یافتن است).

ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

$$\frac{\sqrt{r}}{r} \rightarrow 1, \sqrt{r} \rightarrow +\infty, -\sqrt{r} \rightarrow -\infty, \frac{-\sqrt{r}}{r} \rightarrow 0, \sqrt{\frac{r}{r+1}} \rightarrow 1, \sqrt{r+1} \rightarrow +\infty, -\sqrt{r+1} \rightarrow -\infty, \frac{-\sqrt{r+1}}{r+1} \rightarrow 0.$$

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۳۲

تابع قانون افت

همان طور که می بینیم به ازای هر زاویه دلخواه در دایره مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، $k \in \mathbb{Z}$)، عددی حقیقی به عنوان $\tan \alpha$ داریم و تابعی با ضابطه $y = \tan \alpha$ مشخص می کند. دامنه این تابع مجموعه $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می توان دید تابع $y = \tan \alpha$ ، تابعی متناوب است^۱ و دوره تناوب آن π است، زیرا:

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

کاردکلاس

صعودی با نزولی بودن تابع $y = \tan \alpha$ را در بازه $[2\pi, 0]$ بررسی کنید.

حربازه ($\frac{\pi}{2}, 0$) صعودی

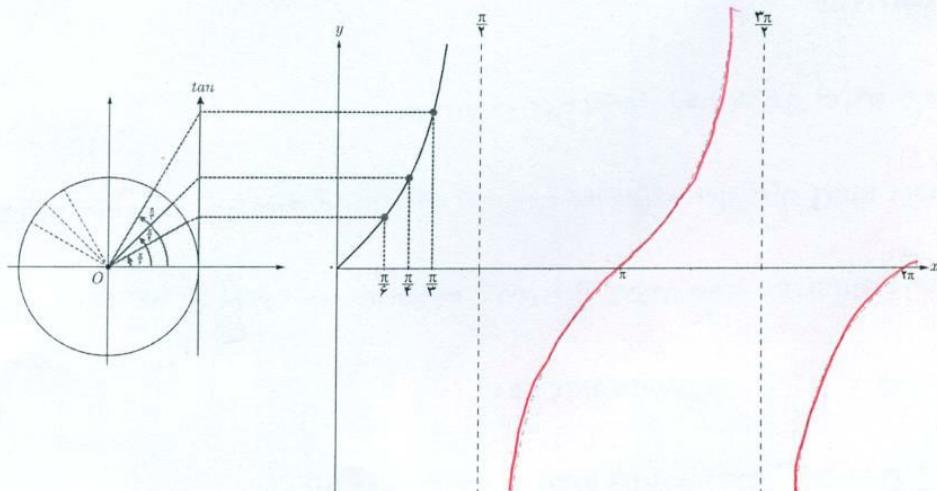
حربازه ($0, \frac{3\pi}{2}$) صعودی

حربازه ($\frac{3\pi}{2}, 2\pi$) صعودی

رسم تابع $y = \tan \alpha$

فعالیت

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan \alpha$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع های دیگر رسم کنید.



۱- به دست آوردن دوره تناوب تابع شامل \tan مدنظر نیست.

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

تمرین

الف) $y = 1 + 2 \sin \pi x$

$$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ : مکاریم}$$

۱- صفحه

۱) دوره تناوب و مقادیر ماکریم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

(ب) $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2} x$

$$T = 4 \text{ : مکاریم}$$

۱- صفحه

(ب) $y = -\pi \sin \frac{1}{2}(x - 2)$

$$T = 4\pi \text{ : مکاریم}$$

۲- صفحه

(ت) $y = -\frac{3}{4} \cos 3x$

$$T = \frac{2\pi}{3} \text{ : مکاریم}$$

۳- صفحه

۲) هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

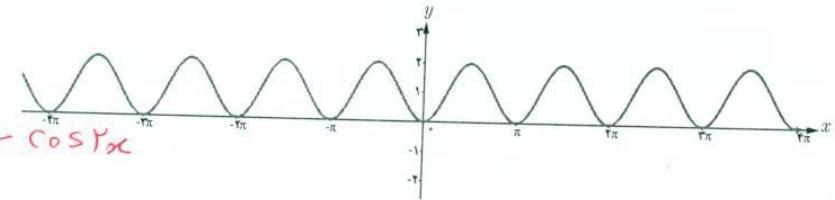
$$y = 1 - \cos 2x$$

$$y = \sin 2x$$

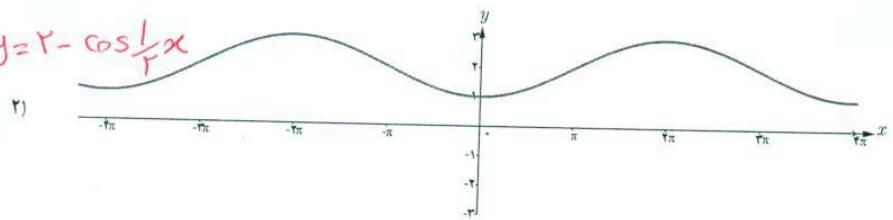
$$y = 2 - \cos \frac{1}{2}x$$

$$y = \sin \pi x$$

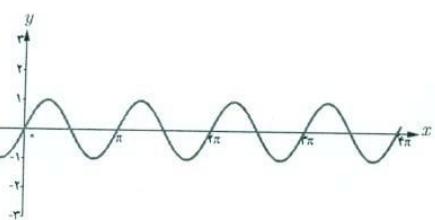
۱) $y = 1 - \cos 2x$



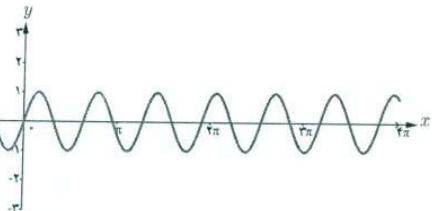
۲) $y = 2 - \cos \frac{1}{2}x$



۳) $y = \sin \pi x$



۴) $y = \sin 2\pi x$



گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۳۴

در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

(الف) $T = \pi$, $\max = 3$, $\min = -3$

$$y = 3 \sin 2x$$

(ب) $T = 3$, $\max = 9$, $\min = 3$

$$y = -4 \sin \frac{2\pi}{3}x + 10$$

(ب) $T = 4\pi$, $\max = -1$, $\min = -7$

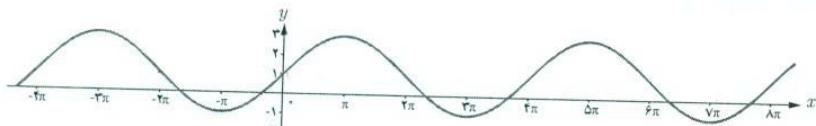
$$y = -3 \sin \frac{1}{4}x - 4$$

(ت) $T = \frac{\pi}{2}$, $\max = 1$, $\min = -1$

$$y = \cos 4x$$

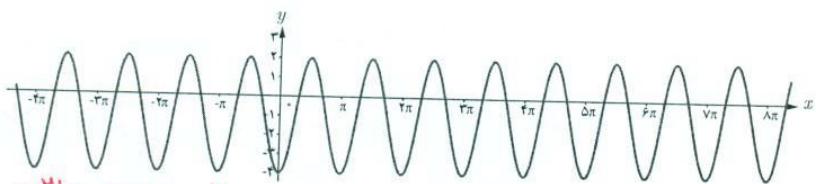
ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

(الف)



$$y = 3 \sin \frac{1}{2}(x + c) + 1$$

(ب)



$$y = -3 \cos 2x - 1$$

۵ کدامیک از جملات زیر درست و کدامیک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است. **نادرست**

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن تزویی باشد. **نادرست**

پ) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد. **درست**

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است. **درست**

۶ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید:

		$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
$\sin \alpha$		-1 \rightarrow $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ \rightarrow $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ \rightarrow $-\frac{1}{2}$ \rightarrow 0
$\tan \alpha$		$+\infty$ \rightarrow $-\sqrt{3}$ \rightarrow -1 \rightarrow $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ \rightarrow 0
$\tan \alpha, \sin \alpha$		حریق حارم سیز صردو صدری صدر

		$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$		0 \rightarrow $\frac{\sqrt{3}}{2}$ \rightarrow $\frac{\sqrt{2}}{2}$ \rightarrow 1
$\tan \alpha$		0 \rightarrow 1 \rightarrow $\sqrt{3}$ \rightarrow $+\infty$
$\sin \alpha, \tan \alpha$		حریق حارم سیز صردو صدری صدر

۲

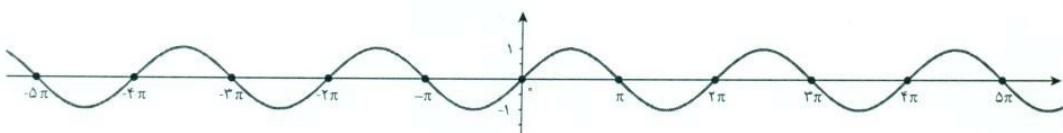
درس

معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی

معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول داریم، یک معادله مثلثاتی نام دارد.

مثال: تابع مثلثاتی $y = \sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.

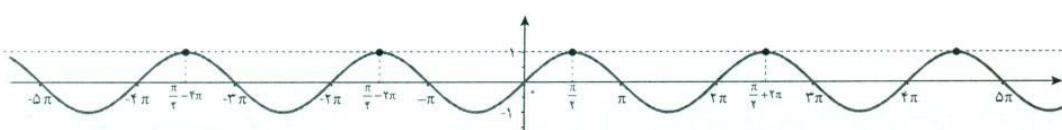


همان‌طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x = 0$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به صورت $\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y = 0$ (عنی محور x) و تابع $y = \sin x$ است.

این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.

به طور مشابه جواب‌های معادله $\sin x = 1$ مقادیری از x هستند که به ازای آنها مقدار $\sin x$ برابر ۱ می‌شود.

این مقادیر محل تقاطع $y = 1$ و $y = \sin x$ است که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله صفحه قبل به صورت

$$x = \dots, \frac{\pi}{2} - 4\pi, \frac{\pi}{2} - 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \dots$$

می‌باشند که به صورت کلی $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ قابل نمایش است.

اکنون معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۳۶

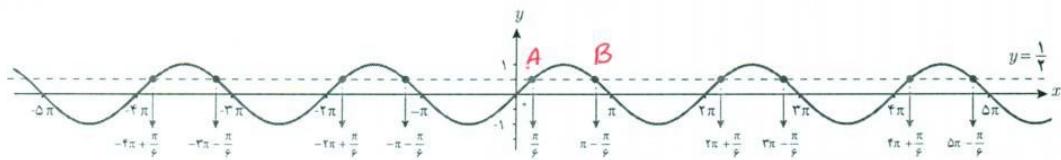
فعالیت

۱۰۵ ۱۰۶

۱ چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است مثال بزنید.

۲ خط $y = \sin x$ و نمودار $y = \sin x$ را در زیر رسم کرده ایم. مقادیری را که مثال زده اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟

B, A



کاری با شعاعی یا متریک از اجزاء آنها کاری برقرار

۳ طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{2}$ را که در شکل فوق مشخص شده اند، در معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می کنند؟ جه تیجه ای می گیرید؟

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

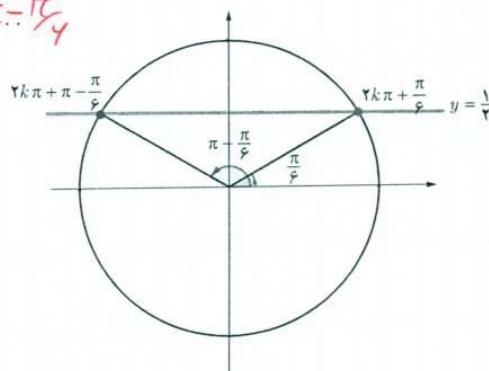
$$\sin \Delta \frac{\pi}{4} = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(-\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$$

۴ در دایره مثلثاتی زیر خط $y = \frac{1}{2}$ و زوایای $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{6} - \pi$ که سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است رسم شده اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتهایا با زاویه $\frac{\pi}{6}$ و کدام دسته هم انتهایا با زاویه $\frac{\pi}{6} - \pi$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟

$-\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$: هم انتهایا با $\frac{\pi}{6}$

$-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$: هم انتهایا با $\frac{\pi}{6} - \pi$



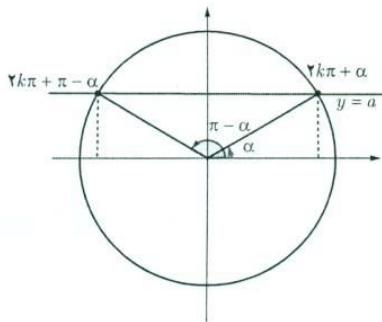
اگر و ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل دوم: مثالشات ۳۷

برای عدد حقیقی $1 \leq a \leq -1$ که $\sin x = a$, زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin \alpha = a$. بنابراین معادله $\sin x = \sin \alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x = \sin \alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را پاییم.

با توجه به دایره مثلثاتی رو به رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجھول x به طوری که $\sin x = \sin \alpha$ در دوران‌های مختلف به صورت زیر است:

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \quad \text{و} \quad x = (2k+1)\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$



جواب‌های گلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = (2k+1)\pi - \alpha$ و $x = 2k\pi + \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

* مثال: معادله $\sin x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

کار در کلاس

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0$$

$$2\sin x + \sqrt{3} = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{که } x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{که } x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

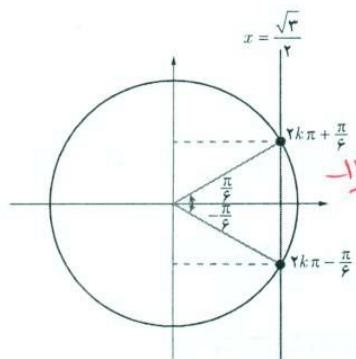
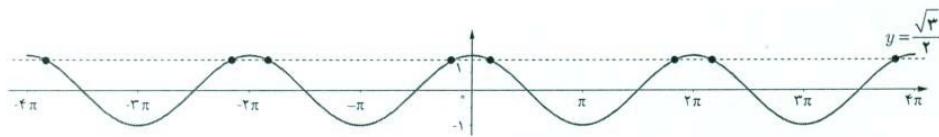
$$\begin{cases} \sin x + \sqrt{3} = 0 & \text{معادلات زیر را حل کنید.} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{که } x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = \sin \frac{11\pi}{6} & \text{که } x = 2k\pi + \frac{11\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{11\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} & \text{که } x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۳۸

فعالیت

نمودار تابع $y = \cos x$ و خط $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را بیابید.



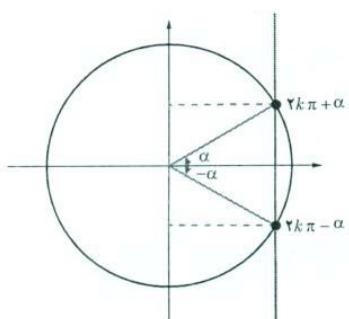
الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو
نمودار پیدا کنید.

$$2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{13\pi}{6}, 2k\pi - \frac{13\pi}{6}, 2k\pi + \frac{25\pi}{6}, 2k\pi - \frac{25\pi}{6}$$

ب) با استفاده از دایره مثلثی رویه‌رو و محل تقاطع خط $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ با دایره
مثلثی، جواب‌های معادله فوق را بدست آورید.

$$2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{13\pi}{6}$$

برای هر عدد حقیقی a در معادله $\cos x = a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد
. $\cos \alpha = a$ که



بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به صورت $\cos x = \cos \alpha$ نوشه و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثی رویه‌رو به صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \quad \text{و} \quad x = 2k\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که

سیوه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل دوم: مثلثات ۳۹

مثال: جواب‌های معادله $\cos x = \frac{1}{2}$ را بدست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-\pi, \pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos \frac{\pi}{3} = \cos x$ پس معادله به صورت $\cos \frac{\pi}{3} = \cos x$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های $-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

مثال: معادله $\sin 2x = \sin 3x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند:

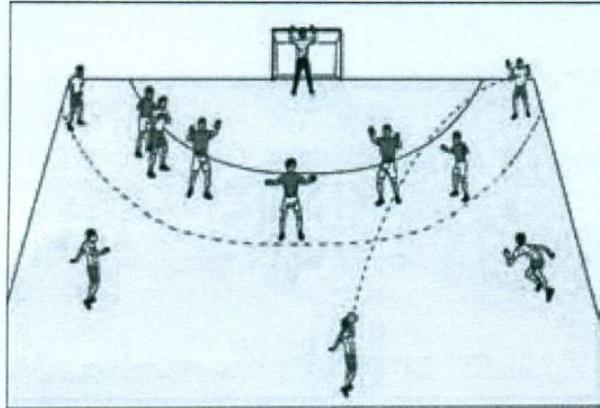
$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - 3x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال: معادله $2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

$$2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$$

$$2\sin 3x = \sqrt{2}$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)}{3}\pi - \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



مثال: یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت ۱۶ m/s برای هم‌تیمی خود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{16}$$

کلوب ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۴۰

از رابطه داده شده به دست می آید :

$$12/\lambda = \frac{(16)^{\frac{1}{2}} \sin 2\theta}{1^{\circ}} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{12/\lambda \times 1^{\circ}}{256} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{12} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2\theta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta = \frac{\pi}{12}$ می باشد.

مثال : جواب های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را به دست آورید.

$$2\sin x \cos x = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال : معادله $5 = \cos x(2\cos x - 1)$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به صورت $2\cos^2 x - \cos x - 5 = 0$ می نویسیم. با تغییر متغیر $t = \cos x$ می توان معادله فوق را به معادله درجه دوم

$2t^2 - t - 5 = 0$ تبدیل کرد. جواب های این معادله $t = -\frac{1}{2}$ و $t = 5$ است. بنابراین جواب های معادله مثلثاتی بالا از حل

دو معادله ساده $\cos x = 5$ و $\cos x = -\frac{1}{2}$ به دست می آید. از آنجا که $\cos x = 5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب های معادله

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

مثال : معادله $\sin x + \cos x = 1$ را در بازه $x \leq 2\pi$ حل کنید.

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\sin x = 1 - \cos x$$

$$\sin^2 x = (1 - \cos x)^2 \quad \text{طرفین را به توان 2 می رسانیم.}$$

$$\sin^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x \quad \text{استفاده از رابطه } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل دوم: مثلثات ۴۱

$$1 - \cos^2 x = 1 - 2 \cos x + \cos^2 x$$

$$2 \cos^2 x - 2 \cos x = 0$$

$$2 \cos x (\cos x - 1) = 0 \Rightarrow 2 \cos x = 0 \quad \text{یا} \quad \cos x - 1 = 0$$

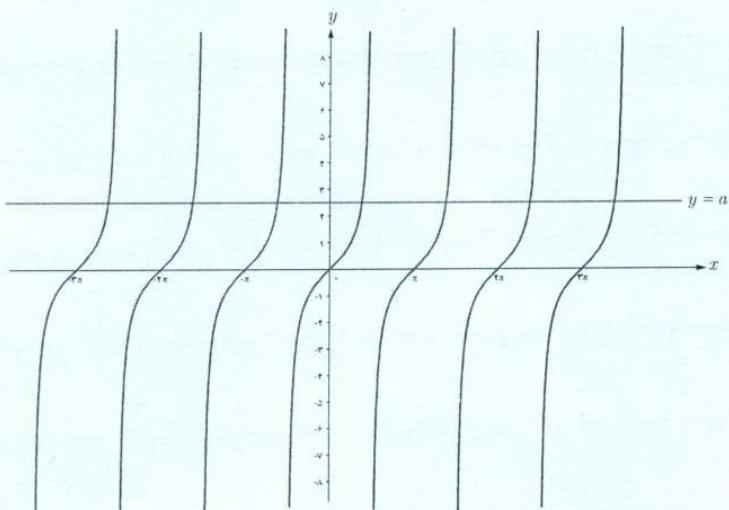
اکنون جواب‌های معادله‌های بدست آمده را در بازه $x \leq 2\pi$ می‌باییم:

$$2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0, 2\pi$$

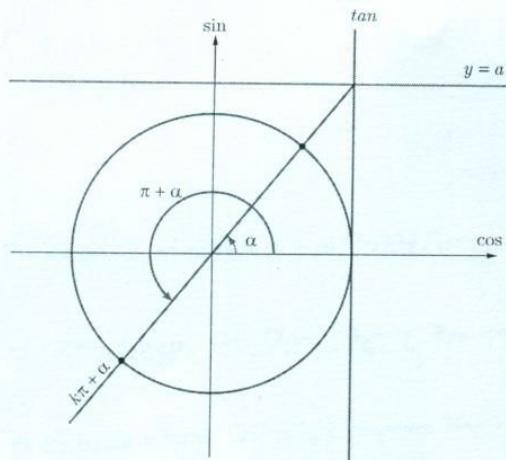
از آنجا که در گام سوم از به توان رساندن استفاده کرده‌ایم باید جواب‌های بدست آمده فوق را در معادله گذاشته و درستی آنها را تحقیق کنیم (جرا؟). پس از بررسی معلوم می‌شود که $x = \frac{3\pi}{2}$ جواب معادله داده شده نیست و بنابراین غیرقابل قبول است اما $x = 0, \frac{\pi}{2}$ مقادیر بدست آمده جواب معادله در بازه داده شده هستند.

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan x$ و خط $y = a$ که a یک عدد حقیقی است رسم شده‌اند. از روی نمودار این دو تابع می‌توان مشاهده کرد که جواب‌های معادله $\tan x = a$ همان طول نقاط تقاطع دو نمودار است. در واقع همواره برای عدد حقیقی a ، که زاویه‌ای چون α وجود دارد که برای آن داریم $\tan \alpha = a$. بنابراین معادله $\tan x = a$ به صورت $\tan x = \tan \alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\tan x = \tan \alpha$ باید رابطه بین زوایای x و α را بیاییم.



گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۴۲



از دایره مثلثاتی و محور تانژانت در شکل مقابل می‌توان دریافت که رابطه بین زوایای x و a به صورت $x = k\pi + a$ که $k \in \mathbb{Z}$ یک عدد صحیح، است می‌باشد.

در نمودار بالا اگر $a = 1$ باشد، داریم:

$$\tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

جواب‌های کلی معادله $\tan x = \tan \alpha$ به صورت $x = k\pi + a$ می‌باشد که k یک عددی صحیح است.

مثال: معادله $\tan x = \tan 5x$ را حل کنید.

$$x = k\pi + 5x \Rightarrow 4x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

حل:

از روابط مجموع و تفاضل زوایا برای نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس می‌توان روابط مجموع و تفاضل زوایا را برای تانژانت به صورت زیر به دست آورد.

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

همچنین با تغییر β به $-\beta$ در رابطه فوق رابطه تفاضل زوایا به صورت زیر به دست می‌آید.

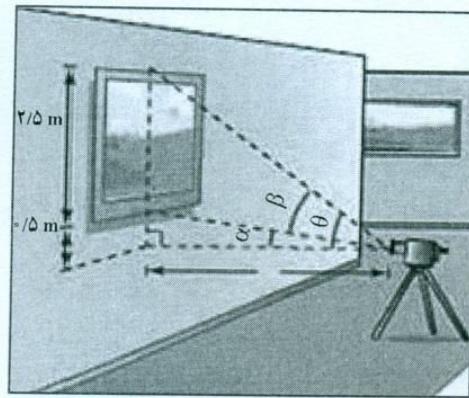
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل دوم: مثلثات ۴۲

مثال: نشان دهید در شکل زیر رابطه بین زاویه دید دوربین (β) با فاصله افقی آن با تابلو نقاشی به صورت زیر است.

$$\tan \beta = \frac{2/5 x}{x^2 + \frac{3}{2}}$$



سپس زاویه دید را در حالتی که فاصله افقی برابر یک متر است به دست آورید.

حل: با توجه به شکل برای مثلث قائم الزاویه پایین شکل داریم:

$$\tan \alpha = \frac{1/5}{x}$$

همچنین برای مثلث بزرگ که یک زاویه آن θ است داریم:

$$\tan \theta = \frac{3}{x}$$

اکنون با استفاده از رابطه تفاضل زوایا برای تانژانت به دست می آید:

$$\tan \beta = \tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha} = \frac{\frac{3}{x} - \frac{1/5}{x}}{1 + \frac{3}{x} \times \frac{1/5}{x}} = \frac{\frac{2/5}{x}}{\frac{x^2 + \frac{3}{2}}{x^2}} = \frac{2/5 x}{x^2 + \frac{3}{2}}$$

وقتی فاصله افقی برابر یک متر آنگاه داریم:

$$x = 1 \rightarrow \tan \beta = \frac{2/5 \times 1}{1^2 + \frac{3}{2}} = \frac{2/5}{2/5} = 1$$

از طرفی می دانیم که $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ پس جواب های معادله $\tan \beta = 1$ به صورت زیر به دست می آیند:

$$\beta = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

لیکن با توجه به شکل تنها جواب منطقی در حالت $k=0$ که مقدار $\beta = \frac{\pi}{4}$ را به دست می دهد قابل قبول می باشد.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{5}{13} \\ \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13} \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \frac{25}{169} - 1 = \frac{50}{169} - 1 = -\frac{119}{169} \\ \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{169} \end{array} \right. \end{aligned}$$

تمرین

۱ فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$

ب) $\sin 2\alpha$

$$2 \quad \text{نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه } 22/5^\circ \text{ بدست آورید.}$$

$$\sin 22/5^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 44^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{5}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{5}}}{2}$$

$$\cos 22/5^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 44^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2}$$

۲ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 3x$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

پ) $\cos x = \cos 3x$

ت) $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$

ث) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

ج) $\sin x - \cos 2x = 0$

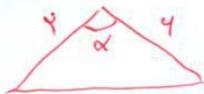
ج) $\tan(2x - 1) = 0$

ج) $\tan 3x = \tan \pi x$

در مجموع

۳ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با

این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟



$$\frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin \alpha = 3$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ kez} \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \text{ kez} \end{cases}$$

$$\text{جوابات صحیح} \quad \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ و } \alpha = \frac{5\pi}{6}$$

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

وہ ریاضی متوسطہ دوم استان خوزستان

$$\sin \frac{\pi}{4} = \sin \varphi n$$

$$\varphi n = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow n = \frac{2k\pi}{\varphi} + \frac{\pi}{4}$$

(ب) $\cos \varphi n - \cos n + 1 = 0$

$$2\cos \varphi n - 1 - \cos n + 1 = 0$$

$$2\cos \varphi n - \cos n = 0 \rightarrow \cos n (2\cos \varphi n - 1) = 0 \quad \begin{cases} \cos n = 0 \\ \cos n = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ n = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

(ج) $\cos \varphi n - \sin n + 1 = 1 \rightarrow -2\sin \varphi n + 1 - \sin n = 0 \rightarrow 2\sin \varphi n + \sin n - 1 = 0$

$$(2\sin n + 1)(\sin n - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin n = -1 \rightarrow n = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ \sin n = \frac{1}{2} \rightarrow n = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

(د) $\cos n = \cos \varphi n$

$$n = 2k\pi \pm \varphi n$$

$$\begin{cases} n = 2k\pi + \varphi n \rightarrow n = -2k\pi \\ n = 2k\pi - \varphi n \rightarrow n = \frac{2k\pi}{\varphi} \end{cases}$$

(چ) $2\sin \varphi n + \sin n - 1 = 0 \rightarrow (\sin n + 1)(2\sin n - 1) = 0 \quad \begin{cases} \sin n = -1 \\ \sin n = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} n = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ n = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ n = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

(د) $\sin n - \cos \varphi n = 0 \rightarrow \sin n + 2\sin \varphi n - 1 = 0 \rightarrow (\sin n + 1)(2\sin \varphi n - 1) = 0$

$$\downarrow$$

$$-2\sin \varphi n + 1$$

$$\begin{cases} \sin n = -1 \\ \sin n = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ n = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ n = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

(س) $\tan(\varphi n - 1) = 0$

$$\varphi n - 1 = k\pi$$

$$n = \frac{k\pi + 1}{\varphi}$$

(ج) $\tan \varphi n = \tan n$

$$\varphi n = k\pi + n$$

$$(k - 1)n = k\pi$$

$$n = \frac{k\pi}{k - 1}$$

Biamoz.com | بیاموز

بزرگترین مرجع آموزشی و نمونه سوالات درسی تمامی مقاطع

شامل انواع | نمونه سوالات | فصل به فصل | پایان ترم | جزوه |
ویدئوهای آموزشی | گام به گام | طرح درس | طرح جابر | و ...

اینستاگرام

گروه تلگرام

کanal تلگرام

برای ورود به هر پایه در سایت ما روی اسم آن کلیک کنید

دبستان

ششم

پنجم

چهارم

سوم

دوم

اول

متوسطه اول

نهم

هشتم

هفتم

متوسطه دوم

دوازدهم

یازدهم

دهم