بسم الله الرحمن الرحیم

# ریاضی (۳)

رشتهٔ علوم تجربی

پایهٔ دوازدهم

دورهٔ دوم متوسطه

**وزارت آموزش و پرورش**
**سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی**

**نام کتاب:** ریاضی (۳) ـ پایهٔ دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۲۲۱۱

**پدیدآورنده:** سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

**مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف:** دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری

**شناسهٔ افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:** سیدمحمدرضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
رضا حیدری‌قزلجه، زهرا رحیمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، آناهیتا کمیجانی و هادی مین‌باشیان (اعضای گروه تألیف)

**مدیریت آماده‌سازی هنری:** اداره کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

**شناسهٔ افزوده آماده‌سازی:** احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) ـ جواد صفری (مدیر هنری) ـ مریم نصرتی (صفحه‌آرا) ـ مریم کیوان (طراح جلد)ـ فاطمه رئیسیان‌فیروزآباد (رسام)ـ بهناز بهبود، سوروش سعادتمندی، علی نجمی، علی مظاهری‌نظری‌فر، فریبا سیر و راحله زادفتح‌اله (امور آماده‌سازی)

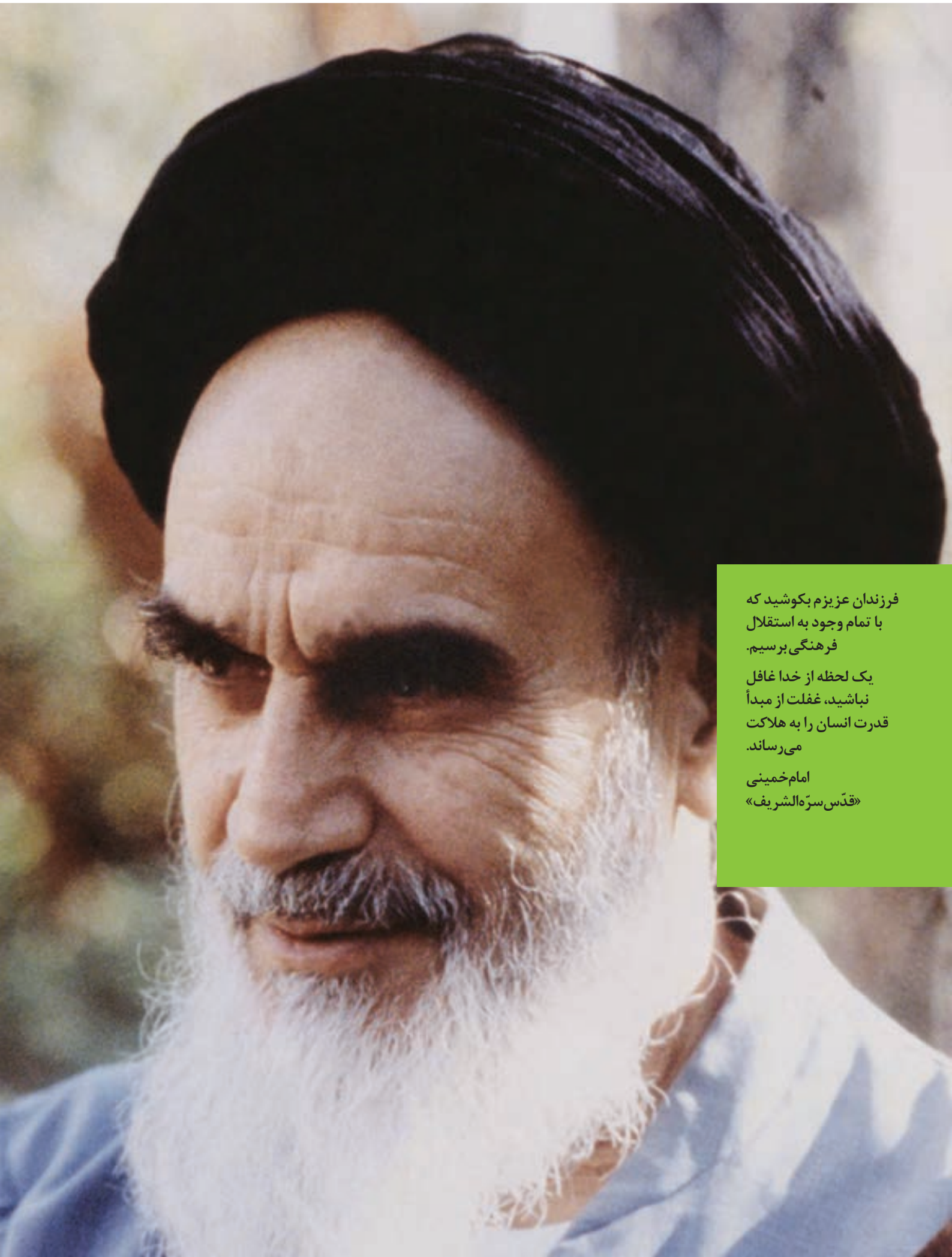
**نشانی سازمان:** تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir

**ناشر:** شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵

**چاپخانه:** شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

**سال انتشار و نوبت چاپ:** چاپ اوّل ۱۳۹۷

شابک ۴ـ۳۱۱۷ـ۰۵ـ۹۶۴ـ۹۷۸
ISBN: 978_964_05_3117_4



فرزندان عزیزم بکوشید که با تمام وجود به استقلال فرهنگی برسیم.

یک لحظه از خدا غافل نباشید، غفلت از مبدأ قدرت انسان را به هلاکت می‌رساند.

امام‌خمینی
«قدّس‌سرّه‌الشریف»

کلیهٔ حقوق مادّی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از این کتاب و اجزای آن به‌صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس‌برداری، نقاشی، تهیهٔ فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز از این سازمان ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

# فهرست

**فصل ۱ــ تابع | ۱**

- درس اول ــ توابع چند جمله‌ای ــ توابع صعودی و نزولی | ۲
- درس دوم ــ ترکیب توابع | ۱۱
- درس سوم ــ تابع وارون | ۲۴

**فصل ۲ــ مثلثات | ۳۱**

- درس اول ــ تناوب و تانژانت | ۳۲
- درس دوم ــ معادلات مثلثاتی | ۴۲

**فصل ۳ــ حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت | ۴۹**

- درس اول ــ حد بی‌نهایت | ۵۰
- درس دوم ــ حد در بی‌نهایت | ۵۸

**فصل ۴ــ مشتق | ۶۵**

- درس اول ــ آشنایی با مفهوم مشتق | ۶۶
- درس دوم ــ مشتق‌پذیری و پیوستگی | ۷۷
- درس سوم ــ آهنگ تغییر | ۹۳

**فصل ۵ــ کاربرد مشتق | ۱۰۱**

- درس اول ــ اکسترمم‌های تابع | ۱۰۲
- درس دوم ــ بهینه‌سازی | ۱۱۳

**فصل ۶ــ هندسه | ۱۲۱**

- درس اول ــ تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی | ۱۲۲
- درس دوم ــ دایره | ۱۳۴

**فصل ۷ــ احتمال | ۱۴۳**

- قانون احتمال کل | ۱۴۴

# مقدمه

کتاب حاضر در راستای برنامهٔ درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های ریاضی دورهٔ دوم متوسطه تألیف شده است. یکی از تفاوت‌های مهم این کتاب با کتاب قبلی مربوط به دوره پیش‌دانشگاهی، کاهش قابل ملاحظه محتوا است. همانند پایه‌های قبلی، ساختار کتاب براساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین قرار گرفته است. از این میان، «فعالیت‌ها» موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم جدید ریاضی فراهم می‌کنند و این امر مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان است. البته معلم هم در این میان نقشی مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها به عهده دارد. با توجه به اینکه کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با درنظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها به وسیله معلم وجود دارد.
در هرحال تأکید اساسی مؤلفان، محور قرار دادن کتاب درسی در فرایند آموزش است. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌وگو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود.
زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس واقع شوند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند.
در بسیاری از موارد درباره یک مفهوم، حد و مرزهایی در کتاب رعایت شده است که رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی برای همه طراحان الزامی است. رعایت این محدودیت‌ها موجب افزایش تناسب بین زمان اختصاص یافته به کتاب و محتوای آن خواهد شد. شایسته است همکاران ارجمند بر رعایت این موضوع نظارت دقیق داشته باشند. روند کتاب نشان می‌دهد که ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. در واقع ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که احیاناً پیش از این، سال‌ها به صورت سنتی ارائه شده‌اند و یا توسط برخی از کتاب‌های غیراستاندارد توصیه می‌شوند. طرح این‌گونه سؤالات که اهداف آموزشی کتاب را دنبال نمی‌کنند در کلاس درس و نیز در ارزشیابی‌ها، به هیچ عنوان توصیه نمی‌شود.
ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای این دانش در زندگی روزمره، که به وضوح در اسناد بالادستی مورد تأکید قرار گرفته است، به صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است که امید است مورد توجه معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.
اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفاده افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درس را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و

موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد. مؤلفان از کلیه امکانات موجود نظیر سامانه اعتبارسنجی، وبگاه گروه ریاضی دفتر تألیف، پیام‌نگار (ایمیل)، دعوت از دبیران مجرب برای حضور در جلسات نقد و بررسی کتاب و دیگر رسانه‌های در دسترس برای دریافت دیدگاه‌ها، نقدها و نظرات دبیران محترم سراسر کشور بهره گرفته‌اند. در راستای مشارکت دبیران محترم ریاضی، پاره‌ای از تصاویر و عکس‌های مورد استفاده در کتاب توسط این عزیزان از استان‌های مختلف کشور به گروه ریاضی ارسال شده است، که لازم است از زحمات آنها تشکر و قدردانی شود. اعضای تیم تألیف به حضور و مشارکت جدی همکاران ارجمند در امر نقد و بررسی کتاب افتخار می‌کنند. امید که همچنان شاهد این تعامل و ارتباط مؤثر باشیم. گروه تألیف آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و اساتید را از طریق پیام‌نگار[1] و وبگاه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی[2] دارد به علاوه بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق وبگاه واحد ریاضی قابل دریافت است.

**مؤلفان**

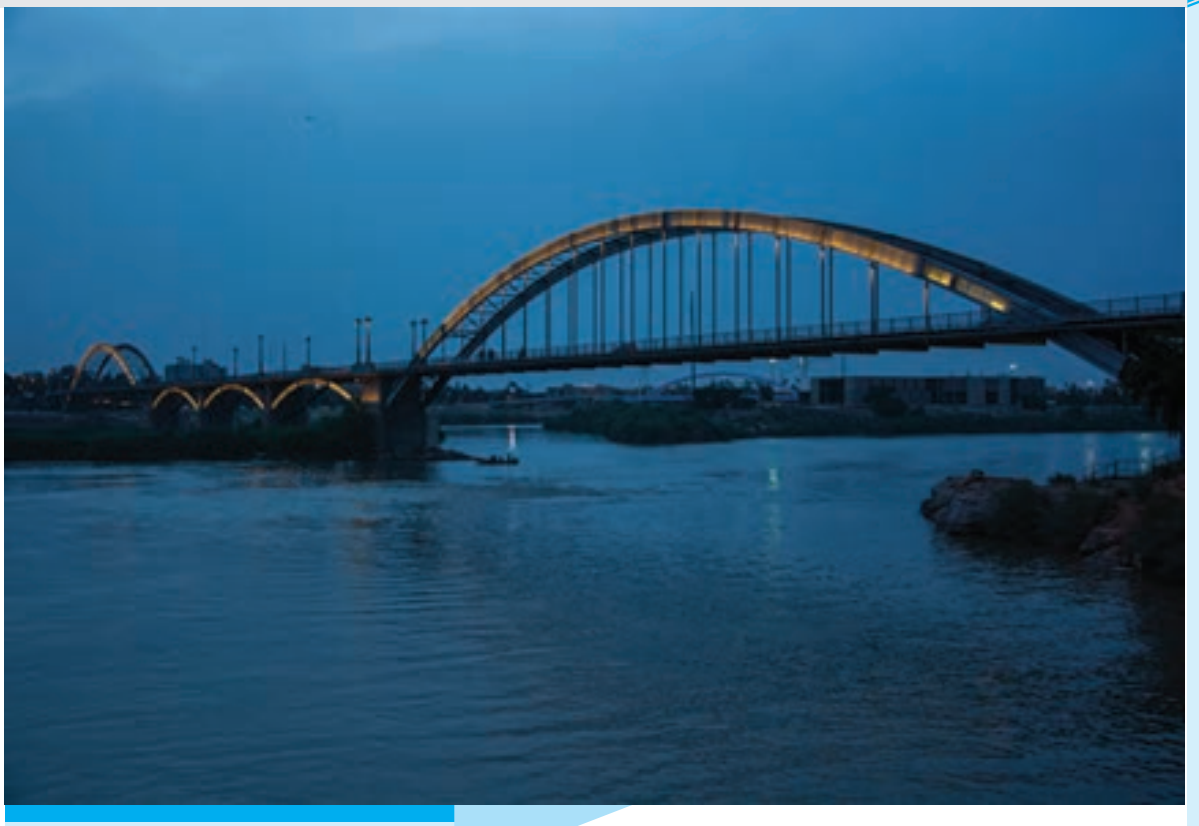
---

۱ــ mathrde@gmail.com

۲ــ http: //math-dept.talif.sch.ir

فصل

# ۱ تابع



عکاس: سیدمهدی حسینی

پل سفید ـ اهواز

پل سفید اهواز یکی از پل‌های شهر اهواز است که یکی از نمادهای این شهر نیز محسوب می‌شود. این پل در سال ۱۳۱۵ بر روی رودخانهٔ کارون ساخته شده است که دارای دو قوس فلزی ۱۲ و ۲۰ متری است.

درس اوّل **توابع چند جمله‌ای ـ توابع صعودی و نزولی**

درس دوم **ترکیب توابع**

درس سوم **تابع وارون**

درس اول

# توابع چند جمله‌ای ــ توابع صعودی و نزولی

## توابع چند جمله‌ای:

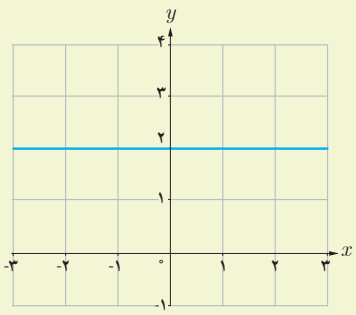
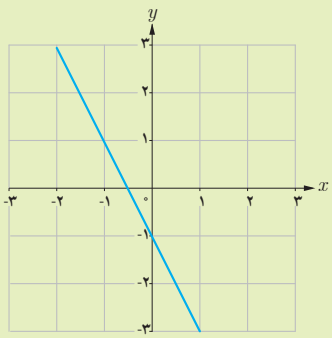
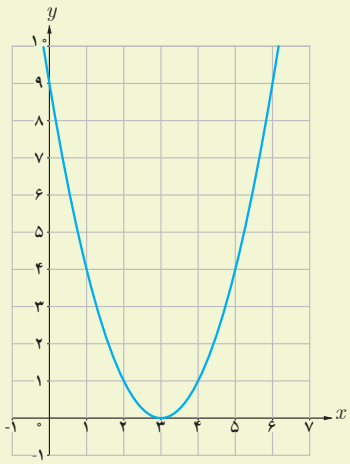
در سال‌های گذشته با تابع خطی آشنا شدیم. هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a=0$، تابع به‌صورت $f(x)=b$ در می‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامیم. توابع ثابت و توابع خطی، مثال‌هایی از توابع چند جمله‌ای با درجه‌های ۰ و ۱ هستند.

هر تابع به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ را که در آن $a_n$، $a_{n-1}$، ...، $a_2$، $a_1$، $a_0$ اعداد حقیقی و $n$ یک عدد صحیح نامنفی و $a_n\neq 0$ باشد، یک تابع چند جمله‌ای از درجهٔ $n$ می‌نامیم. دامنهٔ توابع چند جمله‌ای مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

**مثال :** توابع زیر نمونه‌ای از توابع چند جمله‌ای به‌ترتیب از درجهٔ ۱، ۲، ۳ و ۵ هستند.

$$y=3x+5 \quad , \quad y=-8x^2+2x-\frac{1}{2} \quad , \quad y=\sqrt{2}x^3-\frac{3}{4}x \quad , \quad y=2x^5-4x^3+\sqrt{7}x^2$$

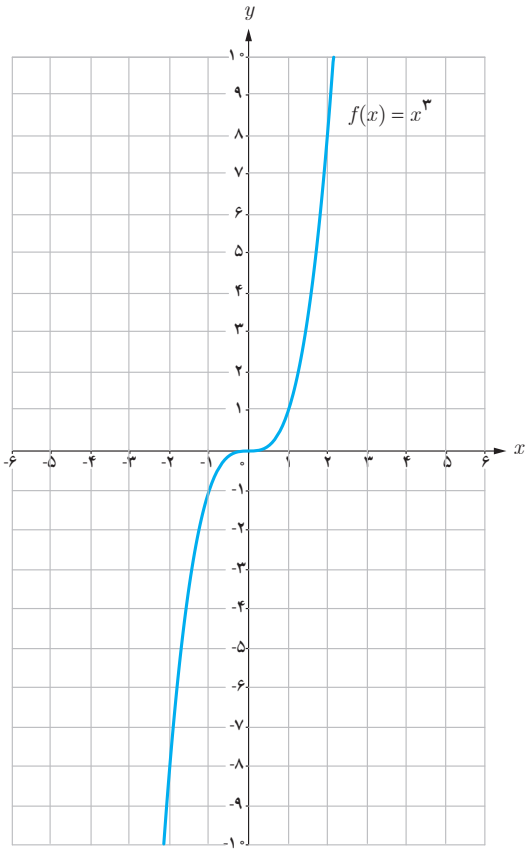
انواع توابع چند جمله‌ای که تا به حال با آنها آشنا شده‌ایم به‌صورت زیر است :

| درجهٔ تابع | ۰ | ۱ | ۲ |
|---|---|---|---|
| نام تابع | ثابت | خطی | درجهٔ دوم |
| ضابطهٔ کلی | $f(x)=b$ | $f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ | $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ |
| مثال | $f(x)=2$  | $f(x)=-2x-1$  | $f(x)=x^2-6x+9$  |

## تابع درجهٔ ۳:

تابع چند جمله‌ای با ضابطهٔ $f(x) = ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d\ (a\neq ۰)$ یک تابع درجهٔ ۳ است که در اینجا به‌طور خاص تابع $f(x) = x^{۳}$ را بررسی می‌کنیم. دامنه و برد این تابع $\mathbb{R}$ است. ابتدا به کمک نقطه‌یابی نمودار این تابع را رسم می‌کنیم :

| $x$ | $f(x)=x^{۳}$ |
|---|---|
| $-۲$ | $-۸$ |
| $-۱$ | $-۱$ |
| $-\frac{۱}{۲}$ | $-\frac{۱}{۸}$ |
| $۰$ | $۰$ |
| $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{۱}{۸}$ |
| $۱$ | $۱$ |
| $۲$ | $۸$ |




### خواندنی

الگوی کلی لانهٔ زنبور عسل به‌صورت یک شش‌ضلعی است که در دور اول با شش تا شش‌ضلعی دیگر احاطه شده است، در دور دوم با دوازده تا شش ضلعی احاطه می‌شود و به همین ترتیب در دورهای دیگر تعداد شش ضلعی‌ها با الگوی خاصی افزایش می‌یابد.

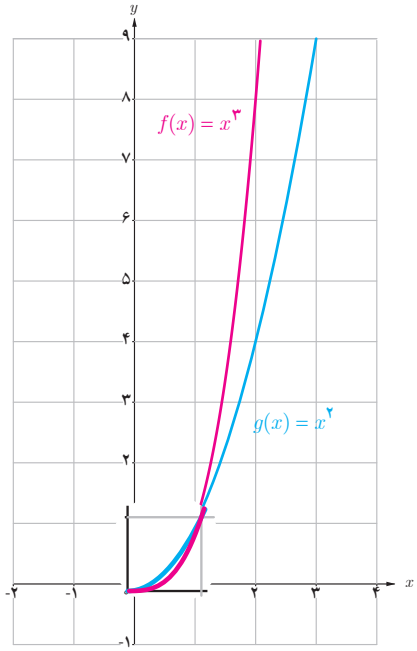
تعداد کل این شش ضلعی‌ها را می‌توان با تابع درجه دوم $f(r)=۳r^{۲}-۳r+۱$ به دست آورد که $r$ تعداد دورهاست. آیا می‌توانید تعداد کل شش ضلعی‌ها را برای $r=۱،۲،۳$ به دست آورید؟

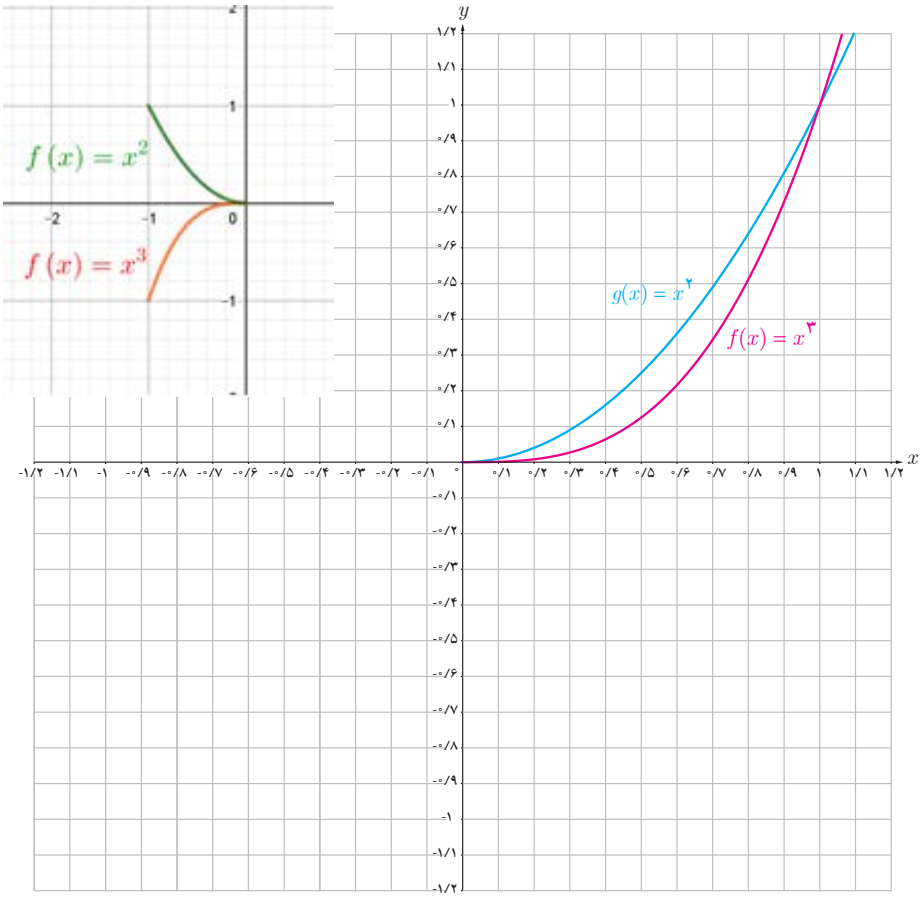
**فعالیت**

الف: خیر ، برای مقادیر بین صفر ویک نمودار $x^3$ پایین نمودار $x^2$ قرار دارد

با توجه به نمودار توابع $f(x) = x^3$ و $g(x) = x^2$ که برای اعداد نامنفی رسم شده‌اند :

الف) آیا برای تمام $x$ های نامنفی، نمودار $f(x) = x^3$ بالای نمودار $g(x) = x^2$ قرار دارد؟ ب) نمودار این دو تابع را در بازه $[-1, 0]$ رسم کنید.



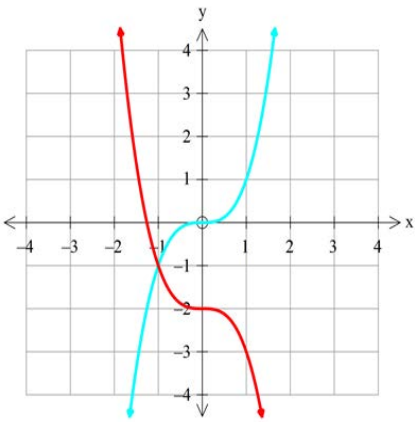




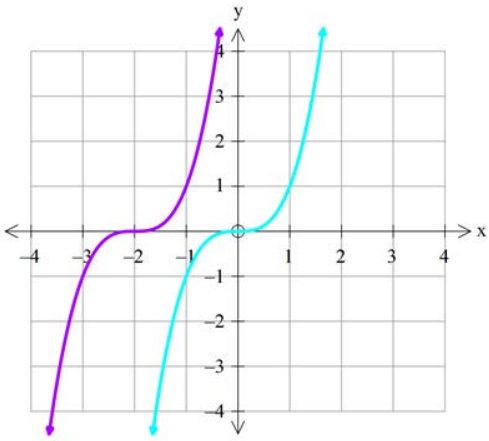
**فعالیت**

با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^3$، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

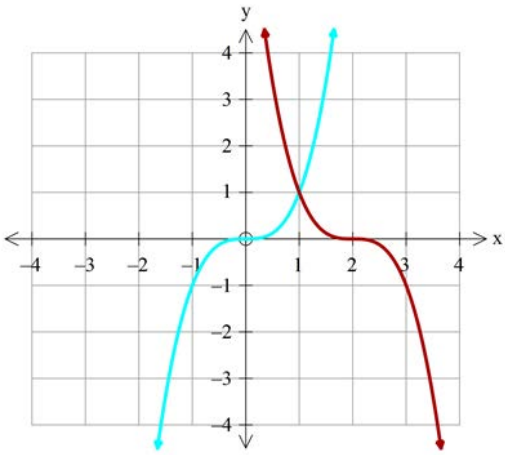
الف) $y = -x^3 - 2$



ب) $y = (x+2)^3$



پ) $y = -(x-2)^3$



## کار در کلاس

به کمک نمودار تابع $y=x^{۳}$، ضابطهٔ هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

الف) $y=(x-۱)^{۳}+۲$ ۶

ب) $y=(x-۲)^{۳}$ ۹

پ) $y=-x^{۳}+۱$ ۸

ت) $y=(x+۱)^{۳}-۱$ ۷

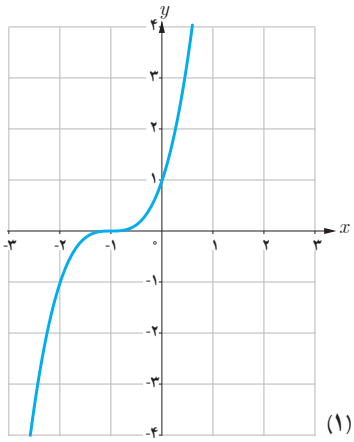
ث) $y=-x^{۳}$ ۵

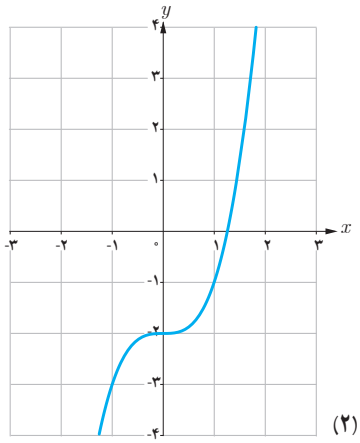
ج) $y=(x+۱)^{۳}$ ۱

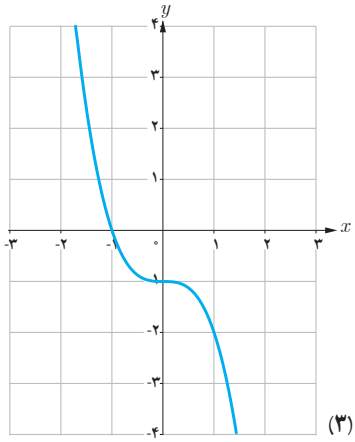
چ) $y=x^{۳}+۱$ ۴

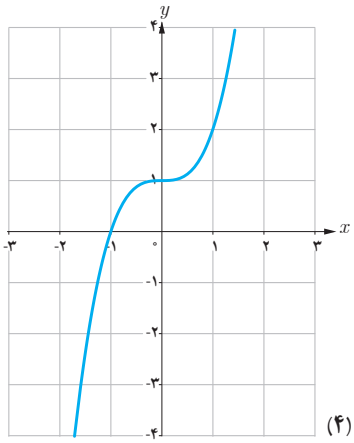
ح) $y=-x^{۳}-۱$ ۳

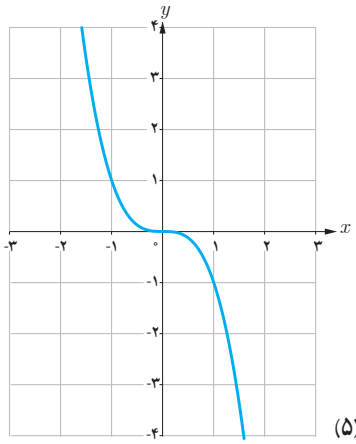
خ) $y=x^{۳}-۲$ ۲

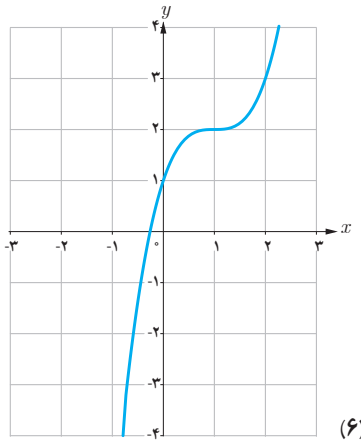

(۱)

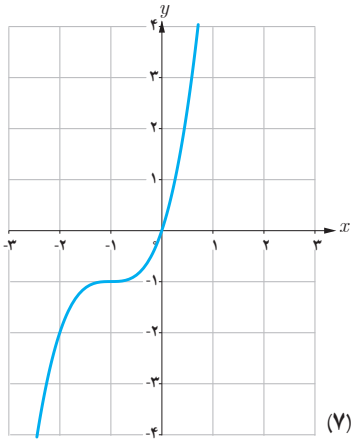

(۲)

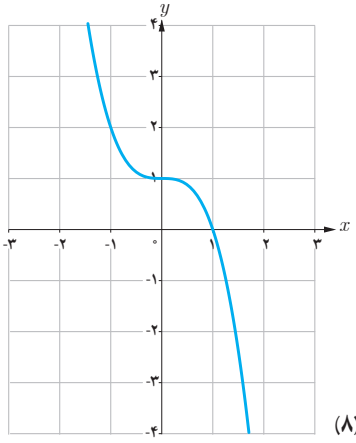

(۳)

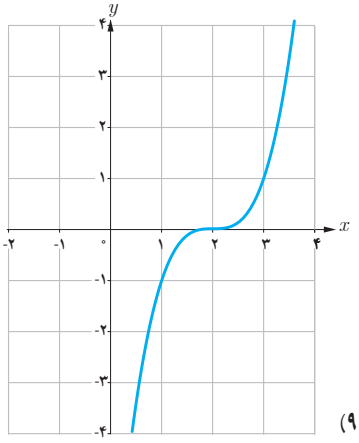

(۴)


(۵)


(۶)


(۷)


(۸)


(۹)

## توابع صعودی و توابع نزولی:

**فعالیت**

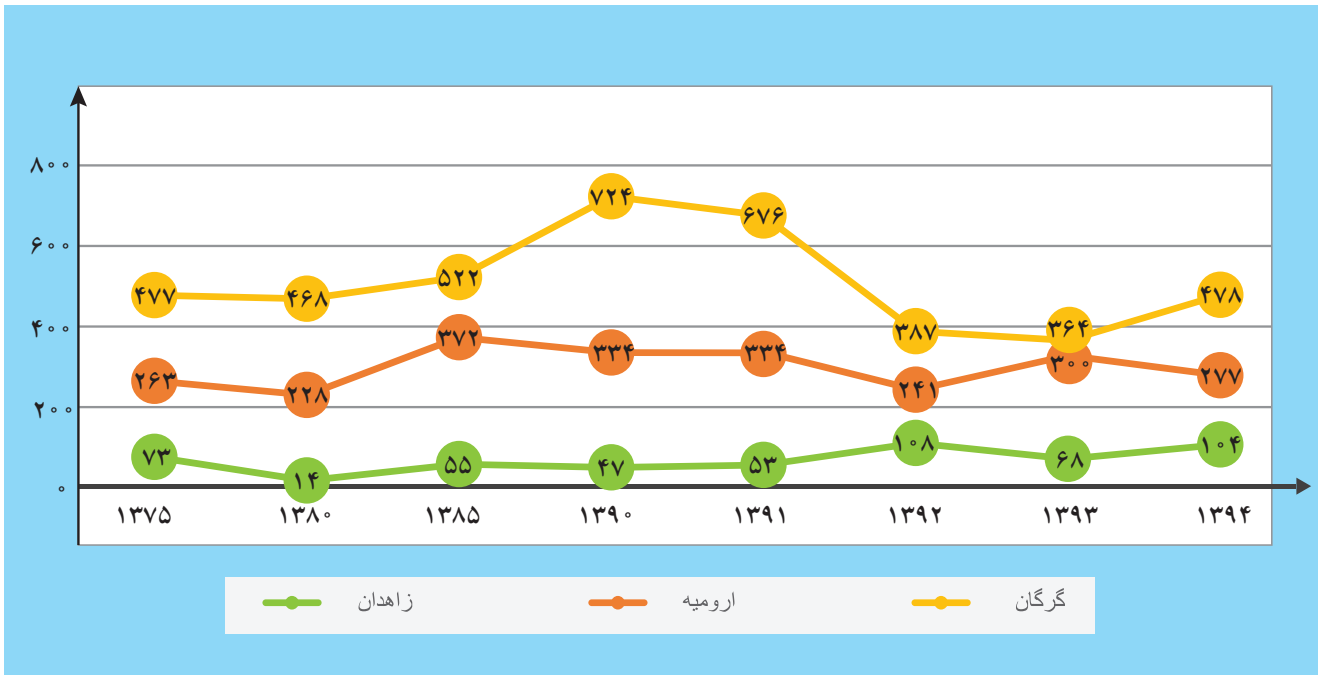
یکی از دغدغه‌های این روزها بحث کاهش بارندگی در کشورمان است که خسارات بسیاری را به بار می‌آورد. در نمودار زیر میزان بارندگی سالانه سه شهر گرگان، زاهدان و ارومیه از سال ۱۳۷۵ تا سال ۱۳۹۴ (برحسب میلی‌متر) آورده شده است. به‌طور مثال در شهر ارومیه در سال ۸۵، میزان بارندگی ۳۷۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۳۳۴ میلی‌متر بوده است که روند نزولی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. همچنین در شهر گرگان در سال ۸۵، میزان بارندگی ۵۲۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۷۲۴ میلی‌متر بوده است که روند صعودی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار به سؤال‌های زیر پاسخ دهید :

الف) از سال ۷۵ تا ۹۱، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر گرگان روند صعودی داشته است؟

از سال ۱۳۸۰تا سال ۱۳۹۰

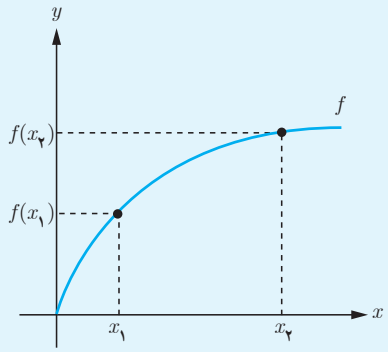
ب) از سال ۹۱ تا ۹۴، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر ارومیه روند نزولی داشته است؟

در بازه زمانی ۹۱تا ۹۲ و بازه زمانی ۹۳تا ۹۴



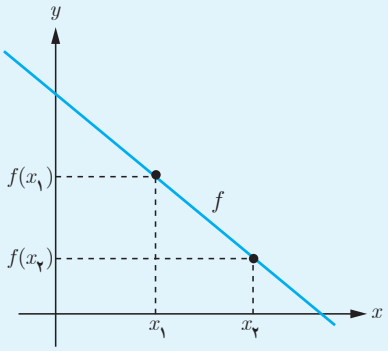

میزان بارندگی سالانه شهرهای گرگان، زاهدان و ارومیه (میلی‌متر)[1]

۱ــ منبع : سایت مرکز آمار ایران www.amar.org.ir



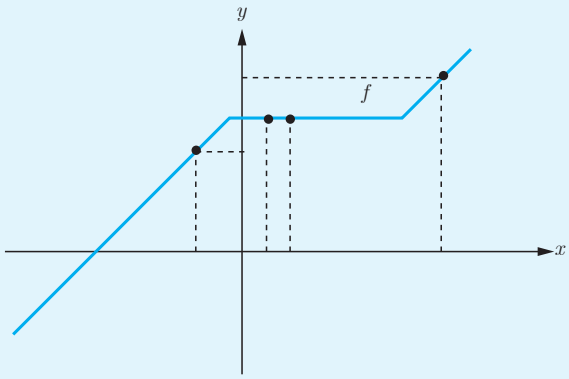

### تابع اکیداً صعودی

اگر برای هر دو نقطهٔ $x_1$ و $x_2$ از دامنهٔ تابع $f$ که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)<f(x_2)$، آنگاه $f$ را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.



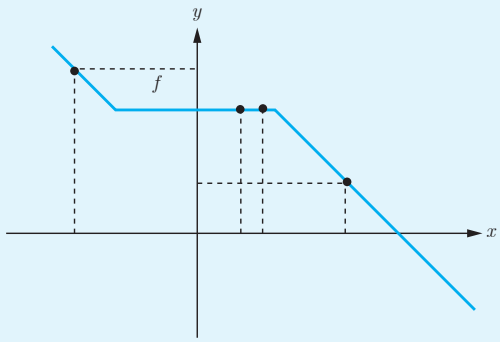

### تابع اکیداً نزولی

اگر برای هر دو نقطهٔ $x_1$ و $x_2$ از دامنهٔ تابع $f$ که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)>f(x_2)$، آنگاه $f$ را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.




### تابع صعودی

اگر برای هر دو نقطهٔ $x_1$ و $x_2$ از دامنهٔ تابع $f$ که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)\leq f(x_2)$، آنگاه $f$ را تابعی صعودی می‌نامیم.

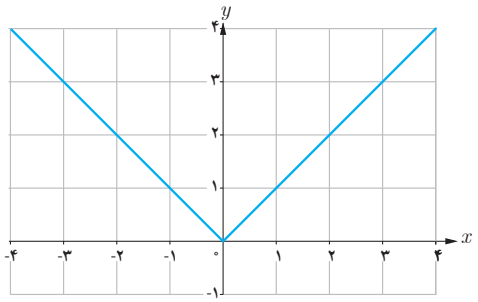



### تابع نزولی

اگر برای هر دو نقطهٔ $x_1$ و $x_2$ از دامنهٔ تابع $f$ که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)\geq f(x_2)$، آنگاه $f$ را تابعی نزولی می‌نامیم.

تابع $f$ را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر $x$ در این بازه، مقدار $f$ ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

**نکته :** به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا گوییم. همچنین به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع یکنوا گوییم. توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا هستند. آیا عکس این مطلب صحیح است؟ توضیح دهید.

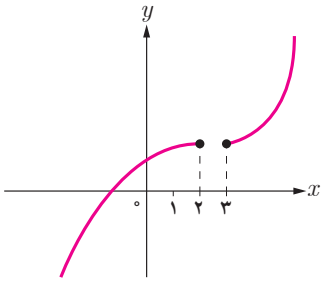


ممکن است تابعی در یک بازه صعودی (اکیداً صعودی) و در بازهٔ دیگر نزولی (اکیداً نزولی) باشد.

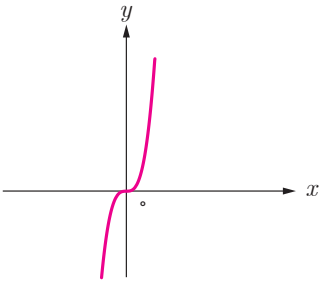
**مثال :** تابع $f(x)=|x|$ در بازهٔ $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی است، اما در $\mathbb{R}$ نه صعودی است نه نزولی.

## کار در کلاس

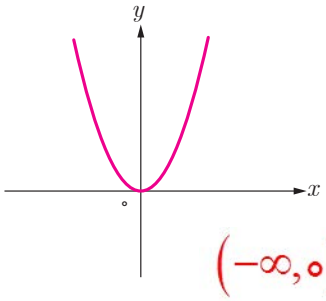
هر کدام از توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟



(الف) صعودی



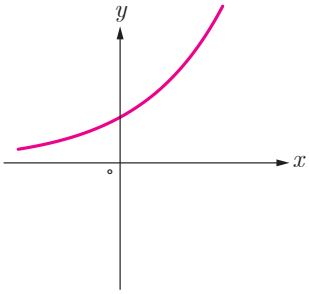
(ب) اکیداً صعودی



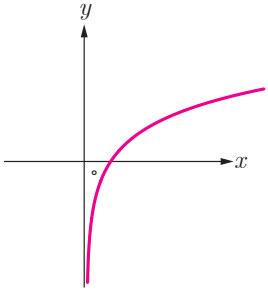
(پ)

$(-\infty,0]$ ← اکیدا نزولی

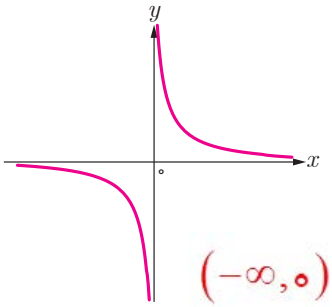
$[0,+\infty)$ ← اکیدا صعودی



(ت) اکیداً صعودی



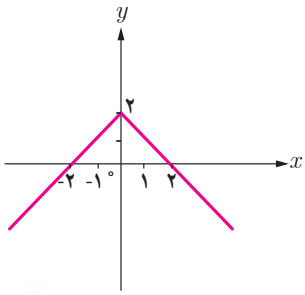
(ث) اکیداً صعودی



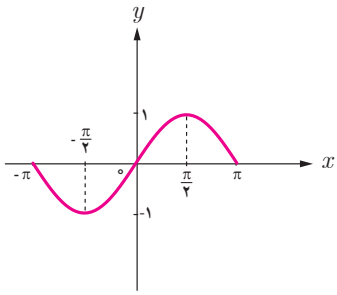
(ج)

$(-\infty,0)$ اکیدا نزولی (نزولی)

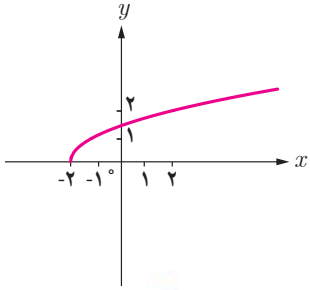
$(0,+\infty)$ اکیدا نزولی (نزولی)



(چ)



(ح)



(خ)

$[-2,+\infty)$ اکیدا صعودی

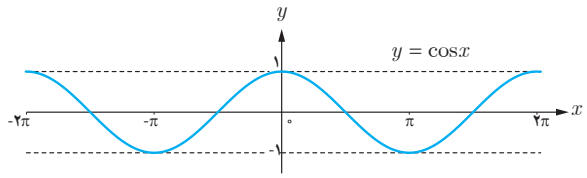
$(-\infty,0]$ ← صعودی

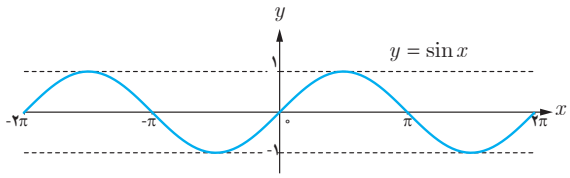
$[0,+\infty)$ ← نزولی

در بازه های $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$، $\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$ نزولی و در بازه $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ صعودی است

**کار در کلاس**

نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم شده است. صعودی یا نزولی بودن آنها را در بازه‌های مشخص شده تعیین نمایید.



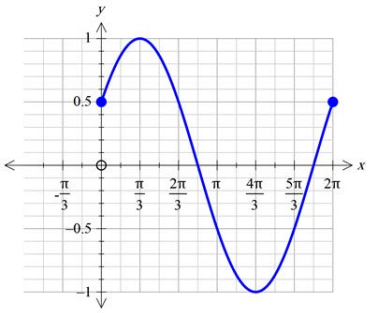

| $x$ | $[-۲\pi,-\frac{۳\pi}{۲}]$ | $[-\frac{۳\pi}{۲},-\pi]$ | $[-\pi,-\frac{\pi}{۲}]$ | $[-\frac{\pi}{۲},۰]$ | $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ | $[\frac{\pi}{۲},\pi]$ | $[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ | $[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\sin x$ | صعودی | نزولی | نزولی | صعودی | صعودی | نزولی | نزولی | صعودی |

| $x$ | $[-۲\pi,-\frac{۳\pi}{۲}]$ | $[-\frac{۳\pi}{۲},-\pi]$ | $[-\pi,-\frac{\pi}{۲}]$ | $[-\frac{\pi}{۲},۰]$ | $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ | $[\frac{\pi}{۲},\pi]$ | $[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ | $[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\cos x$ | نزولی | نزولی | صعودی | صعودی | نزولی | نزولی | صعودی | صعودی |

**کار در کلاس**

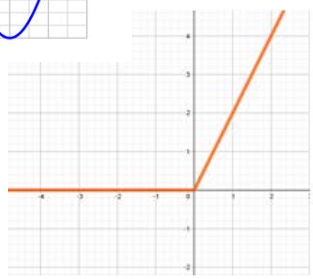
نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

الف) $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{۳})$




در بازهای $[\frac{۴\pi}{۳},۲\pi]$ و $[۰,\frac{\pi}{۳}]$ صعودی ودر بازه $[\frac{\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳}]$ نزولی

ب) $g(x)=x+|x|$



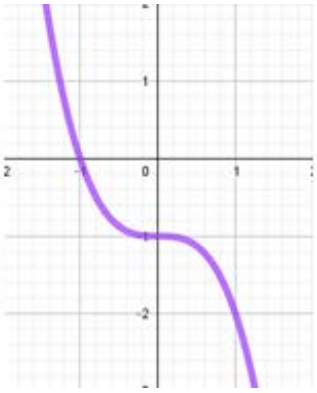
ب:

در R صعودی

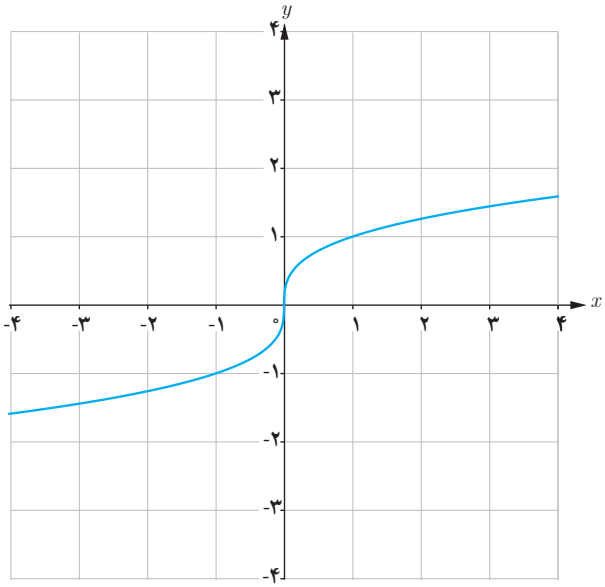
در $\mathbb{R}\geq ۰$ اکیداً صعودی

در $\mathbb{R}\leq ۰$ ثابت

پ) $t(x)=-x^{۳}-۱$



اکیداً نزولی



## فعالیت

به نمودار تابع روبه‌رو دقت کنید.

الف) این تابع اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟ اکیداً صعودی

ب) این تابع یک به یک است؟ بله

پ) آیا تابعی می‌تواند در کدام صورت اکیداً نزولی باشد ولی یک به یک نباشد؟

خیر، طبق تعریف دو ایکس متمایز دارای تصاویر متمایز هستند پس یک به یک می باشند

## تمرین

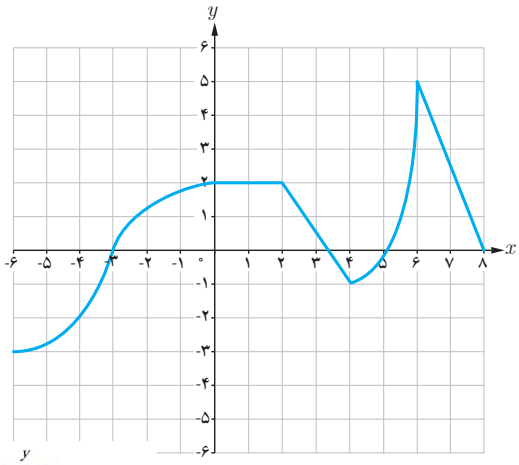
۱ نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.

الف) $y=(x-1)^3-1$ ب) $y=(x+2)^3-2$

۲ نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-2x-3 & x<-4\\ 3 & -4\le x<2\\ 3x-2 & x\ge 2\end{cases}$$

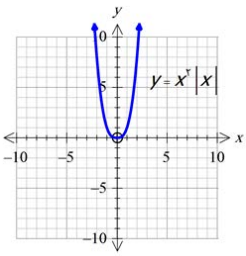
۳ با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



صعودی $x\in(-\infty,0]\cup[4,6]$

نزولی $x\in[2,4]\cup[6,8]$

ثابت $x\in[0,2]$




۴ تابع نمایی $y=2^x-2$ و تابع لگاریتمی $y=-\log_2^x+2$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

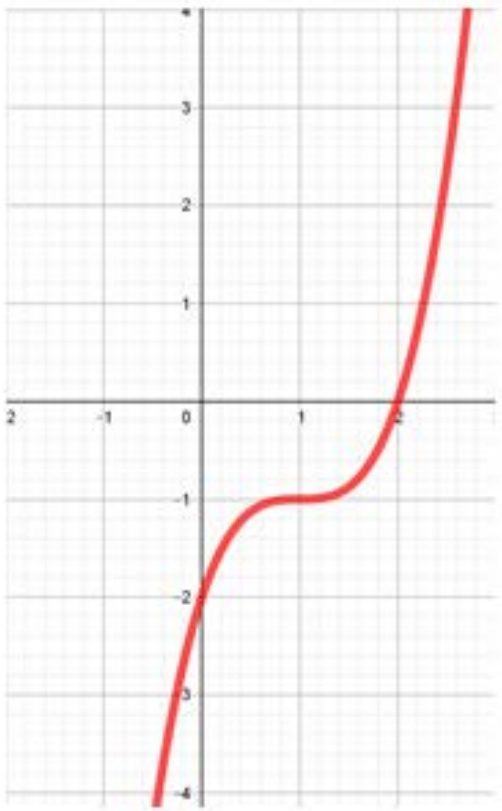
۵ تابع $y=x^2|x|$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ نزولی است، حداکثر مقدار $a$ چقدر است؟ صفر

۶ تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً نزولی باشد.

$\begin{cases}y=3^x\\ y=x^3\end{cases}$ اکیداً صعودی

$\begin{cases}y=\left(\frac{1}{2}\right)^x\\ y=-x^3\end{cases}$ اکیدا نزولی

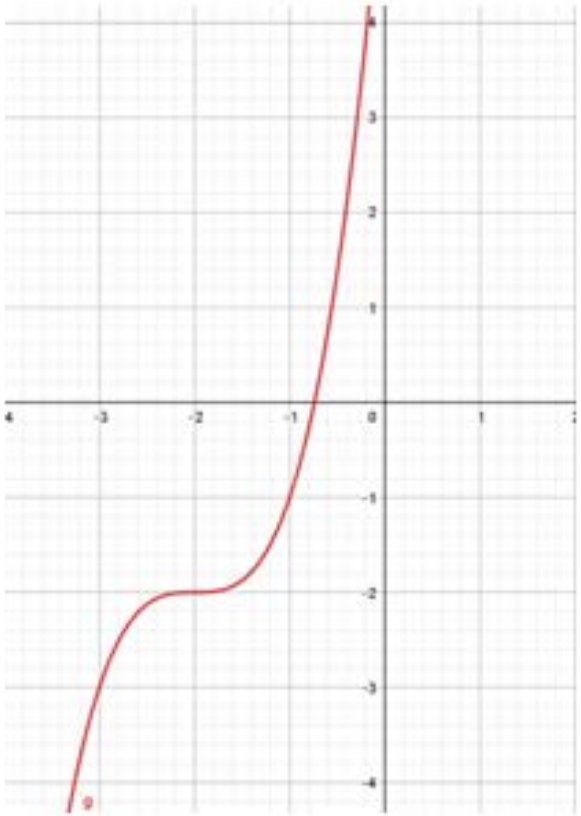
تمرین۱: الف



$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \mathbb{R}$$

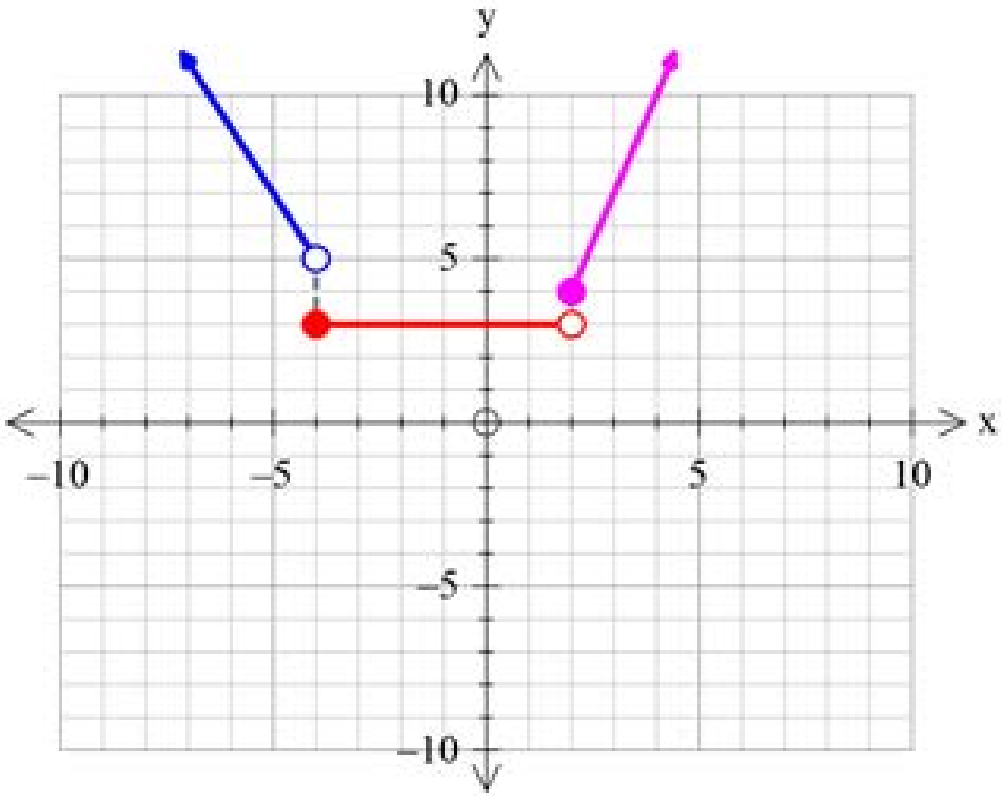
ب



$$D_f = (-\infty, +\infty)$$

$$R_f = (-\infty, +\infty)$$

تمرین ۲:

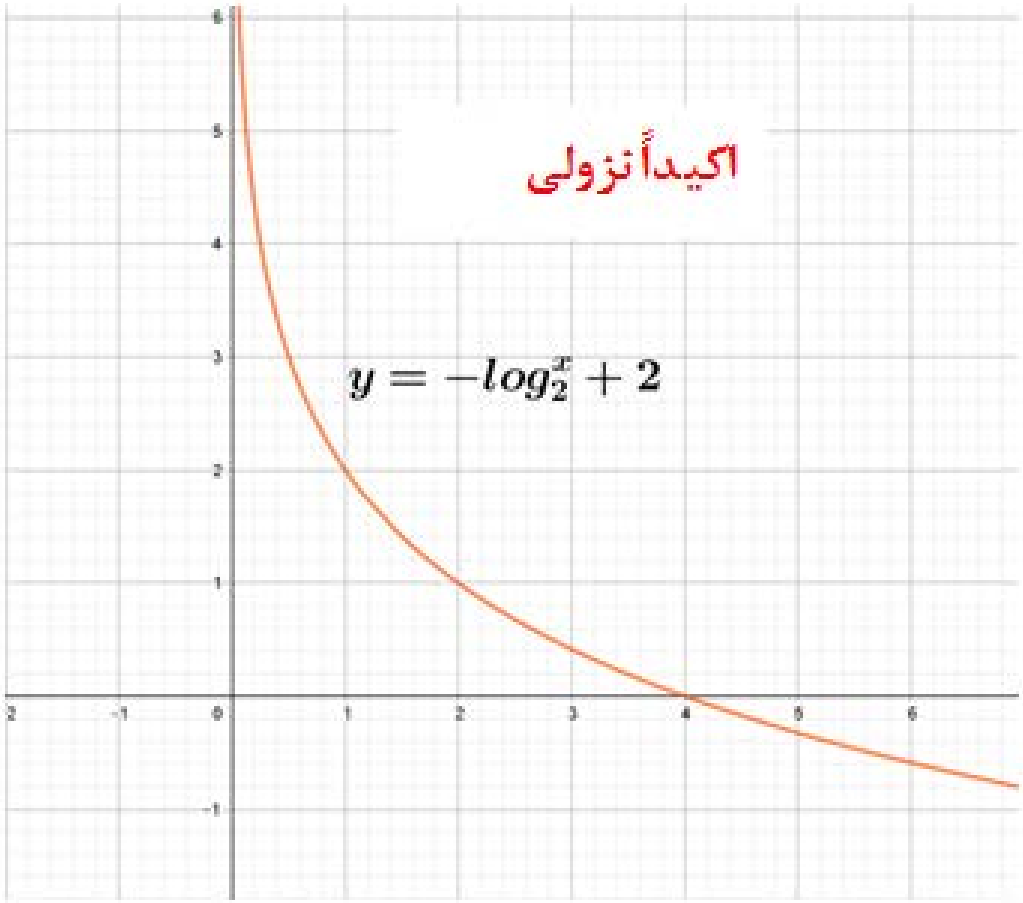


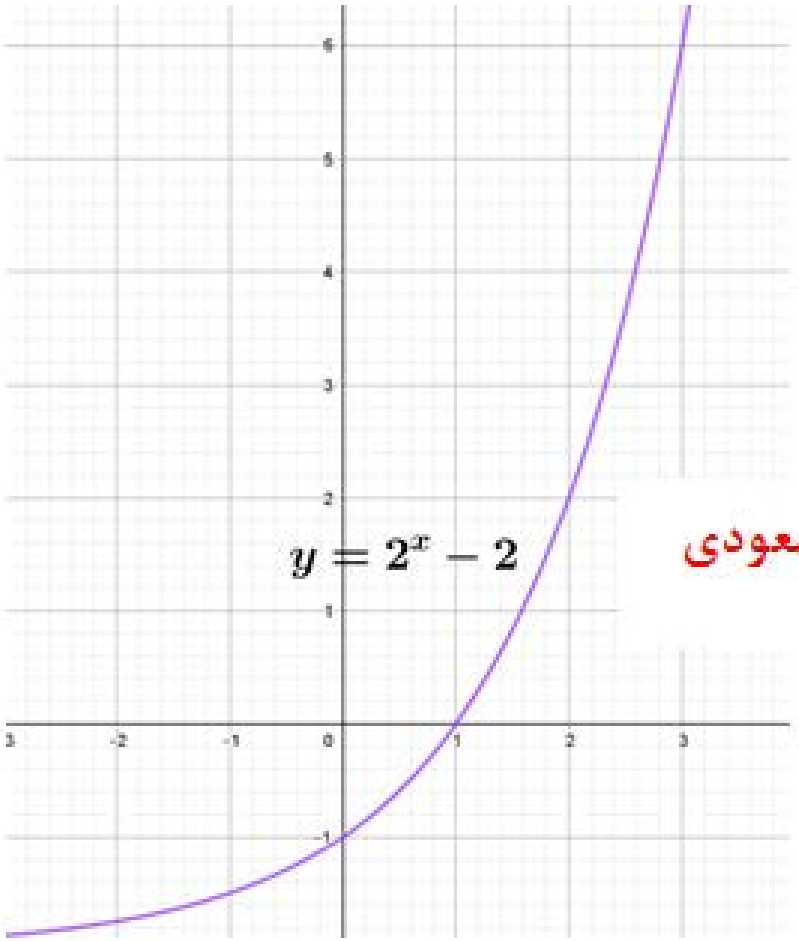

صعودی $x \in [۲, +\infty)$

نزولی $x \in (-\infty, -۴)$

ثابت $x \in [-۴, ۲)$

تمرین ۴:




اکیداً صعودی

درس دوم

# ترکیب توابع

در سال گذشته با اعمال جبری روی توابع آشنا شدیم، در این درس می‌خواهیم مفهوم ترکیب توابع را بررسی کنیم.

## فعالیت

هنگامی که غذا از یخچال بیرون آورده می‌شود، دمای آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد و مقدار این دما با استفاده از تابع $d(t)$ با ضابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$d(t) = ۴t+۲ \quad ; \quad ۰ \leq t \leq ۳$ (واحد $t$، ساعت است.)

الف) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به‌دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$d(۲) = ۱۰$

دمای غذایی که دو ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر ۱۰ درجهٔ سانتی‌گراد است.

$d(۱) = ۴\times۱+۲=۶$ ..... دمای غذایی که یک ساعت قبل از یخچال بیرون آورده شده است برابر ۶ است

$d(۳) = ۴\times۳+۲=۱۴$ ..... دمای غذایی که سه ساعت قبل از یخچال بیرون آورده شده است برابر ۱۴ است

همچنین اگر یک مادهٔ غذایی را با دمای ۲ درجهٔ سانتی‌گراد از یخچال بیرون آوریم، میزان افزایش تعداد باکتری‌ها با بالا رفتن دما با استفاده از تابع $n(d)$ با ضابطهٔ زیر به دست می‌آید :

$n(d) = ۲۰d^۲ - ۸۰d + ۵۰۰; \quad ۲ \leq d \leq ۱۴$

که در این تابع، $d$ دمای مادهٔ غذایی پس از خروج از یخچال برحسب درجهٔ سانتی‌گراد است.

ب) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به‌دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$n(۱۰) = ۲۰(۱۰)^۲ - ۸۰(۱۰) + ۵۰۰ = ۱۷۰۰$

یعنی تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی، پس از خروج از یخچال با رسیدن به دمای ۱۰ درجهٔ سانتی‌گراد به ۱۷۰۰ افزایش یافته است.

$n(۲) = ۲۰\times۲^۲ - ۸۰\times۲ + ۵۰۰ = ۴۲۰$ ..... تعداد باکتریهای موجود در غذا با دمای ۲ درجه، ۴۲۰تا است

$n(۳) = ۲۰\times۳^۲ - ۸۰\times۳ + ۵۰۰ = ۴۴۰$ ..... تعداد باکتریهای موجود در غذا با دمای ۳ درجه، ۴۴۰ تاست

به‌طور کلی می‌توان گفت با استفاده از تابع $d$، با داشتن زمان، می‌توان دمای غذا و با استفاده از تابع $n$، با داشتن دمای غذا، می‌توان تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد، به عبارت دیگر :

زمان $\xrightarrow{d}$ دما $\xrightarrow{n}$ تعداد باکتری‌ها

**از الف و ب می‌توان نتیجه گرفت : تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی که به میزان ۲ ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر ۱۷۰۰ تاست.**

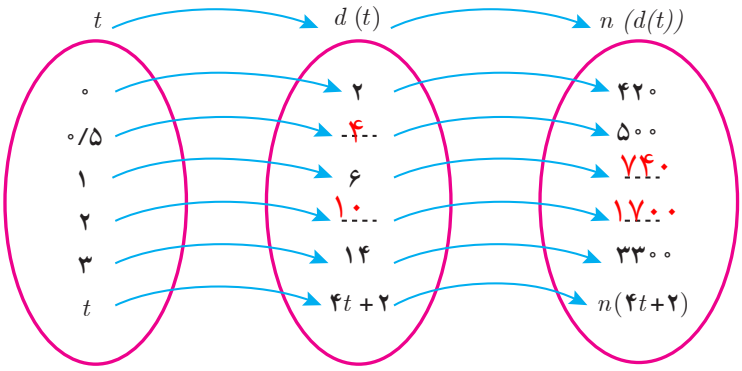
پ) جدول روبه‌رو را کامل کنید و به کمک آن نمودار را تکمیل نمایید.

| $t$ | $d(t)=۴t+۲$ | $n(d(t))=n(۴t+۲)$ |
|---|---|---|
| ۰ | $d(۰)=۲$ | $n(d(۰))=n(۲)=۴۲۰$ |
| ۰/۵ | $d(۰/۵)=۴$ | $n(d(۰/۵))=n(\cdots)=۵۰۰$ |
| ۱ | $d(۱)=۶$ | $n(d(۱))=n(۶)=۷۴۰$ |
| ۲ | $d(۲)=۱۰$ | $n(d(۲))=n(۱۰)=\cdots۱۷۰۰$ |
| ۳ | $d(۳)=۱۴$ | $n(d(۳))=n(۱۴)=۳۳۰۰$ |

همان‌طور که دیدیم، می‌توان با داشتن زمان، دمای غذا را به‌دست آورد و با داشتن دما، تعداد باکتری‌ها قابل محاسبه است.

آیا به نظر شما می‌توان با داشتن زمان و بدون داشتن دما، تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد؟

به بیان دیگر آیا می‌توان تابعی ساخت که $n$ را برحسب $t$ مشخص کند؟



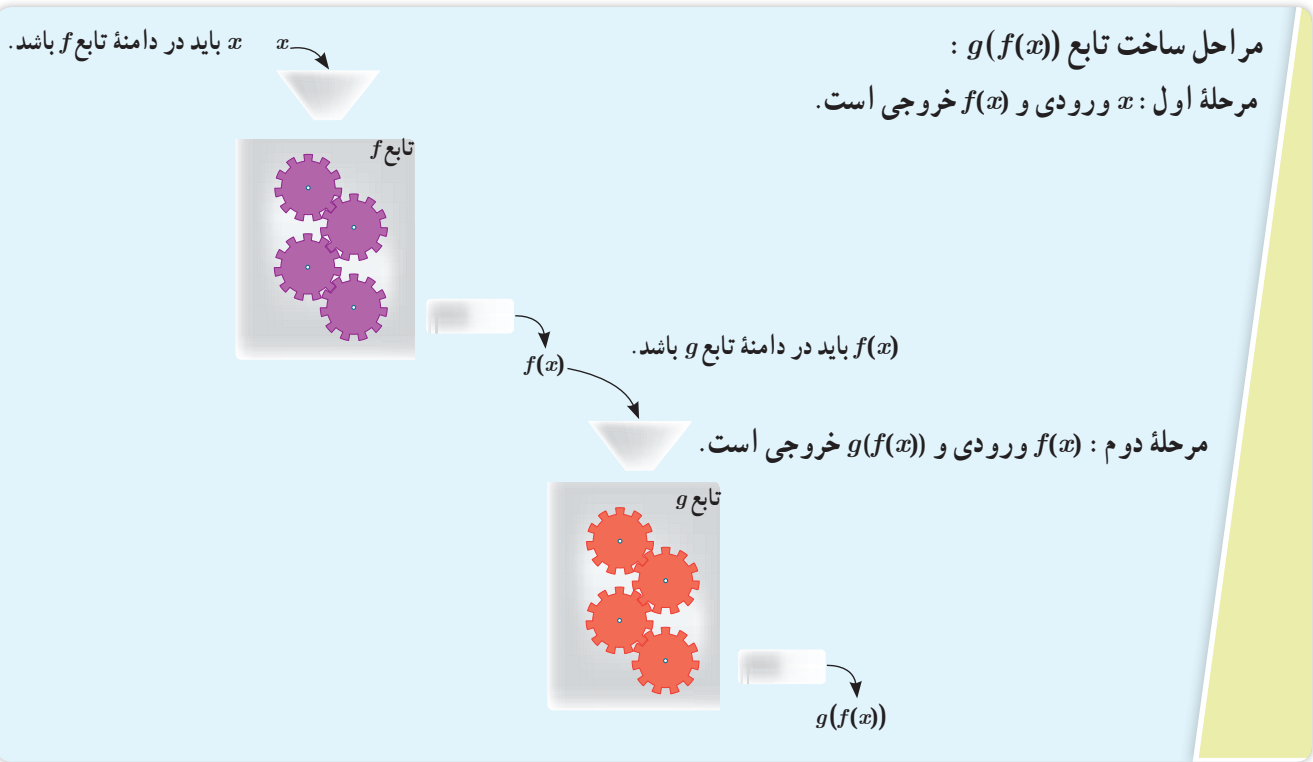

برای به‌دست آوردن چنین تابعی به‌صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$n(d(t))=n(۴t+۲)=۲۰(۴t+۲)^۲-۸۰(۴t+۲)+۵۰۰=۲۰(۱۶t^۲+۱۶t+۴)-۳۲۰t-۱۶۰+۵۰۰=۳۲۰t^۲+۴۲۰ \qquad ۰\le t\le ۳$$

$n(d(t))$ تعداد باکتری‌های موجود در غذای یخچالی را نشان می‌دهد که به میزان $t$ ساعت از یخچال بیرون مانده است.

**مراحل ساخت تابع $g(f(x))$ :**

**مرحلهٔ اول : $x$ ورودی و $f(x)$ خروجی است.**



اگر $f$ و $g$ دو تابع باشند به‌طوری که برد تابع $f$ و دامنهٔ تابع $g$ اشتراک ناتهی داشته باشند، تابع $g(f(x))$ را با نماد $(gof)(x)$ نمایش می‌دهیم و تابع $gof$ را تابع مرکب می‌نامیم، به عبارت دیگر :

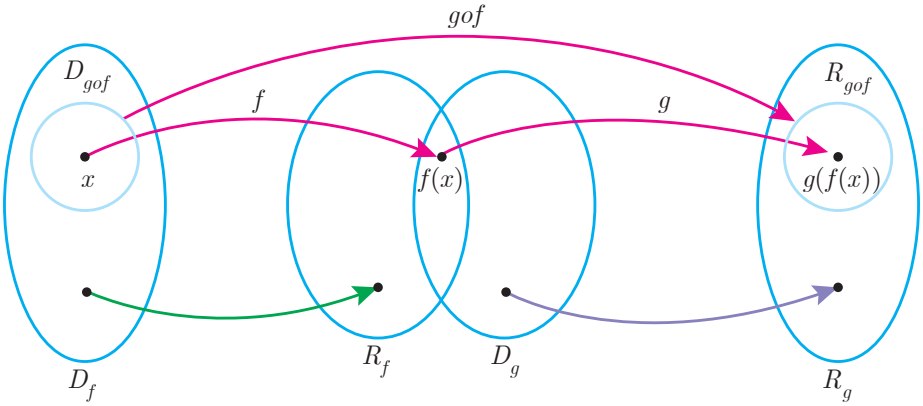
$$(gof)(x) = g(f(x))$$

**دامنهٔ تابع مرکب :**

دامنهٔ تابع مرکب $gof$ مجموعه $x$هایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند :

۱ــ $x$ در دامنهٔ $f$ قرار داشته باشد.

۲ــ $f(x)$ در دامنهٔ $g$ قرار داشته باشد.




بنابراین دامنهٔ تابع $gof$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به‌صورت مشابه دامنهٔ تابع $fog$ به صورت زیر است :

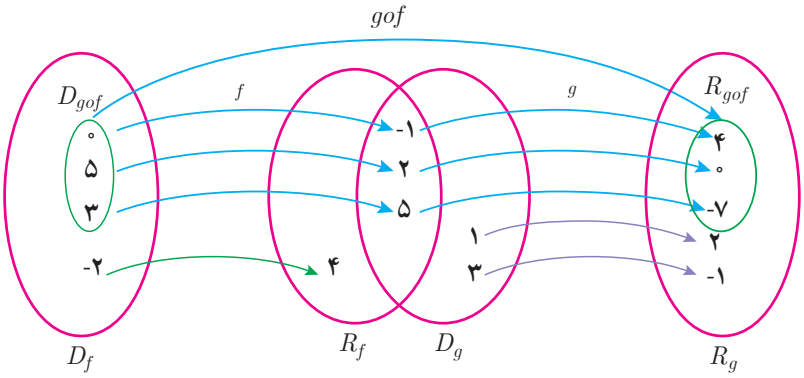
$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

و همچنین :

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

**مثال :** اگر $g = \{(۱,۲),(۳,-۱),(۲,۰)(-۱,۴),(۵,-۷)\}$ و $f = \{(۰,-۱),(۵,۲),(۳,۵),(-۲,۴)\}$ ، تابع $gof$ را در صورت امکان بنویسید.

$$\left.\begin{array}{l}(gof)(۰) = g(f(۰)) = g(-۱) = ۴\\ (gof)(۵) = g(f(۵)) = g(۲) = ۰\\ (gof)(۳) = g(f(۳)) = g(۵) = -۷\\ (gof)(-۲) = g(f(-۲)) = g(۴) : \text{تعریف نشده}\end{array}\right\} \rightarrow gof = \{(۰,۴),(۵,۰),(۳,-۷)\}$$



**کار در کلاس**

با توجه به جدول‌های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به‌دست آورید.

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| ۳- | ۸ |
| ۲- | ۳ |
| ۱- | ۰ |
| ۰ | ۱- |
| ۱ | ۰ |
| ۲ | ۳ |
| ۳ | ۸ |

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| ۳- | ۷- |
| ۲- | ۵- |
| ۱- | ۳- |
| ۰ | ۱- |
| ۱ | ۳ |
| ۲ | ۵ |
| ۳ | ۵ |

الف) $(fog)(۱) = f(g(۱)) = f(۰) = -۱$

ب) $(fog)(-۱) = f(g(-۱)) = f(۰) = -۱$

پ) $(gof)(۰) = g(f(۰)) = g(-۱) = ۰$

ت) $(gog)(-۲) = g(g(-۲)) = g(۳) = ۸$

ث) $(gof)(۲) = g(f(۲)) = g(۵)$ تعریف نشده

ج) $(fof)(۱) = f(f(۱)) = f(۳) = ۵$

**مثال :** اگر $f(x) = x - ۲$ و $g(x) = x^۲ - ۱$ ، دامنه و ضابطهٔ تابع $gof$ را به‌دست آورید.

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}, D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-۲) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = (f(x))^۲ - ۱ = (x-۲)^۲ - ۱$$

**مثال :** اگر $f(x) = \sqrt{x-۱}$ , $g(x) = ۲x^۲ - ۱$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع $fog$ و $gof$ را به‌دست آورید.

$$D_f = [۱, +\infty), D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [۱, +\infty) \mid \sqrt{x-۱} \in \mathbb{R}\} = [۱, +\infty)$$

عبارت $\sqrt{x-۱} \in \mathbb{R}$ به این معنی است که $\sqrt{x-۱}$ در اعداد حقیقی با معنی باشد یعنی $x - ۱ \geq ۰$ که بازهٔ $[۱, +\infty)$ به‌دست می‌آید.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = ۲(f(x))^۲ - ۱ = ۲(\sqrt{x-۱})^۲ - ۱ = ۲(x-۱) - ۱ = ۲x - ۳$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid ۲x^۲ - ۱ \in [۱, +\infty)\}$$

عبارت $۲x^۲ - ۱ \in [۱, +\infty)$ به این معنی است که عبارت $۲x^۲ - ۱$ متعلق به بازهٔ $[۱, +\infty)$ باشد، یعنی $۲x^۲ - ۱ \geq ۱$، بنابراین :

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid ۲x^۲ - ۱ \geq ۱\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^۲ \geq ۱\} = (-\infty, -۱] \cup [۱, +\infty)$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x) - ۱} = \sqrt{۲x^۲ - ۱ - ۱} = \sqrt{۲x^۲ - ۲}$$

اگر دامنه و ضابطهٔ توابع $gof$ و $fog$ را با هم مقایسه کنید چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

**تذکر :** دامنهٔ توابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به دست می‌آوریم نه از روی ضابطهٔ آن. مثلاً در اینجا می‌بینیم که دامنهٔ تابع $gof$ با توجه به ضابطهٔ آن $\mathbb{R}$ است در صورتی که برابر $[۱, +\infty)$ است.

**کار در کلاس**

اگر $f(x) = \frac{۲}{x-۱}$ و $g(x) = \frac{۳}{x}$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع $fog$ و $fof$ را به‌دست آورید.

$$fog(x) = f\left(g(x)\right) = \frac{۲}{g(x)-۱} = \frac{۲}{\frac{۳}{x}-۱} = \frac{۲x}{۳-x}$$

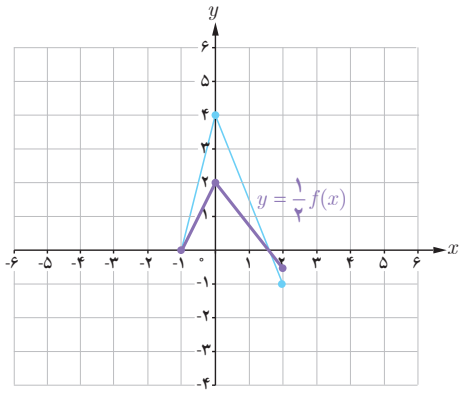
$$D_f = \mathbb{R} - \{۱\}, D_g = \mathbb{R} - \{۰\}$$

$$D_{fog} = \left\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} - \{۰\} \mid \frac{۳}{x} \in \mathbb{R} - \{۱\}\right\} = \mathbb{R} - \{۰, ۳\}$$

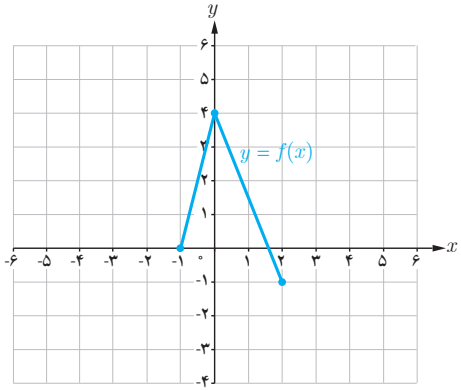
## «تبدیل نمودار توابع»

**یادآوری :** همان‌طور که در پایهٔ یازدهم دیدیم برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ را با حفظ طول آن نقطه، $k$ برابر کنیم.

**مثال :** در شکل زیر نمودار تابع $f$ و با کمک آن نمودار توابع $y=\frac{۱}{۲}f(x)$ ، $y=-f(x)$ و $y=۲f(x)$ رسم شده است.



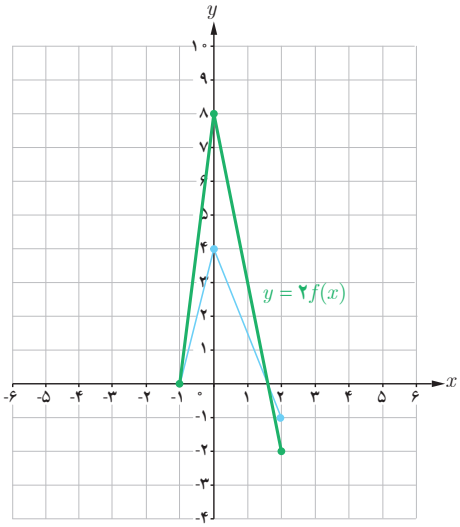

| $x$ | $\frac{۱}{۲}f(x)$ |
|---|---|
| ۱- | ۰ |
| ۰ | ۲ |
| ۲ | $-\frac{۱}{۲}$ |




| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| ۱- | ۰ |
| ۰ | ۴ |
| ۲ | ۱- |

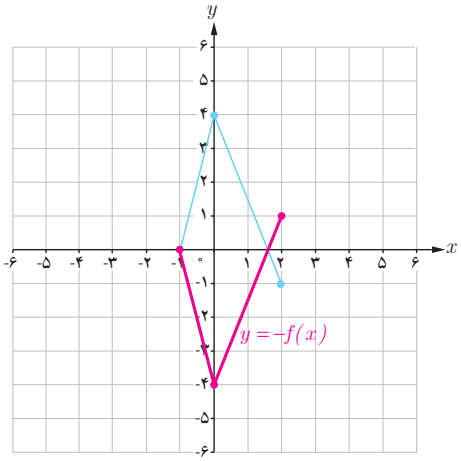
برای رسم نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(x)$ عرض هر نقطهٔ نمودار تابع $f$ را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم.

از آنجایی که ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ و $kf(x)=۰$ یکسان است بنابراین محل تلاقی نمودار توابع $f$ و $kf$ با محور $x$ها یکسان است.




| $x$ | $۲f(x)$ |
|---|---|
| ۱- | ۰ |
| ۰ | ۸ |
| ۲ | ۲- |

برای رسم نمودار $y=۲f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع $f$ را در ۲ ضرب می‌کنیم.



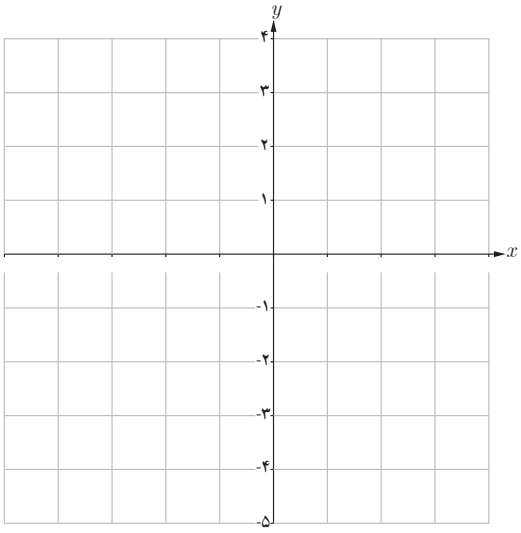

| $x$ | $-f(x)$ |
|---|---|
| ۱- | ۰ |
| ۰ | ۴- |
| ۲ | ۱ |

برای رسم نمودار $y=-f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع $f$ را در ۱- ضرب می‌کنیم.

دامنهٔ تابع با ضابطهٔ تابع $y=kf(x)$ همان دامنهٔ تابع $y=f(x)$ است، اما برد آنها لزوماً یکسان نیست.

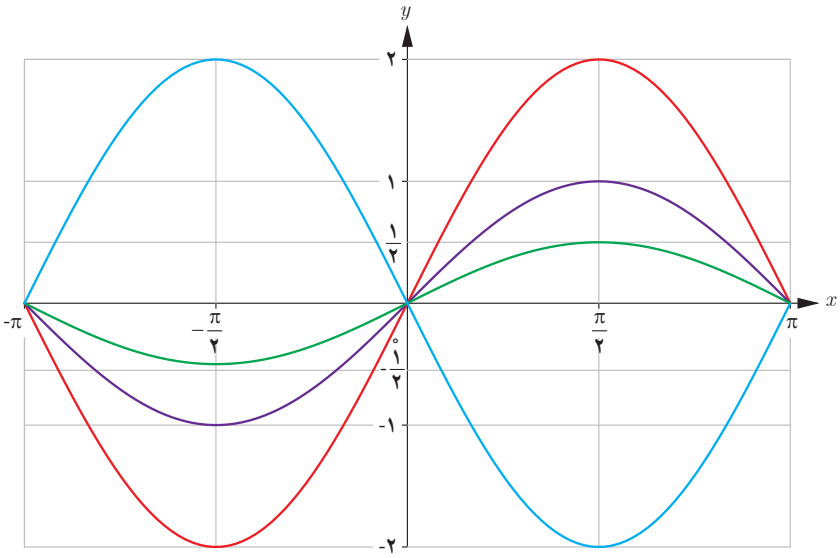
**کار در کلاس**

نمودار تابع $f(x)=|x-۲|$ را در بازهٔ $[-۲,۳]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x)=-|x-۲|$ و $h(x)=\frac{۱}{۲}|x-۲|$ و $k(x)=-\frac{۱}{۳}|۲-x|$ را رسم کنید.




**کار در کلاس**

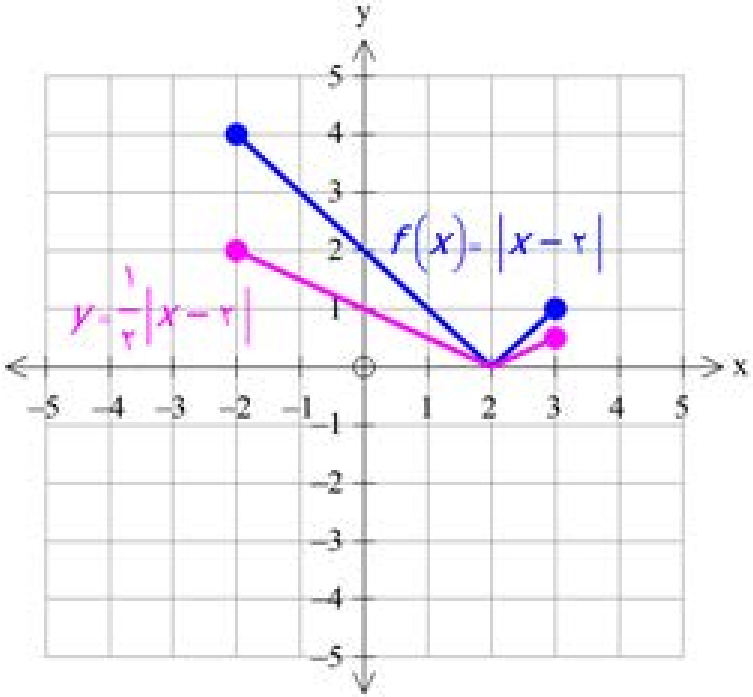
در شکل روبه‌رو نمودار توابع با ضابطه‌های $y=\sin x$، $y=۲\sin x$، $y=-۲\sin x$ و $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ رسم شده است. نمودار تابع $y=\sin x$ را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگر چگونه به کمک آن رسم شده است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.

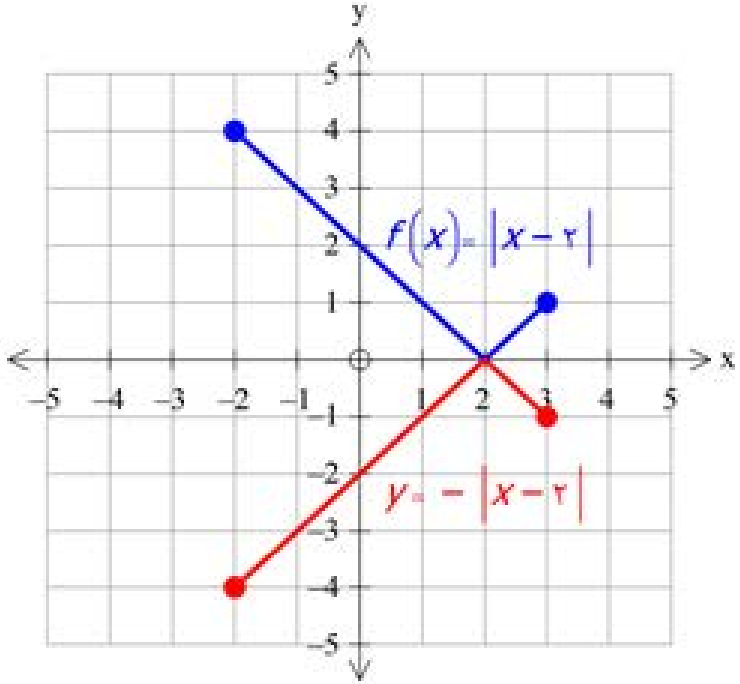


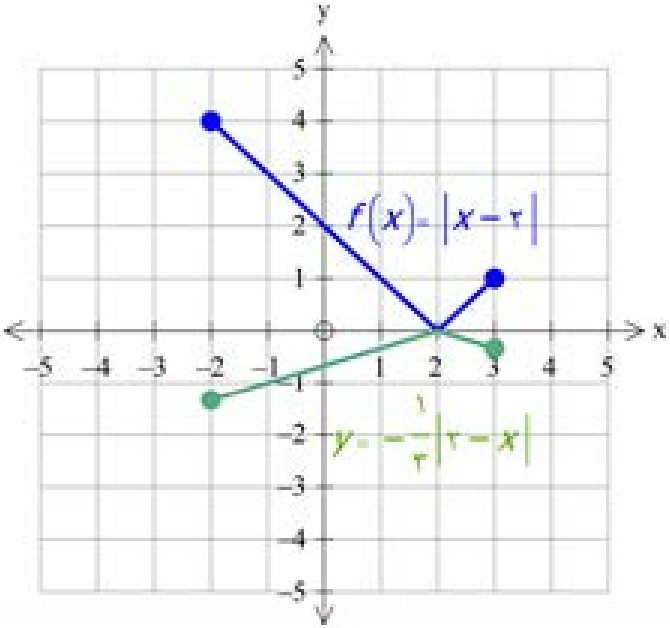

| | | |
|---|---|---|
| $y=\sin x$ | $D=[-\pi,\pi]$ | $R=[-۱,۱]$ |
| $y=۲\sin x$ | $D=[-\pi,\pi]$ | $R=[-۲,۲]$ |
| $y=-۲\sin x$ | $D=[-\pi,\pi]$ | $R=[-۲,۲]$ |
| $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ | $D=[-\pi,\pi]$ | $R=\left[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right]$ |

ییلاقات تالش

حل کار در کلاس بالای صفحه ۱۶



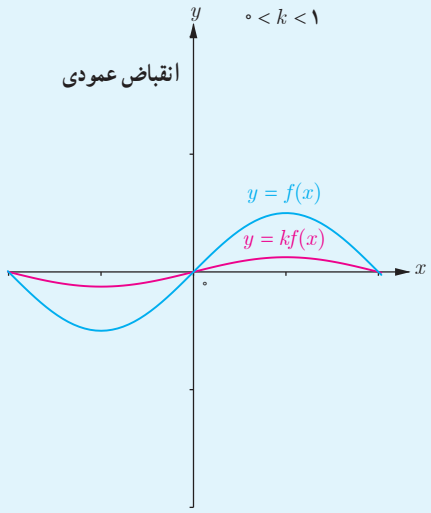



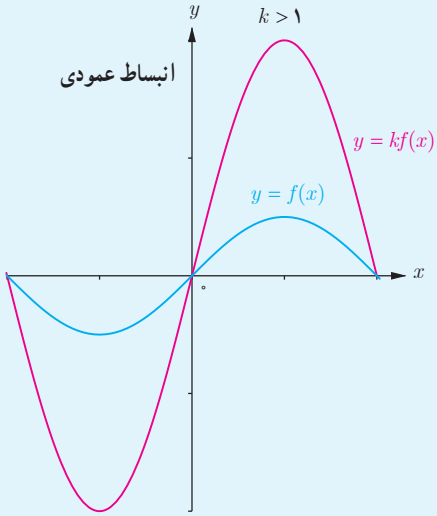



می‌توان گفت نمودار تابع $y = kf(x)$ تغییرات زیر را نسبت به نمودار $y = f(x)$ دارد :

اگر $k > ۰$، نمودار $y = kf(x)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور $y$ها به دست آورد.

اگر $k < ۰$ ابتدا نمودار $f$ نسبت به محور $x$ها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.



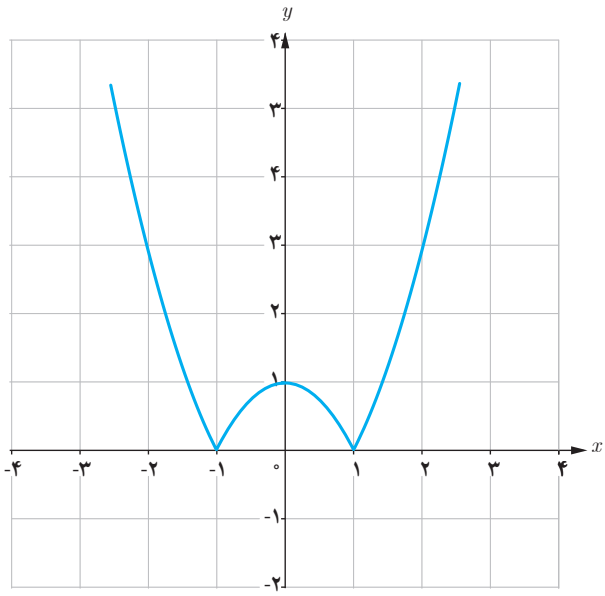

اگر $۰ < k < ۱$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور $y$ها با ضریب $k$ فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض عمودی یافته است.

اگر $k > ۱$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور $y$ها با ضریب $k$ کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط عمودی یافته است.

**رسم نمودار $|f|$ :**

برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار $f$ زیر محور $x$هاست، قرینهٔ نمودار $f$ را نسبت به محور $x$ها رسم کنیم.

**مثال :** در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=|x^۲ - ۱|$ رسم شده است.



## رسم نمودار $f(kx)$ با استفاده از نمودار $f(x)$ :

**مثال :** تابع $f(x)=x+۳$ را با دامنه $[-۴,۰]$ در نظر می‌گیریم و چگونگی رسم نمودار توابع $y=f(۲x)$ و $y=f(\frac{x}{۲})$ را بررسی می‌کنیم.
ضابطهٔ تابع $y=f(۲x)$ به صورت $f(۲x)=۲x+۳$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود :

$$-۴\leq ۲x\leq ۰ \rightarrow -۲\leq x\leq ۰ \rightarrow \text{دامنهٔ } f(۲x) : D=[-۲,۰]$$

همچنین ضابطهٔ تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ به صورت $f(\frac{x}{۲})=\frac{x}{۲}+۳$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود :

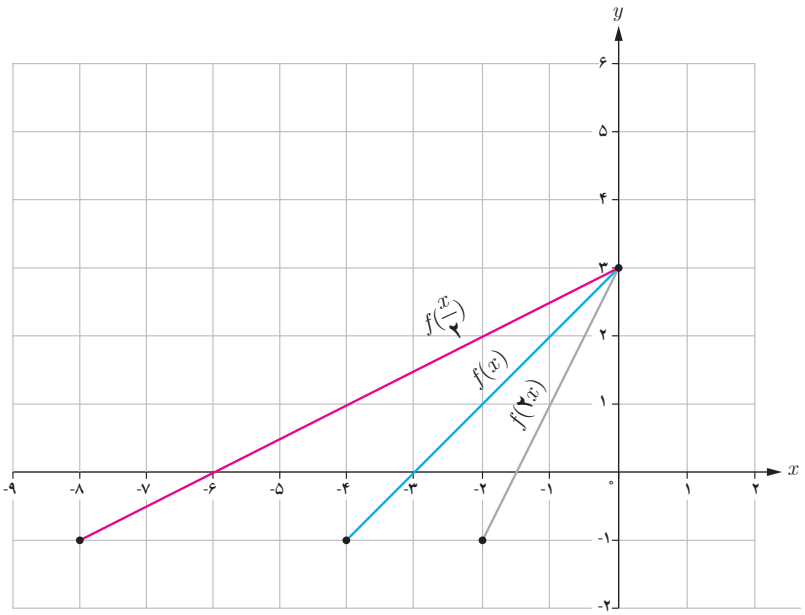
$$-۴\leq \frac{x}{۲}\leq ۰ \rightarrow -۸\leq x\leq ۰ \rightarrow \text{دامنهٔ } f(\frac{x}{۲}) : D=[-۸,۰]$$

برخی از نقاط نمودار این سه تابع در جدول‌های زیر نوشته شده است :

| $x$ | -۴ | -۳ | -۲ | -۱ | ۰ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=x+۳$ | -۱ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ |

| $x$ | -۲ | -۱/۵ | -۱ | -۰/۵ | ۰ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(۲x)=۲x+۳$ | -۱ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ |

| $x$ | -۸ | -۶ | -۴ | -۲ | ۰ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(\frac{x}{۲})=\frac{x}{۲}+۳$ | -۱ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ |

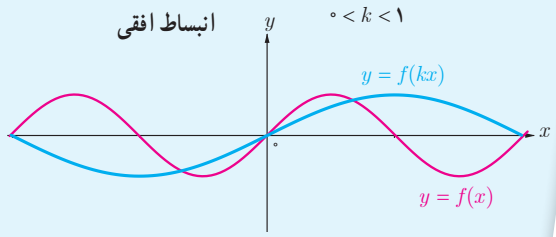



همان‌طور که ملاحظه می‌شود برد توابع $f(۲x)$ و $f(\frac{x}{۲})$ با برد تابع $f(x)$ یکسان است.

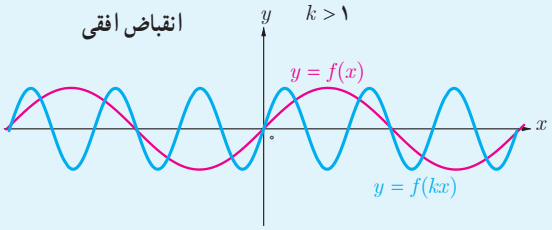
برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>0$، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور $x$ها به دست آورد.

اگر $k<0$، ابتدا نمودار $f$ نسبت به محور $y$ها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $\left|\frac{1}{k}\right|$ به‌طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.

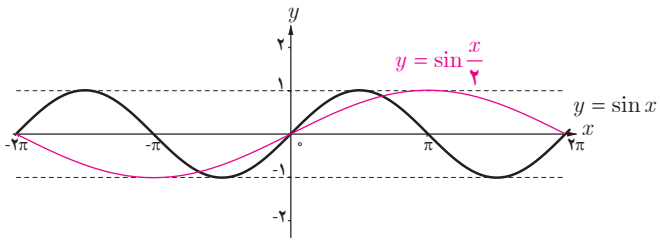


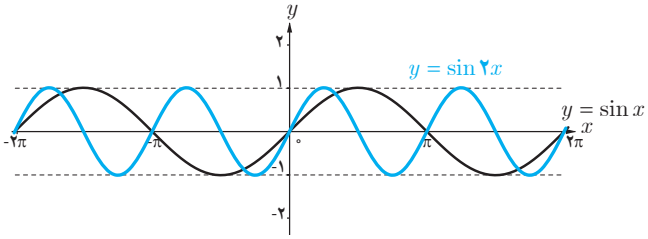

اگر $0<k<1$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور $x$ها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط افقی یافته است.




اگر $k>1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور $x$ها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض افقی یافته است.

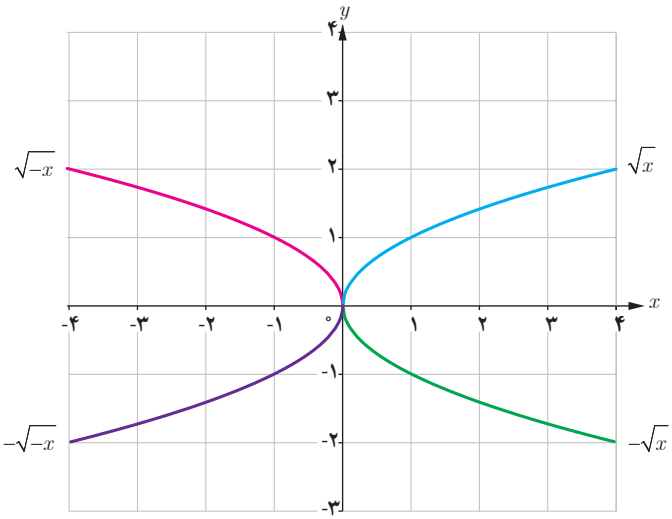
**مثال :** در شکل‌های زیر نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\sin 2x$ و $y=\sin\frac{x}{2}$ در بازهٔ $[-2\pi,2\pi]$ رسم شده‌اند. همان‌طور که می‌بینیم نمودار تابع $y=\sin 2x$ با انقباض نمودار تابع $y=\sin x$ در امتداد محورx‌ها و نمودار تابع $y=\sin\frac{x}{2}$ با انبساط نمودار تابع $y=\sin x$ در امتداد محورx‌ها به‌دست آمده است.




**کار در کلاس**

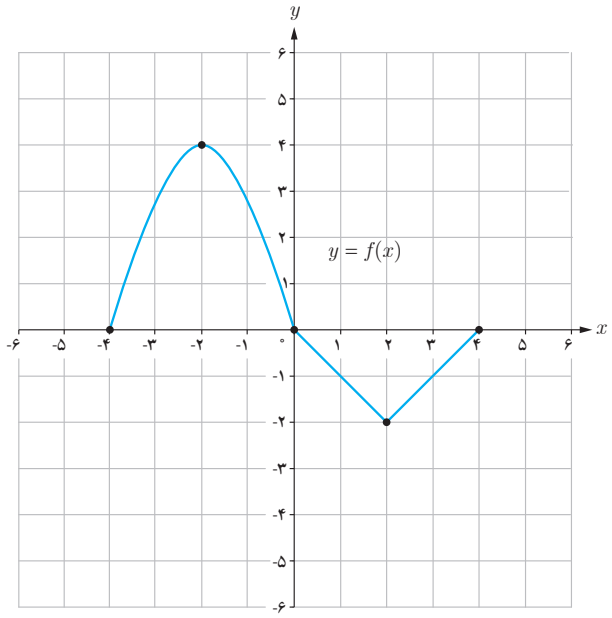
نمودار توابع $y=\sqrt{-x}$ و $y=-\sqrt{x}$ و $y=-\sqrt{-x}$ به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم شده‌است. دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.




| | | |
|---|---|---|
| $\sqrt{x}$ | $D=[0,+\infty)$ | $R=[0,+\infty)$ |
| $-\sqrt{x}$ | $D=[0,+\infty)$ | $R=(-\infty,0]$ |
| $-\sqrt{-x}$ | $D=(-\infty,0]$ | $R=(-\infty,0]$ |
| $\sqrt{-x}$ | $D=(-\infty,0]$ | $R=[0,+\infty)$ |

## کار در کلاس

نمودار تابع $f$ با دامنهٔ $[-۴,۴]$ به صورت زیر داده شده است، می‌خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y=f(۲x)$ و $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنیم.



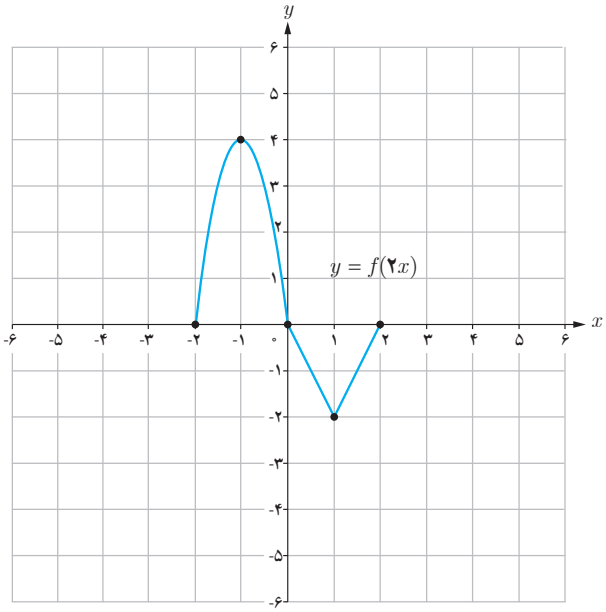

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $-۴$ | ۰ |
| $-۲$ | ۴ |
| ۰ | ۰ |
| ۲ | $-۲$ |
| ۴ | ۰ |

الف) برای تعیین دامنهٔ $y=f(۲x)$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$-۴ \le ۲x \le ۴ \rightarrow -۲ \le x \le ۲$$

بنابراین دامنهٔ تابع $y=f(۲x)$ بازهٔ $[-۲,۲]$ است. جدول نقاط را کامل کنید.

برای رسم نمودار $f(۲x)$، طول نقاط یا همان $x$ها باید محاسبه شود.



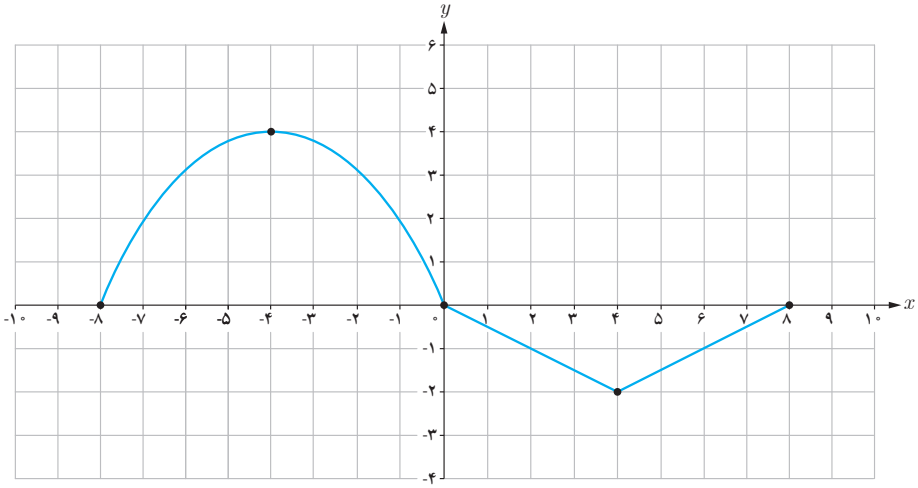

| $x$ | $۲x$ | $f(۲x)$ | $(x, f(۲x))$ |
|---|---|---|---|
| $-۲$ | $-۴$ | ۰ | $(-۲,۰)$ |
| $-۱$ | $-۲$ | ۴ | $(-۱,۴)$ |
| ۰ | ۰ | ۰ | $(۰,۰)$ |
| ۱ | ۲ | $-۲$ | $(۱,-۲)$ |
| ۲ | ۴ | ۰ | $(۲,۰)$ |

ب) برای تعیین دامنهٔ $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$-۴ \le \frac{۱}{۲}x \le ۴ \rightarrow -۸ \le x \le ۸$$

پس دامنهٔ تابع $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ بازهٔ $[-۸,۸]$ است و نقاط متناظر به‌صورت زیر است :

| $x$ | $f(\frac{۱}{۲}x)$ |
|---|---|
| $-۸$ | ۰ |
| $-۴$ | ۴ |
| ۰ | ۰ |
| ۴ | $-۲$ |
| ۸ | ۰ |




همان‌طور که ملاحظه شد برای رسم نمودار $y=f(۲x)$ طول هر نقطهٔ نمودار $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{۲}$ و برای رسم نمودار $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ طول هر نقطه را در ۲ ضرب می‌کنیم.

دامنهٔ تابع $y=f(kx)$ با دامنهٔ تابع $y=f(x)$ الزاماً یکسان نیست ولی برد تابع $y=f(kx)$ همان برد تابع $y=f(x)$ است.

## خواندنی

فرش‌بافی از جمله هنرهای اصیل و ارزشمندی است که سابقه‌ای طولانی در ایران دارد. این هنر اصیل با فرهنگ کهنسال این مرز و بوم پیوندی ناگسستنی داشته و در گذر قرن‌ها یکی از دستاوردهای مهم ایرانیان محسوب شده است، به طوری‌که جهانیان فرش را با نام ایران می‌شناسند. هنرمندان طراح فرش با الهام از طبیعت و یا ترکیبی از خیال و طبیعت نقش‌هایی را بر روی آثارشان جلوه‌گر می‌سازند که در آنها اشکالی به صورت شکسته، گردان و یا تلفیقی طراحی می‌کنند. در این طراحی‌ها از انتقال و تبدیل نیز استفاده می‌شود.

## تمرین

$f\circ g=\{(۵,۸),(۳,۳),(۷,۸),(۹,۴)\}$ $\quad$ $g\circ f=\{(۵,۵)\}$

۱ اگر $f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$ و $g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$ ، توابع $fog$ و $gof$ را به‌دست آورید.

۲ در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^۲-۵ \quad ; \quad g(x)=\sqrt{x+۶} \quad : \quad D_{fog}\,,(fog)(x)$

ب) $f(x)=\sqrt{۳-۲x} \quad ; \quad g(x)=\dfrac{۶}{۳x-۵} \quad : \quad D_{fog}\,,(fog)(x)$

پ) $f(x)=\sqrt{x+۲} \quad ; \quad g(x)=\sqrt{x^۲-۱۶} \quad : \quad D_{gof}\,,(gof)(x)$

ت) $f(x)=\sin x \quad ; \quad g(x)=\sqrt{x} \quad : \quad D_{gof}\,,(gof)(x)$

۳ اگر $f\big(g(x)\big)=۳x^۲-۶x+۱۴$ و $f(x)=۳x-۴$، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به دست آورید.

۴ مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۴}$ ؛ آنگاه $(fog)(۵)=-۲۵$

ب) برای دو تابع $f$ و $g$ که $f\neq g$ تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

پ) اگر $f(۷)=۵$ و $g(۴)=۷$ ، آنگاه $(fog)(۴)=۵$.

ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۲x-۱$، آنگاه $(fog)(۵)=g(۲)$ .

۵ الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج‌شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام‌یک از حالت‌های الف یا ب به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

۶ تابع $h(x)=(۳x^۲-۴x+۱)^۵$ ترکیب کدام دو تابع زیر است؟

الف) $f(x)=\sqrt[۵]{x} \quad ; \quad g(x)=۳x^۲-۴x+۱$

ب) $k(x)=x^۵ \quad ; \quad l(x)=۳x^۲-۴x+۱$

۷ هریک از توابع زیر را به‌صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

الف) $h(x)=\sqrt[۳]{x^۲+۱}$

ب) $l(x)=\sqrt{x^۲+۵}$

## پاسخ تمرین ۲

الف)

$$f(x)=x^{۲}-۵ \qquad g(x)=\sqrt{x+۶}$$

$$D_f=\mathbb{R} \qquad D_g=[-۶,+\infty)\Rightarrow D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in[-۶,+\infty) \mid \sqrt{x+۶}\in\mathbb{R}\}=$$

$$\sqrt{x+۶}\in\mathbb{R} \qquad \rightarrow D_{fog}=[-۶,+\infty)\cap\mathbb{R}=[-۶,+\infty)$$

$$(fog)_{(x)}=f(g(x))=(g(x))^{۲}-۵=\left(\sqrt{x+۶}\right)^{۲}-۵=x+۱$$

ب)

$$f(x)=\sqrt{۳-۲x} \qquad g(x)=\frac{۶}{۳x+۵}$$

$$D_f=\left(-\infty,\frac{۳}{۲}\right] \qquad D_g=\mathbb{R}-\left\{\frac{۵}{۳}\right\}$$

$$D_{fog}=\left\{x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{۵}{۳}\right\}\,\middle|\,\frac{۶}{۳x+۵}\in\left(-\infty,\frac{۳}{۲}\right]\right\}=\left(-\infty,\frac{۵}{۳}\right)\cup\left[۳,+\infty\right)$$

$$(fog)_{(x)}=f\left(g(x)\right)=\sqrt{۳-۲g(x)}=\sqrt{۳-۲\left(\frac{۶}{۳x-۵}\right)}=\sqrt{\frac{۹x-۲۷}{۳x-۵}}$$

پ)

$$f(x)=\sqrt{x+۲} \qquad g(x)=\sqrt{x^{۲}-۱۶}$$

$$D_f=[-۲,+\infty) \qquad D_g=(-\infty,-۴]\cup[۴,+\infty)$$

$$D_{gof}=\{x\in[-۲,+\infty)\mid \sqrt{x+۲}\in(-\infty,-۴]\cup[۴,+\infty)\}=[۱۴,+\infty)$$

$\sqrt{x+۲}\le -۴$ **یا** $\sqrt{x+۲}\ge ۴\rightarrow x+۲\ge ۱۶\rightarrow x\ge ۱۴\Rightarrow x\in[۱۴,+\infty)$

همواره نادرست است

$$(gof)_{(x)}=g(f(x))=\sqrt{(f(x))^{۲}-۱۶}=\sqrt{x-۱۴}$$

ت)

$$f(x)=\sin x \qquad g(x)=\sqrt{x}$$

$$D_f=\mathbb{R} \qquad D_g=[۰,+\infty)$$

$$D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}\mid \sin x\in[۰,+\infty)\}=\mathbb{R}\cap[۲k\pi,۲k\pi+\pi]\,(k\in\mathbb{Z})=[۲k\pi,۲k\pi+\pi]_{k\in\mathbb{Z}}$$

$$\sin x\ge ۰\xrightarrow{\text{ناحیه اول ودوم}} x\in[۲k\pi,۲k\pi+\pi]\,(k\in\mathbb{Z})$$

$$(gof)_{(x)}=g(f(x))=\sqrt{(f(x))}=\sqrt{\sin x}$$

تمرين:

$$7x^2 - 5x + 1 = 3x^2 - 4x + 5 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 5 = 4x^2 - 5x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 5 = 4x^2 - 5x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 5 = 4x^2 - 5x + 1$$

$$\boxed{f(x) = x^2 - 4x + 5} \Rightarrow$$

$$f(x) = 3x^2 - 4x - 5 \qquad f(x) = 4x^2 - 5x + 1$$

پاسخ تمرین ۴:

الف) نادرست

$$(fog)_{(۵)} = f(g(۵)) = g(۵)^۲ - ۴ = \left(\sqrt{x^۲ - ۴}\right)^۲ - ۴ = \left(\sqrt{۵^۲ - ۴}\right)^۲ - ۴ = ۲۱ - ۴ = ۱۷$$

ب) نادرست

$$\begin{cases} f_{(x)} = ۳x \\ g_{(x)} = ۲x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} fog_{(x)} = f\left(g_{(x)}\right) = ۳(۲x) = ۶x \\ gof_{(x)} = g\left(f_{(x)}\right) = ۲(۳x) = ۶x \end{cases} \rightarrow fog_{(x)} = gof_{(x)}$$

پ) درست

$$(fog)_{(۴)} = f(g(۴)) = f(۷) = ۵$$

ت) درست

$$\begin{cases} (fog)_{(۵)} = f(g(۵)) = \sqrt{۲ \times ۵ - ۱} = \sqrt{۹} = ۳ \\ g_{(۲)} = ۲ \times ۲ - ۱ = ۳ \end{cases}$$

پاسخ سوال ۵:

الف) مقرون به صرفه است

$$f_{(x)} = x - \frac{۲}{۱۰}x = \frac{۸}{۱۰}x = \frac{۴}{۵}x \ (x > ۰) \qquad g_{(x)} = x - ۲۰۰۰۰۰ \quad x > ۱۵۰۰۰۰۰$$

$$g\left(f_{(x)}\right) = f_{(x)} - ۲۰۰۰۰۰ = \frac{۴}{۵}x - ۲۰۰۰۰۰$$

$$\frac{۸۰}{۱۰۰} \times ۲۰۰۰۰۰۰ - ۲۰۰۰۰۰ = ۱۴۰۰۰۰۰$$

ب)

$$f\left(g_{(x)}\right) = f_{(x-۲۰۰۰۰۰)} = \frac{۴}{۵}(x - ۲۰۰۰۰۰) = \frac{۴}{۵}x - ۱۶۰۰۰۰$$

$$\frac{۸۰}{۱۰۰}(۲۰۰۰۰۰۰ - ۲۰۰۰۰۰) = ۱۴۴۰۰۰۰$$

پاسخ تمرین ۶:

الف)

$$\begin{cases} fog_{(x)} = f\left(g_{(x)}\right) = \sqrt[5]{3x^2 - 4x + 1} & \times \\ gof_{(x)} = g\left(f_{(x)}\right) = 3\sqrt[5]{x^2} - 4\sqrt[5]{x} + 1 & \times \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} fog_{(x)} = f\left(g_{(x)}\right) = \left(3x^2 - 4x + 1\right)^5 & \checkmark \\ gof_{(x)} = g\left(f_{(x)}\right) = 3\left(x^5\right)^2 - 4x^5 + 1 = 3x^{10} - 4x^5 + 1 & \times \end{cases}$$

پاسخ تمرین ۷:

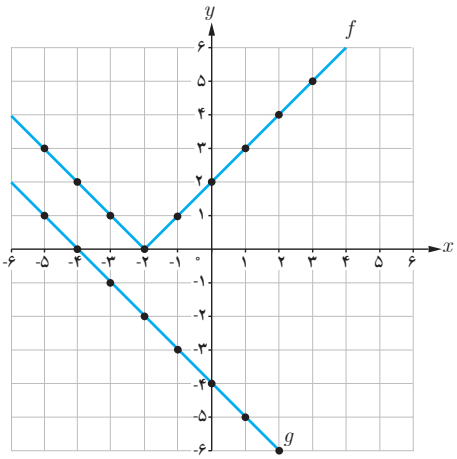
الف)

$$h_{(x)} = \sqrt[3]{x^2 + 1} \rightarrow f_{(x)} = x^2 + 1, g_{(x)} = \sqrt[3]{x}$$

ب)

$$l_{(x)} = \sqrt{x^2 + 1} \rightarrow f_{(x)} = x^2 + 5, g_{(x)} = \sqrt{x}$$

**خیر منحصر بفرد نیست**




۸ با توجه به نمودارهای توابع $f$ و $g$، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $(fog)(-۱) = f(g(-۱)) = f(-۳) = ۱$

ب) $(gof)(۰) = g(f(۰)) = g(۲) = -۶$

پ) $(fog)(۱) = f(g(۱)) = f(-۵) = ۳$

ت) $(gof)(-۱) = g(f(-۱)) = g(۱) = -۵$

۹ با توجه به ضابطه‌های توابع $f$ و $g$، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x) = ۲x-۵$ , $g(x) = x^۲-۳x+۸$ : $(fog)(x) = ۷$

ب) $f(x) = ۳x^۲+x-۱$ , $g(x) = ۱-۲x$ : $(gof)(x) = -۵$

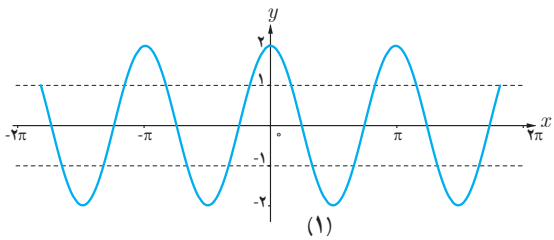
۱۰ با استفاده از نمودار $y=\cos x$، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

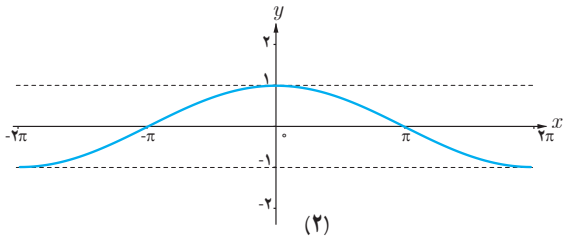
الف) $y = -\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x)$ **۴**

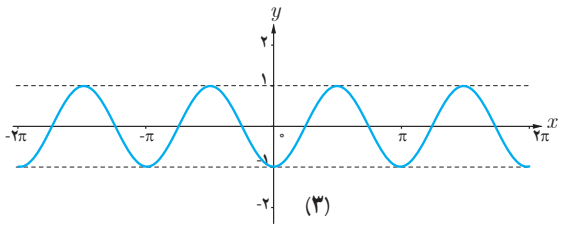
ب) $y=۲\cos ۲x$ **۱**

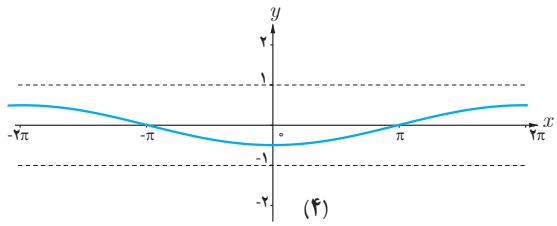
پ) $y = \cos(\frac{۱}{۲}x)$ **۲**

ت) $y=-\cos ۲x$ **۳**



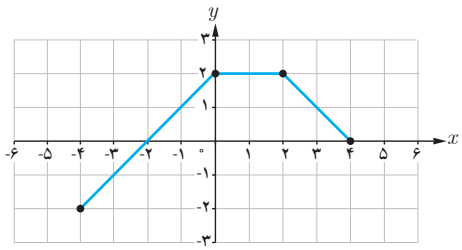




۱۱ نمودار توابع $y = -\sin ۲x - ۱$ و $y = ۲\sin(\frac{-۱}{۳}x)$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازهٔ $[-\pi , \pi]$ رسم کنید.

۱۲ با استفاده از نمودار تابع $f$، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.




الف) $y = \frac{۱}{۲}f(۲x) - ۱$

ب) $y = -f(-x) + ۲$

پ) $y = ۲f(x-۱) - ۳$

ت) $y = ۲f(\frac{۱}{۲}x)$

پاسخ تمرین ۹:

الف)

$$f(x)=۲x-۵\ ,g(x)=x^{۲}-۳x+۸\rightarrow\begin{cases}f(g(x))=۷\\ ۲(x^{۲}-۳x+۸)-۵\end{cases}\Rightarrow ۲x^{۲}-۶x+۱۱=۷$$

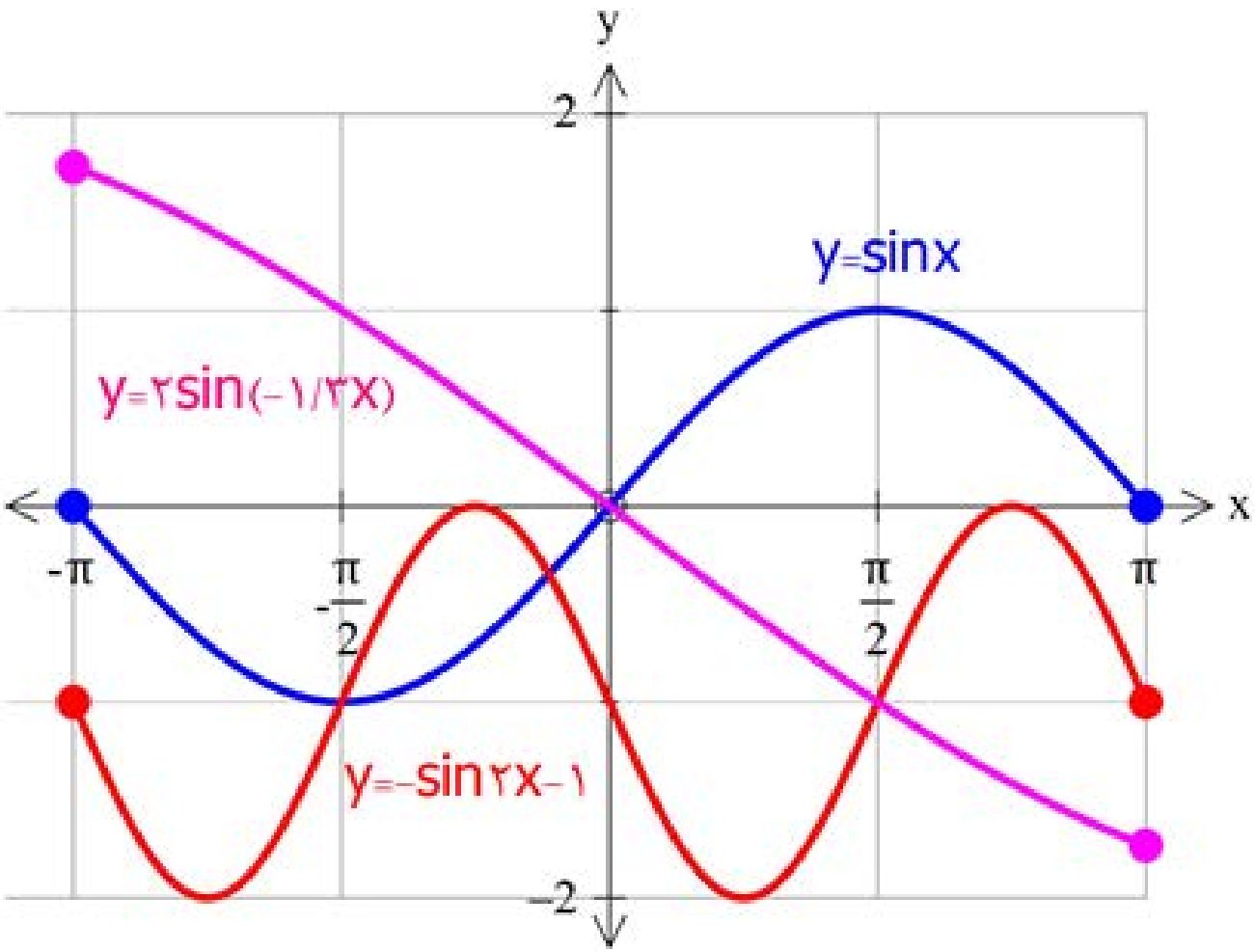
$$\Rightarrow ۲x^{۲}-۶x+۴=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}x=۱\\ x=۲\end{cases}$$

ب)

$$f(x)=۳x^{۲}+x-۱\ ,g(x)=۱-۲x\rightarrow\begin{cases}g(f(x))=-۵\\ ۱-۲(۳x^{۲}+x-۱)\end{cases}\Rightarrow -۶x^{۲}-۲x+۳=-۵$$

$$\Rightarrow -۶x^{۲}-۲x+۸=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}x=۱\\ x=-\frac{۸}{۶}=-\frac{۴}{۳}\end{cases}$$

پاسخ تمرین ۱۱:



تمرین ۱۲:

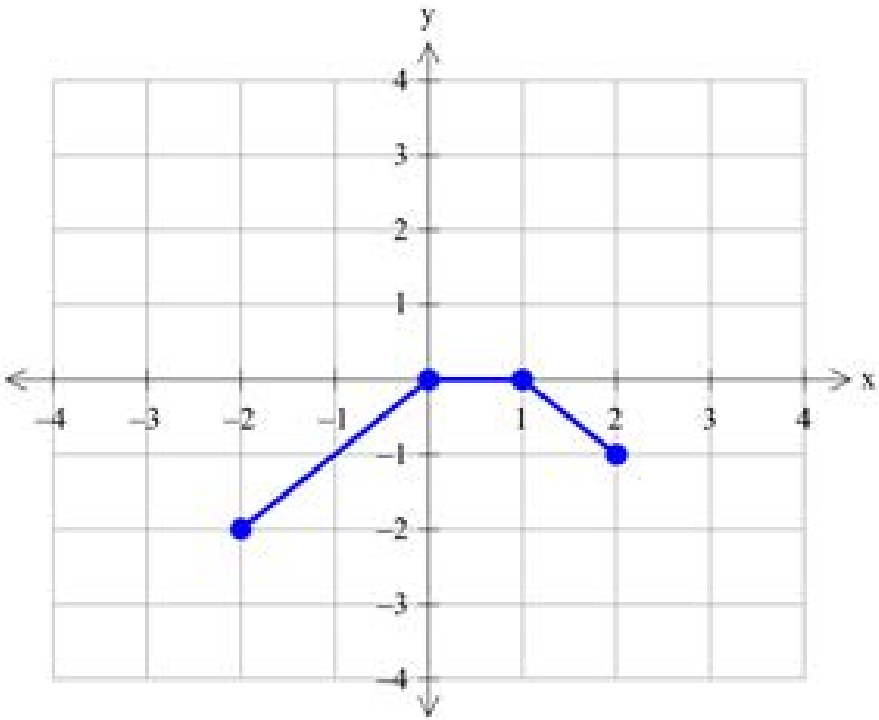
۱) $y=\frac{1}{2}f(2x)-1$

$$y=\frac{1}{2}f(2x)-1 \qquad 2x=t \rightarrow t=\frac{1}{2}x$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}\times(-4)$ | $\frac{1}{2}(-2)$ | $\frac{1}{2}(0)$ | $\frac{1}{2}(2)$ | $\frac{1}{2}(4)$ | |
| $\frac{1}{2}(-2)-1$ | $\frac{1}{2}(0)-1$ | $\frac{1}{2}(2)-1$ | $\frac{1}{2}(2)-1$ | $\frac{1}{2}(0)-1$ | |

$\Rightarrow$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
| $-2$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $-1$ |




$$y=\begin{cases} x & -2\le x\le 0 \\ 0 & 0\le x\le 1 \\ -x+1 & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

$$D=[-2,2] \qquad R=[-2,0]$$

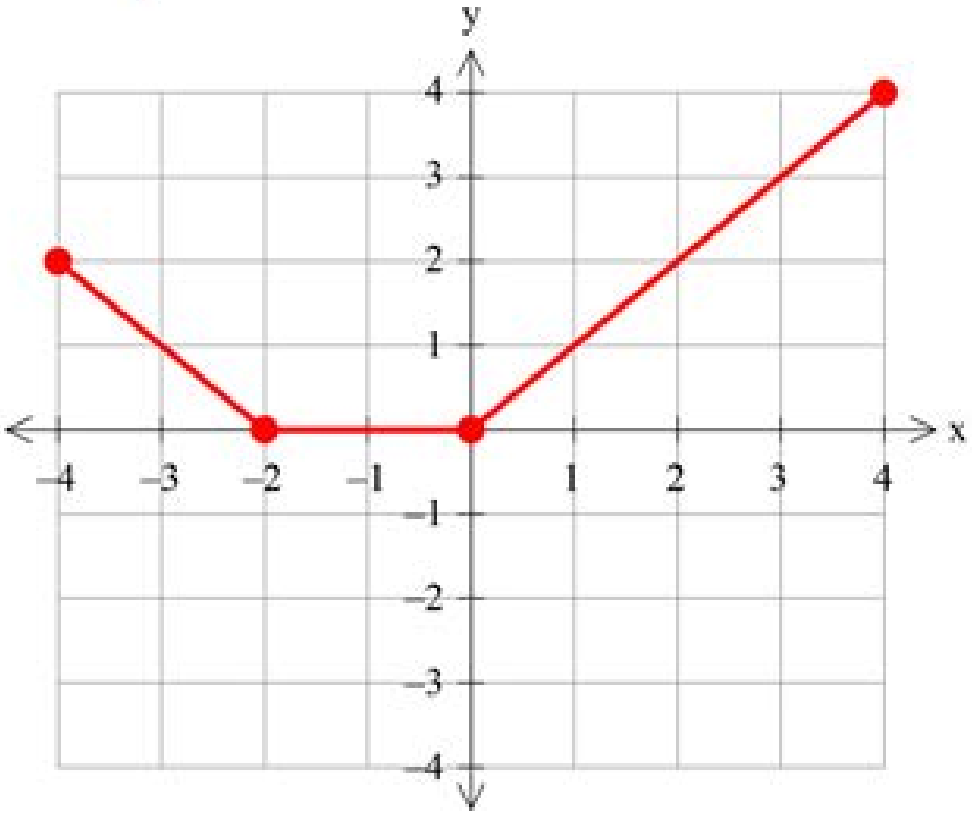
تمرین ۱۲:

۲) $y=-f(-x)+۲$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $-(-۴)$ | $-(-۲)$ | $-(۰)$ | $-(۲)$ | $-(۴)$ |
| | $-(-۲)+۲$ | $-(۰)+۲$ | $-(۲)+۲$ | $-(۲)+۲$ | $-(۰)+۲$ |

$\Rightarrow$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۴ | ۲ | ۰ | $-۲$ | $-۴$ |
| ۴ | ۲ | ۰ | ۰ | ۲ |




$$y=\begin{cases} -x-۲ & -۴\le x\le -۲ \\ ۰ & -۲\le x\le ۰ \\ x & ۰\le x\le ۴ \end{cases}$$

$D=[-۴,۴]$ $\qquad$ $R=[۰,۴]$

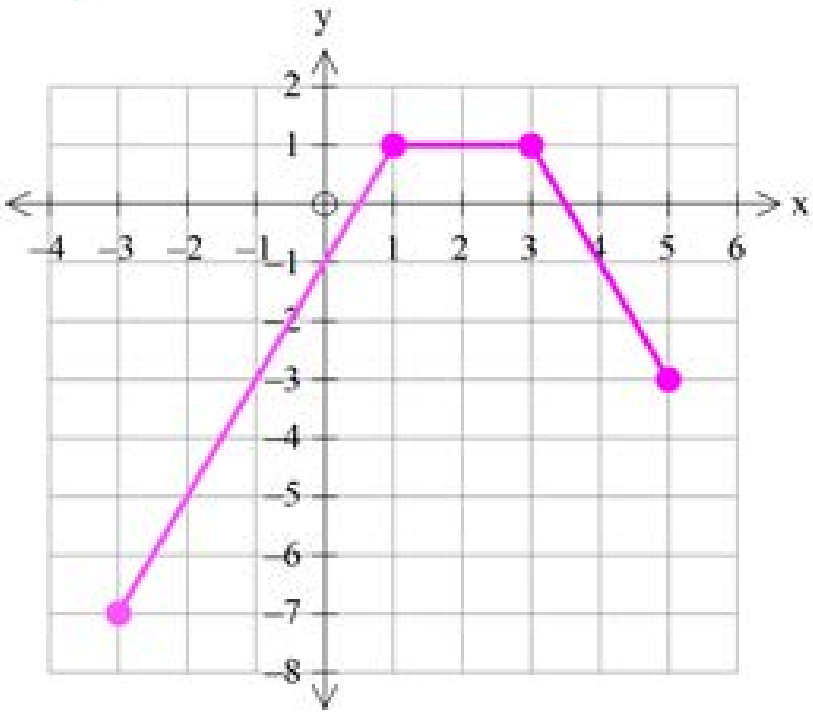
تمرین ۱۲:

۳) $y = ۲f(x-۱) - ۳$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(-۴)+۱$ | $(-۲)+۱$ | $(۰)+۱$ | $(۲)+۱$ | $(۴)+۱$ | |
| $۲(-۲)-۳$ | $۲(۰)-۳$ | $۲(۲)-۳$ | $۲(۲)-۳$ | $۲(۰)-۳$ | |

$\Rightarrow$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-۳$ | $-۱$ | $۱$ | $۳$ | $۵$ |
| $-۷$ | $-۳$ | $۱$ | $۱$ | $-۳$ |




$$y = \begin{cases} ۲x - ۱ & -۳ \le x \le ۱ \\ ۱ & ۱ \le x \le ۳ \\ -۲x + ۷ & ۳ \le x \le ۵ \end{cases}$$

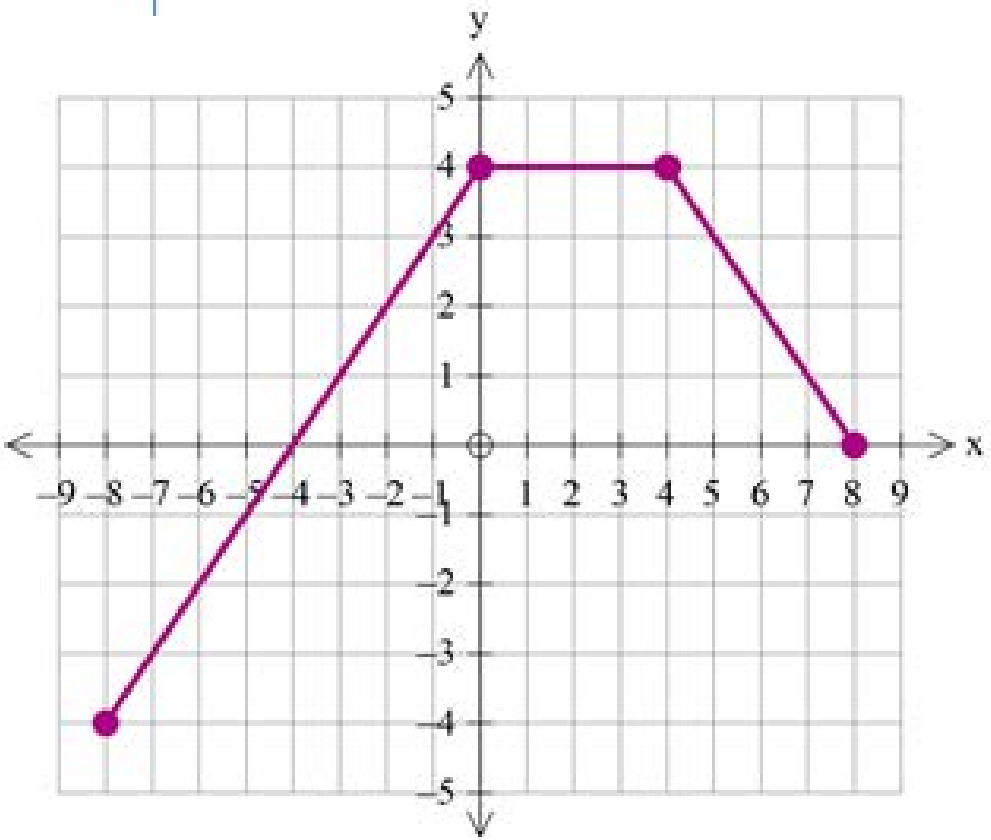
$D = [-۳, ۵]$ $\qquad$ $R = [-۷, ۱]$

تمرین ۱۲: $y = ۲f\left(\frac{۱}{۲}x\right)$ (۴

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | ۲(−۴) | ۲(−۲) | ۲(۰) | ۲(۲) | ۲(۴) |
| | ۲(−۲) | ۲(۰) | ۲(۲) | ۲(۲) | ۲(۰) |

$\Rightarrow$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −۸ | −۴ | ۰ | ۴ | ۸ |
| −۴ | ۰ | ۴ | ۴ | ۰ |




$$y = \begin{cases} x + ۴ & -۸ \le x \le ۰ \\ ۴ & ۰ \le x \le ۴ \\ -x + ۸ & ۴ \le x \le ۸ \end{cases}$$

$D = [-۸, ۸]$ $\quad$ $R = [-۴, ۴]$

درس سوم

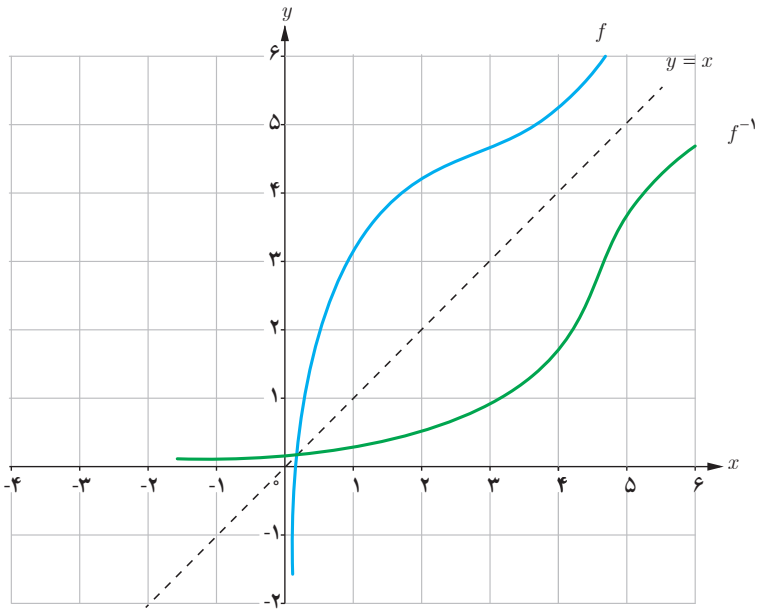
# تابع وارون

## یادآوری

همان‌طور که در فصل تابع کتاب ریاضی ۲ دیدیم با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج‌های مرتب تابع یک‌به‌یک $f$، تابعی جدید به‌دست می‌آید که وارون تابع $f$ است و آن را با $f^{-1}$ نشان می‌دهیم. یعنی اگر نقطهٔ $(a , b)$ روی نمودار تابع $f$ قرار داشته باشد آن‌گاه نقطهٔ $(b , a)$ روی نمودار تابع $f^{-1}$ قرار دارد و به عکس :

$$(a , b) \in f \Leftrightarrow (b , a) \in f^{-1}$$

همچنین دیدیم نمودار تابع $f$ و تابع وارون آن نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اوّل و سوم) قرینه‌اند.




**مثال :**

اگر $f = \{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$ آن‌گاه :

$$f^{-1} = \{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳)\}$$

خواهیم داشت :

$$\begin{cases} (fof^{-1})(۴) = f(f^{-1}(۴)) = f(۱) = ۴ \\ (fof^{-1})(۳) = f(f^{-1}(۳)) = f(۲) = ۳ \\ (fof^{-1})(۵) = f(f^{-1}(۵)) = f(۳) = ۵ \end{cases} \rightarrow fof^{-1} = \{(۴,۴),(۳,۳),(۵,۵)\}$$

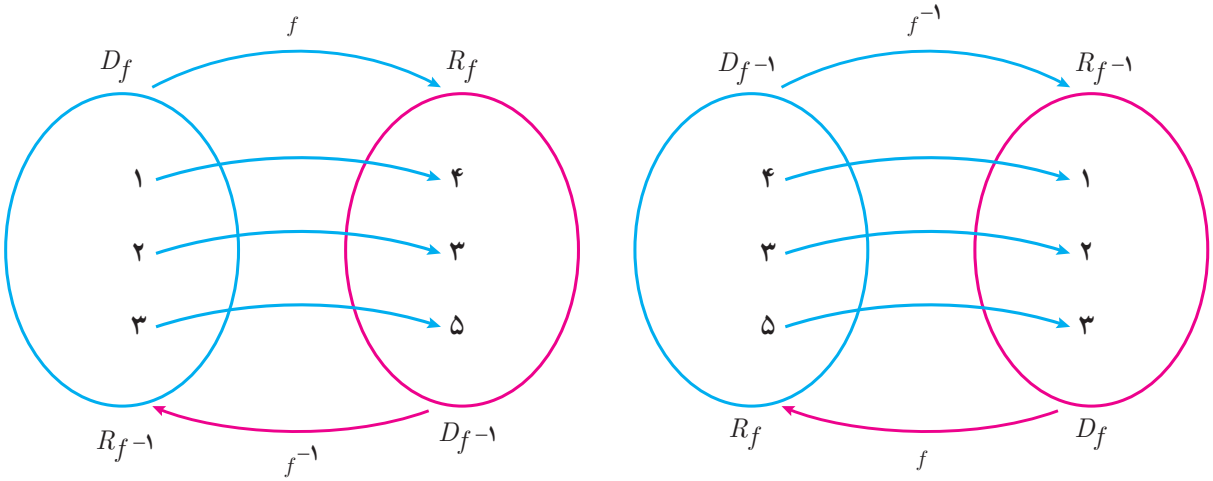
بنابراین به ازای هر $x$ متعلق به دامنهٔ تابع $f^{-1}$ داریم :

$$(fof^{-1})(x) = x$$

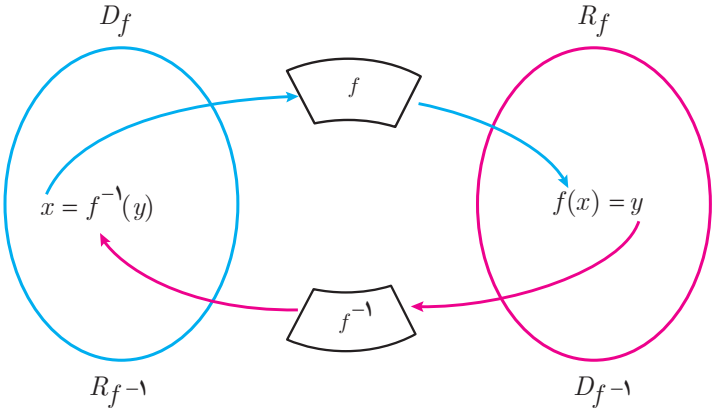
همچنین :

$$\begin{cases}(f^{-1}of)(1) = f^{-1}(f(1)) = f^{-1}(4) = 1\\ (f^{-1}of)(2) = f^{-1}(f(2)) = f^{-1}(3) = 2 \rightarrow f^{-1}of = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}\\ (f^{-1}of)(3) = f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(5) = 3\end{cases}$$

بنابراین به ازای هر $x$ متعلق به دامنهٔ تابع $f$ داریم : $(f^{-1}of)(x) = x$




به‌طور کلی اگر $f$ تابعی یک‌به‌یک و $f^{-1}$ تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط $f$ و $f^{-1}$ را نشان می‌دهد.




اگر $f$ تابعی وارون‌پذیر و $f^{-1}$ وارون آن باشد، همواره داریم :

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad ; \quad x \in D_f$$

با توجه به آنچه که دیدیم می‌توان گفت اگر دو تابع $f$ و $g$ به گونه‌ای باشند که :

الف) $(fog)(x) = x \ ; \ x \in D_g$

ب) $(gof)(x) = x \ ; \ x \in D_f$

آنگاه توابع $f$ و $g$ وارون یکدیگرند.

**مثال :** نشان دهید توابع $f$ و $g$ وارون یکدیگرند.

$$f(x) = ۳x - ۴$$

$$g(x) = \frac{x+۴}{۳}$$

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع $f$ و $g$ برابر تابع همانی است، یعنی :

$$(fog)(x) = f(g(x)) = ۳g(x) - ۴ = ۳(\frac{x+۴}{۳}) - ۴ = x \qquad (x \in D_g)$$

همچنین :

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+۴}{۳} = \frac{۳x-۴+۴}{۳} = x \qquad (x \in D_f)$$

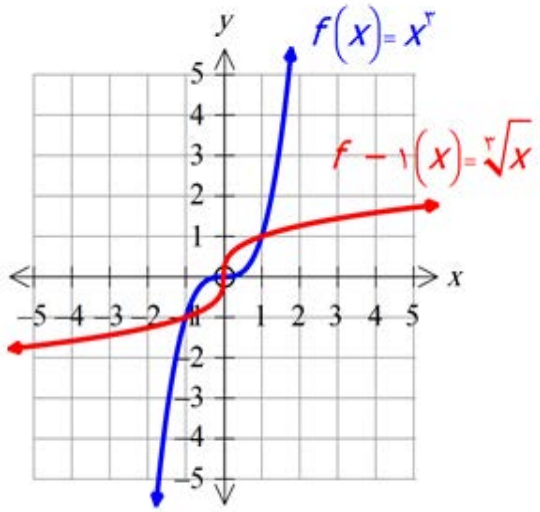
بنابراین دو تابع $f$ و $g$ وارون یکدیگرند.

برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند $f$، در معادلهٔ $y=f(x)$ در صورت امکان $x$ را برحسب $y$ محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل $y$ به $x$، $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.[۱]

$$\begin{matrix} y_۱ = x_۱^۳ \\ y_۲ = x_۲^۳ \end{matrix} \xrightarrow{y_۱=y_۲} x_۱^۳ = x_۲^۳ \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

**کار در کلاس**

آیا تابع $f(x) = x^۳$ یک به یک است؟ چرا؟ در دستگاه مختصات زیر نمودار تابع $f(x) = x^۳$ و وارون آن را رسم کنید. ضابطهٔ تابع وارون چیست؟



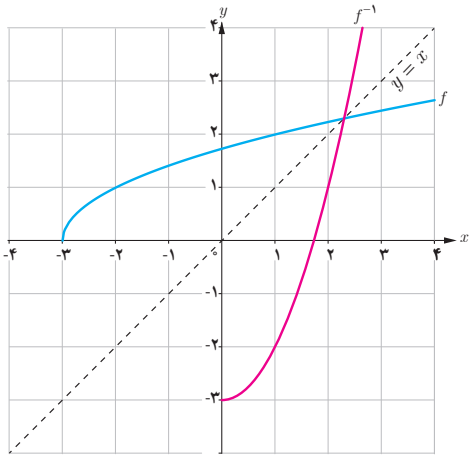

$$f(x) = x^۳ \xrightarrow{y \leftrightarrow x} x = y^۳ \Rightarrow y = \sqrt[۳]{x} \rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x}$$

۱ــ توابع مورد نظر در این درس توابع خطی، درجهٔ دوم، $\sqrt{ax+b}$، $x^۳$ و $\sqrt[۳]{x}$ است. رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها الزامی است.

**مثال :** اگر $f(x)=\sqrt{x+۳}$ ، دامنه و برد توابع $f$ و $f^{-۱}$ را به‌دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید، ضابطهٔ $f^{-۱}$ را نیز به‌دست آورید.
تابع $f$ یک‌به‌یک است، بنابراین دارای وارون است.

$$\begin{cases} D_f = [-۳,+\infty) \\ R_f = [۰,+\infty) \end{cases} \qquad \begin{cases} D_{f^{-۱}} = [۰,+\infty) \\ R_{f^{-۱}} = [-۳,+\infty) \end{cases}$$

$$y=\sqrt{x+۳}$$
$$y^۲ = x+۳$$
$$x = y^۲ - ۳$$
$$f^{-۱}(y) = y^۲ - ۳$$
$$f^{-۱}(x) = x^۲ - ۳$$




**کار در کلاس**

ضابطهٔ تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

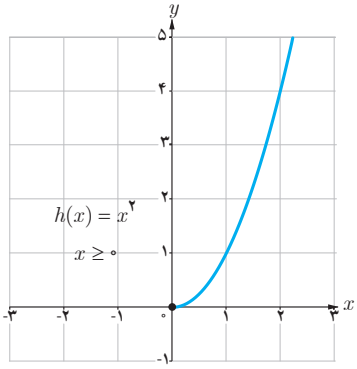
الف) $f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳$

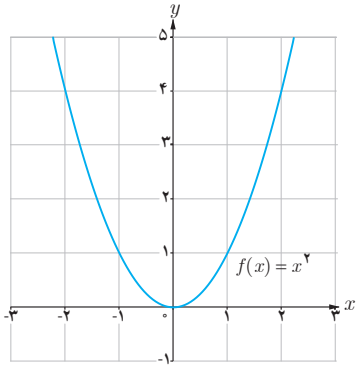
ب) $g(x)=۱+\sqrt{x-۲}$

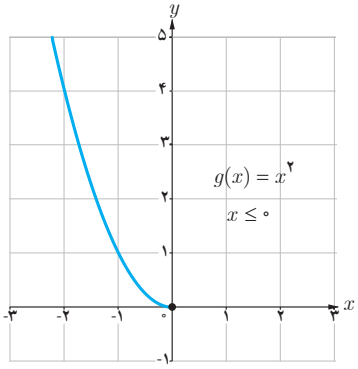
پ) $h(x)=x^۲+۱$

## محدود کردن دامنه تابع

از سال قبل می‌دانیم که اگر تابعی یک‌به‌یک نباشد وارون‌پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنهٔ یک تابع، می‌توان تابعی یک‌به‌یک به‌دست آورد. به‌طور مثال تابع $f(x)=x^۲$ یک‌به‌یک نیست ولی با محدود کردن دامنهٔ تابع به بازهٔ $[۰,+\infty)$ و یا $(-\infty,۰]$ یا زیرمجموعه‌هایی از این دو بازه، تابعی یک‌به‌یک به‌دست می‌آید.



حل کاردر کلاس  الف)

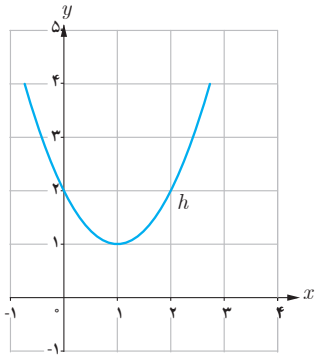
$$\underbrace{f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳}_{D_f=\mathbb{R}\quad R_f=\mathbb{R}}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=-\frac{۱}{۲}y+۳\rightarrow-\frac{۱}{۲}y=x-۳\rightarrow y=-۲x+۶\rightarrow\underbrace{f^{-۱}(x)=-۲x+۶}_{D_{f^{-۱}}=\mathbb{R}\quad R_{f^{-۱}}=\mathbb{R}}$$

ب)

$$\underbrace{g(x)=۱+\sqrt{x-۲}}_{D_g=[۲,+\infty)\quad R_g=[۱,+\infty)}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=۱+\sqrt{y-۲}\rightarrow\sqrt{y-۲}=x-۱\rightarrow y-۲=(x-۱)^۲\rightarrow\underbrace{g^{-۱}(x)=(x-۱)^۲+۲}_{D_{g^{-۱}}=[۱,+\infty)\quad R_{g^{-۱}}=[۲,+\infty)}$$

پ)

$$\underbrace{h(x)=x^۲+۱}_{D_h=[۰,+\infty)\quad R_h=[۱,+\infty)}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=y^۲+۱\rightarrow y^۲=x-۱\rightarrow y=\sqrt{x-۱}\rightarrow\underbrace{h^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱}}_{D_{h^{-۱}}=[۱,+\infty)\quad R_{h^{-۱}}=[۰,+\infty)}$$




**مثال :** نمودار تابع $h(x)= x^{۲} - ۲x + ۲$ نشان می‌دهد که این تابع یک‌به‌یک نیست. اما می‌توان با محدود کردن دامنهٔ این تابع آن را طوری محدود کرد که تابعی یک‌به‌یک به‌دست آید و سپس وارون آن را محاسبه کرد.

$$h(x)=x^{۲}-۲x+۲=(x-۱)^{۲}+۱$$

مثلاً دامنهٔ تابع $h$ را به بازهٔ $[۱,+\infty)$ محدود می‌کنیم. ضابطهٔ تابع جدید که آن را $k(x)$ می‌نامیم با ضابطهٔ $h(x)$ برابر است اما دامنهٔ تابع $h$ مجموعهٔ اعداد حقیقی و دامنهٔ تابع $k$ بازهٔ $[۱,+\infty)$ است.

در تابع $k$، $x$ را برحسب $y$ به‌دست می‌آوریم :

$$k(x) = (x-۱)^{۲} + ۱$$

$$y=(x-۱)^{۲}+۱$$

$$(x-۱)^{۲}=y-۱$$

$$x-۱=\pm\sqrt{y-۱}$$

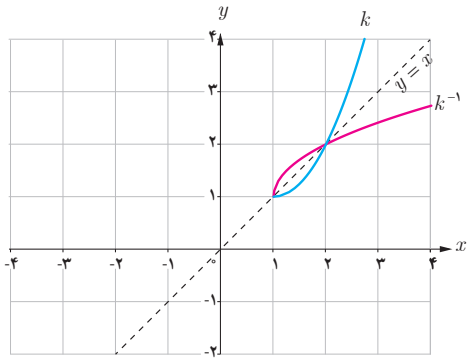
$$x=\pm\sqrt{y-۱}+۱$$

$$k^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱}+۱$$

جواب منفی غیرقابل قبول است. (چرا؟)

زیرا دامنه k اعداد مثبت برزگترمساوی یک است

نمودار توابع $k$ و $k^{-۱}$ به‌صورت زیر است :



باغ ارم شیراز

## تمرین

۱ ضابطهٔ تابع وارون توابع یک‌به‌یک زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{-۸x+۳}{۲}$

ب) $g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}$

۲ در مورد هر یک از قسمت‌های زیر نشان دهید که $f$ و $g$ وارون یکدیگرند.

الف) $f(x)=\frac{-۷}{۲}x-۳$ , $g(x)=-\frac{۲x+۶}{۷}$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-۸}$ , $g(x)=۸+x^۲\ ;\ x\leq ۰$

۳ رابطهٔ بین درجهٔ سانتی‌گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شوند به‌صورت $f(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲$ است که در آن $x$ میزان درجهٔ سانتی‌گراد و $f(x)$ میزان درجهٔ فارنهایت است. $f^{-۱}(x)$ را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می‌دهد.

۴ توابع زیر یک‌به‌یک نیستند. با محدود کردن دامنهٔ آنها به دو روش متفاوت توابعی یک‌به‌یک بسازید.

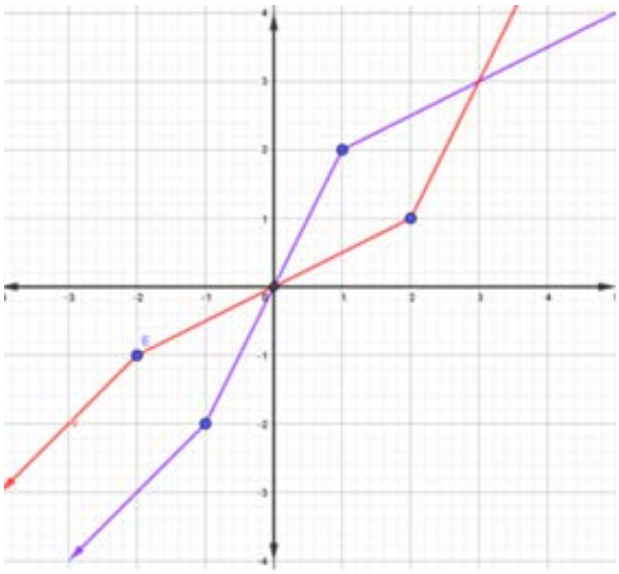
الف) $f(x)=|x|$

ب) $g(x)=-x^۲$

پ) $h(x)=x^۲+۴x+۳$

۵ از نمودار تابع $f$ برای تکمیل جدول استفاده کنید.

| $x$ | $-۴$ | $-۲$ | $۲$ | $۳$ |
|---|---|---|---|---|
| $f^{-۱}(x)$ | $-۳$ | $-۱$ | $۱$ | $۳$ |



۶ با محدود کردن دامنهٔ تابع $f(x)=x^۲-۴x+۵$، یک تابع یک‌به‌یک به‌دست آورده و دامنه و برد $f$ و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

۷ اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^۳$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $(fog)^{-۱}(۵)$ ب) $(f^{-۱}of^{-۱})(۶)$ پ) $(g^{-۱}of^{-۱})(۵)$

تمرین ۱:

$$f(x)=\frac{-۸x+۳}{۲}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=\frac{-۸y+۳}{۲}\rightarrow -۸y=۲x-۳\rightarrow$$

$$y=\frac{-۲x+۳}{۸}\rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{-۲x+۳}{۸}$$

$$g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=-۵-\sqrt{۳y+۱}\rightarrow\sqrt{۳y+۱}=x+۵$$

$$\rightarrow ۳y+۱=(x+۵)^{۲}\rightarrow ۳y=(x+۵)^{۲}-۱\rightarrow y=\frac{(x+۵)^{۲}-۱}{۳}\rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{(x+۵)^{۲}-۱}{۳}$$

تمرین ۲:

الف)

$$fog(x)=f(g(x))=-\frac{\cancel{۷}}{۲}\left(-\frac{۲x+۶}{\cancel{۷}}\right)-۳=x+۳-۳=x$$

$$gof(x)=g(f(x))=-\frac{۲\left(\frac{-۷x}{۲}-۳\right)+۶}{۷}=\frac{۷x-۶+۶}{۷}=x$$

ب)

$$fog(x)=f(g(x))=-\sqrt{۸+x^{۲}-۸}=-\sqrt{x^{۲}}=-|x|\xrightarrow{x\leq ۰}=-(-x)=x$$

$$gof(x)=g(f(x))=\left(-\sqrt{x-۸}\right)^{۲}+۸=x-۸+۸=x$$

**تمرین ۳::**

$$f(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲\xrightarrow{y\leftrightarrow x}x=\frac{۹}{۵}y+۳۲\Rightarrow ۵x=۹y+۱۶۰\rightarrow ۹y=۵x-۱۶۰\rightarrow y=\frac{۵}{۹}x-\frac{۱۶۰}{۹}\rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۵}{۹}x-\frac{۱۶۰}{۹}$$

**میزان تغییرات درجه نسبت به فارینهایت را نشان می دهد**

**تمرین ۴:**

**الف)** $x\geq ۰$ $\quad f(x)=|x|$

**ب)** $x\leq ۰$ $\quad g(x)=-x^{۲}$

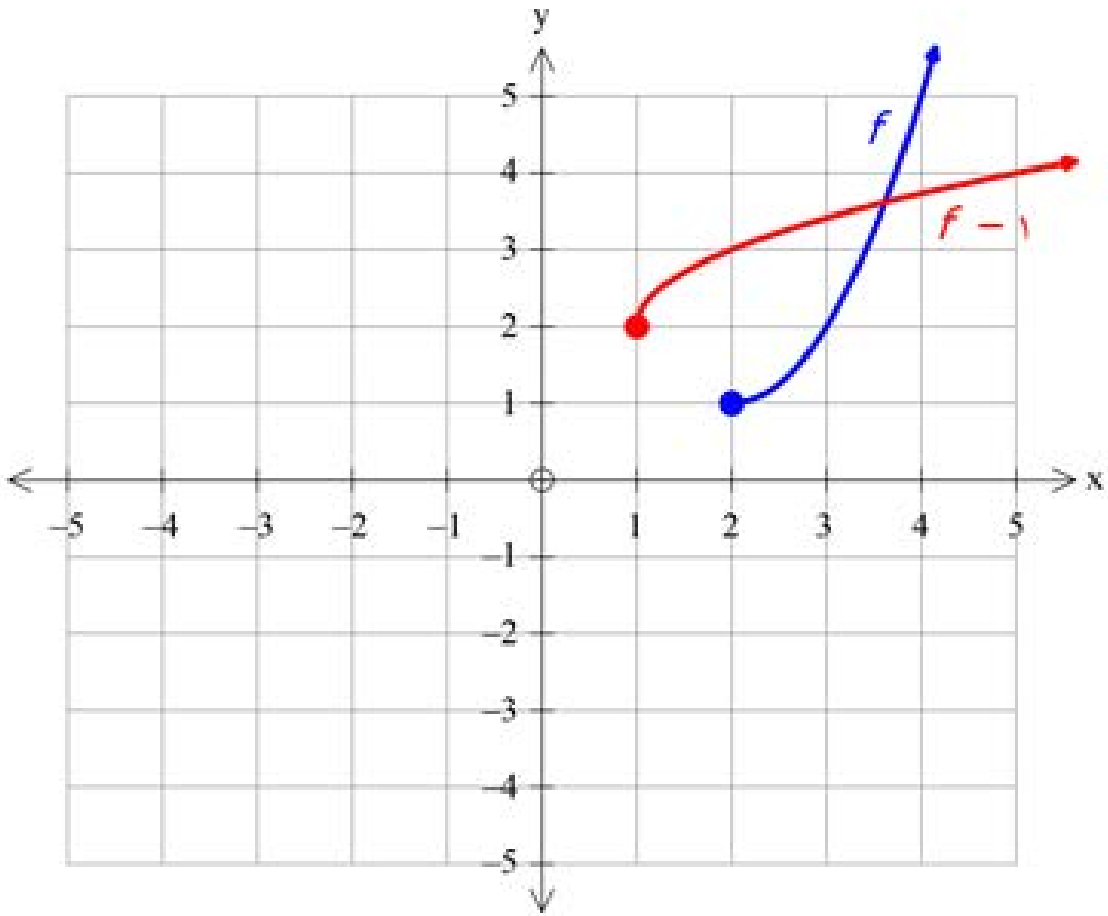
**پ)** $x\geq ۰$ $\quad h(x)=(x+۲)^{۲}-۱$

تمرین ۶:

$$f(x)=x^{۲}-۴x+۵=(x-۲)^{۲}+۱ \qquad D_f=[۲,+\infty) \quad R_f=[۱,+\infty)$$

$$y=(x-۲)^{۲}+۱ \rightarrow y-۱=(x-۲)^{۲} \Rightarrow x-۲=\pm\sqrt{y-۱} \Rightarrow x=\pm\sqrt{y-۱}+۲$$

$$\xrightarrow{x\geq ۲} f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱}+۲ \qquad D_{f^{-۱}}=[۱,+\infty) \quad R_{f^{-۱}}=[۲,+\infty)$$



تمرین ۷:

الف)

$$\left(f^{-1}of^{-1}\right)(۶)=f^{-1}\left(\underbrace{f^{-1}(۶)}_{۸(۶+۳)=۷۲}\right)=f^{-1}(۶)=۸(۷۲+۳)=۶۰۰$$

پ)

$$(fog)^{-1}(۵)=\sqrt[۳]{۸\times ۵+۲۴}=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$$

$$(fog)(x)=f\left(x^{۳}\right)=\frac{۱}{۸}x^{۳}-۳\rightarrow y+۳=\frac{۱}{۸}x^{۳}\rightarrow x^{۳}=۸y+۲۴\rightarrow x=\sqrt[۳]{۸y+۲۴}$$

$$(fog)^{-1}(x)=\sqrt[۳]{۸x+۲۴}$$

ت)

$$\left(g^{-1}of^{-1}\right)(۵)=g^{-1}\left(\underbrace{f^{-1}(۵)}_{۸(۵+۳)=۶۴}\right)=g^{-1}(۶۴)=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$$

سوال: تحت چه شرایطی تابع هموگرافیک معکوس خودش می شود؟

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \qquad c\neq 0, ad-bc\neq 0$$

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\rightarrow cxy+dy=ax+b\rightarrow x(cy-a)=-dy+b\rightarrow x=\frac{-dy+b}{cy-a}\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$f(x)=f^{-1}(x)\rightarrow\begin{cases}a=-d\\ d=-a\end{cases}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}=R_{f^{-1}} \quad , \; R_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{a}{c}\right\}=D_{f^{-1}}$$

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}, f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$(fof^{-1})(x)=f\left(\frac{-dx+b}{cx-a}\right)=\frac{a\left(\frac{-dx+b}{cx-a}\right)+b}{c\left(\frac{-dx+b}{cx-a}\right)+d}=\frac{\frac{-adx+ab+bcx-ab}{cx-a}}{\frac{-dcx+bc+dcx-ad}{cx-a}}\xrightarrow[bc-ad\neq 0]{x\neq\frac{a}{c}}(fof^{-1})(x)=x$$

$$(f^{-1}of)(x)=f^{-1}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=\frac{-d\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)+b}{c\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)-a}=\frac{\frac{-adx-bd+bcx+db}{cx+d}}{\frac{cax+cb-acx-ad}{cx+d}}\xrightarrow[-bc+ad\neq 0]{x\neq\frac{d}{c}}(f^{-1}of)(x)=x$$

روستای رهلی داغلار ــ آذربایجان شرقی

فصل

# ۲ مثلثات

انشعاب رگ‌ها در بدن انسان به‌گونه‌ای است که مقاومت هیدرولیکی درون رگ‌ها تابعی مثلثاتی از زاویه بین هر دو رگ متصل به‌هم است.در شبیه‌سازی کامپیوتری از شبکه رگ‌ها این خاصیت مورد توجه قرار می‌گیرد.

درس اوّل
تناوب و تانژانت

درس دوم
معادلات مثلثاتی

**تعریف:** تابع f را متناوب گوییم هرگاه عدد حقیقی و مخالف صفر مانند T وجود داشته باشد بطوریکه

$x \in D_f \rightarrow \begin{cases} x \pm T \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$ که T را دوره تناوب می نامیمودر بسیاری موارد دنبال کمترین

مقدار آن می باشیم .با این تعریف چیزی که دستگیرمان می شود این است که است که دامنه نمی

تواند از بالا یا پایین محدود باشد این جمله منزله آن است که $D_f = \mathbb{R}$ بلکه اگر $x_\circ \notin D_f$ آنگاه قطعاً

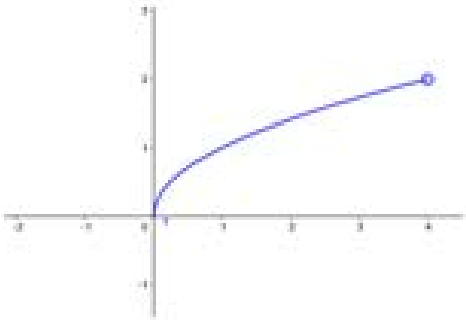
$(x_\circ + T) \notin D_f$ مانند تابع $f(x) = \tan x$ که نقاطی به فاصله دوره تناوب از یکدیگر با هم تعریف

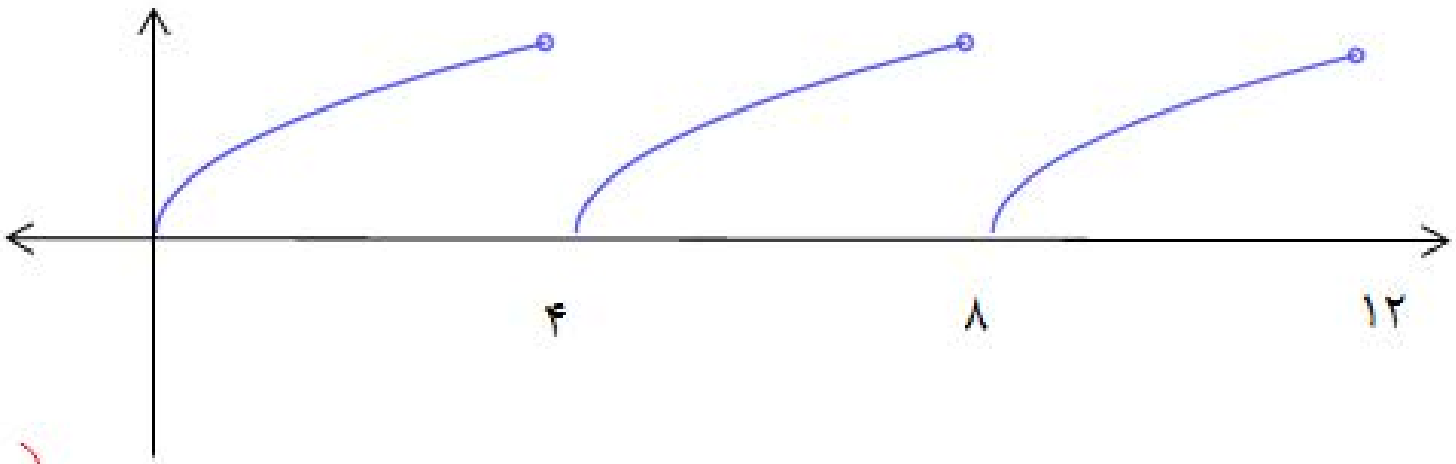
شده هستند یا با هم تعریف نشده بنابراین انتظار متناوب بودن توابعی مانند $f(x) = \sin\sqrt{x-1}$ یا

$f(x) = \tan\sqrt{x^2 - 5x + 6}$ را نداشته باشیم.

اگر T دوره تناوب یک تابع باشد قطعاً مضارب صحیح غیر صفر آن نیز می توانند دوره تناوب محسوب شوند اما اگر بتوانیم کوچکترین آنرا پیدا کنیم به آن دوره تناوب اصلی گوئیم مثلاً $\pi$ را می تواند دوره تناوب برای $f(x) = \sin x$ باشد وقطعاً $۲\pi$ و $۵\pi$ و ... نیز دوره تناوب می گردند اما مایلیم عددی کوچکتر از $\pi$ مانند $۲\pi$ را دوره تناوب اصلی این تابع معرفی می کنیم هرچند که ممکن است تابعی متناوب باشد اما کوچکترین دوره تناوب آن پیدا نشود مانند توابع ثابت $f(x) = c$ بطوریکه $f(x+T) = k$ که T می تواند هر عدد حقیقی باشد.

مثال:تابع f در بازه $[0.4)$ بصورت $f(x)=\sqrt{x}$ تعریف شده است اگر تابع g متناوب شده تابع f باشد آنگاه $g(1397)$ چیست؟






$$g(1397)=g\left(\overbrace{1396}^{349\times 4}+1\right)=g(1)=f(1)=\sqrt{1}=1$$

مثال:اگر تابع $f(x)=\frac{۲x+۱}{۲x-۱}$ که در فاصله $(۷,۱۲]$ (بطول۵)را متناوب نماییم قانون تابع در فاصله $(-۳,۲]$ چه خواهد شد؟

حل: چون طول دوره تناوب ۵ می باشد پس دوره تناوب می تواند ۱ هم باشد یعنی دو دوره تناوب

$$f(x)=f(x-۲\times ۵) \qquad ۷<x\leq ۱۲ \Rightarrow -۳<\underbrace{x-۱۰}_{=t}\leq ۲ \Rightarrow -۳<t\leq ۲ \quad x-۱۰=t \rightarrow x=t+۱۰$$

$$f(t)=f(x)\rightarrow f(x-۱۰)=\frac{۲x+۱}{۲x-۱}\rightarrow \underset{t\in(-۳,۲]}{f(t)}=\frac{۲(t+۱۰)+۱}{۲(t+۱۰)-۱}=\frac{۲t+۲۱}{۲t+۱۹}$$

**نکته:** اگر T دوره تناوب اصلی تابع $y=f(x)$ باشد آنگاه T دوره تناوب اصلی

$-f(x), af(x), (a\neq ۰), f(a+x), f(x)+a, \frac{a}{f(x)}, a-f(x)$ نیز می باشد اما دوره تناوب اصلی

$y=f(ax)$ برابر است با : $\frac{T}{|a|}$ $(a\neq ۰)$

بنابراین دوره تناوب اصلی برای توابع زیر همگی $۲\pi$ می باشد.

$$f(x)=-۵\sin\left(x+\frac{\pi}{۶}\right) \qquad g(x)=\frac{۲}{\cos(x-۲)} \qquad h(x)=\sqrt{۵}\sin\left(-x-\sqrt{۵}\right)$$

و دوره تناوب اصلی برای توابع زیر همگی $\pi$ می باشد.

$$f(x)=\tan\left(x-\frac{\pi}{۳}\right) \qquad g(x)=-\sqrt{۳}\cot\tan\left(-x+\frac{\pi}{۹}\right)$$

**سوال: ثابت کنید تابع** $y=\sin x$ **دوره تناوب اصلی کوچکتر** $2\pi$ **از ندارد.**

اثبات : از برهان خلف استفاده می کنیم فرض می کنیم دوره تناوب کوچکتری مانند $T'$ داشته باشد

یعنی $0 < T' < 2\pi$ و $f(x+T') = f(x)$ در اینصورت داریم

$$f(x+T') = f(x) \Rightarrow \sin(x+T') = \sin x \rightarrow \sin x.\cos T' + \cos x.\sin T' = (\sin x)(1)$$

از آنجائیکه x را می توانیم هر کمانی بگیریم در نظر می گیریم $x = \frac{\pi}{2}$ دراین صورت

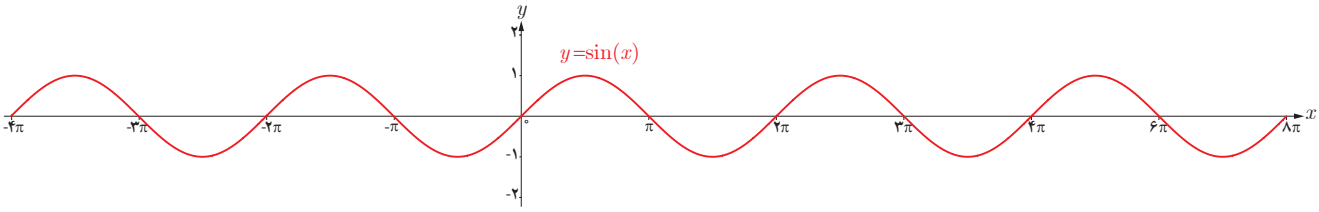
$$f(x+T') = f(x) \Rightarrow \sin(x+T') = \sin x \rightarrow \overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{=1}.\cos T' + \overbrace{\cos\frac{\pi}{2}}^{=0}.\sin T' = \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)(1) \rightarrow \cos T' = 1$$

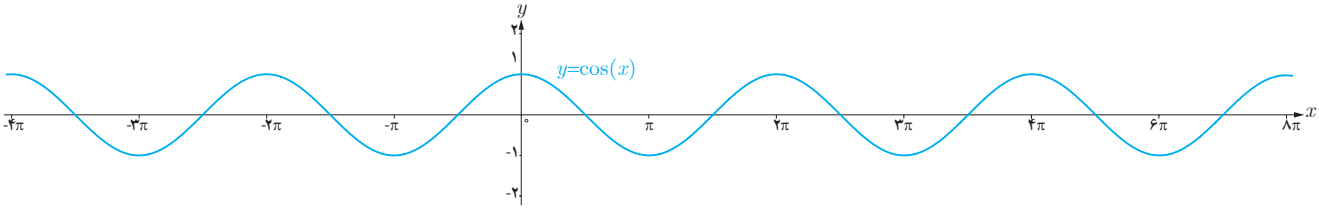
$$\rightarrow T' = 0 \quad \times \quad 0 < T' < 2\pi$$

درس اوّل

## تناوب و تانژانت

با توابع مثلثاتی $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصلهٔ $۲\pi$ روی محور $x$ها یکسان است $\left(\sin(x\pm ۲k\pi)=\sin x \text{ و } \cos(x\pm ۲k\pi)=\cos x\right)$ به عبارتی اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول $۲\pi$ داشته باشیم، با تکرار این تکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.




با دقت به نمودار توابع فوق می‌توان مشاهده کرد که نمودار در بازه‌هایی به طول $۲\pi$، $۴\pi$، $۶\pi$ و ... تکرار می‌شود. اما کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان $۲\pi$ است. چنین توابعی را توابع متناوب و $۲\pi$ را دورهٔ تناوب آنها می‌نامیم.

**تعریف :** تابع $f$ را **متناوب** می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند $T$ موجود باشد به طوری که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $x\pm T\in D_f$ و $f(x\pm T)=f(x)$.
کوچک‌ترین عدد مثبت $T$ با این خاصیت را **دورهٔ تناوب** $f$ می‌نامیم.

**فعالیت**

۱ می‌دانیم دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sin x$ $\left(f(x)=\cos x\right)$ برابر $۲\pi$ و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب ۱ و ۱− است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب $a$ را در تابع $f(x)=a\sin x$ بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.

**تذکر: برای تعیین دوره تناوب باید تابع را حتی الامکان ساده کرد.**

**مثال: دوره تناوب اصلی توابع زیر را بدست آورید .**

$$۱)f(x)=\sin ۳x-\cos ۵x$$

$$\begin{cases}\sin ۳x & T_۱=\dfrac{۲\pi}{۳}\\ \cos ۵x & T_۲=\dfrac{۲\pi}{۵}\end{cases}\Rightarrow T=۲\pi$$

$$۲)g(x)=\cos^۲ ۱۵x-\tan^۳ ۶x+\sin^۵ ۹x$$

$$\begin{cases}\cos^۲ ۱۵x & T_۱=\dfrac{\pi}{۱۵}\\ \tan^۳ ۶x & T_۲=\dfrac{\pi}{۶}\\ \sin^۵ ۹x & T_۳=\dfrac{۲\pi}{۹}\end{cases}\Rightarrow T=\dfrac{۲\pi}{۳}$$

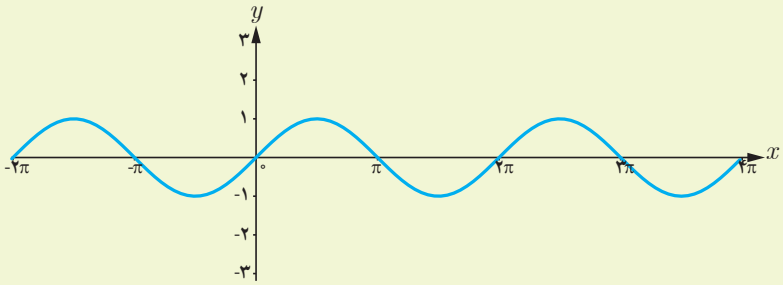
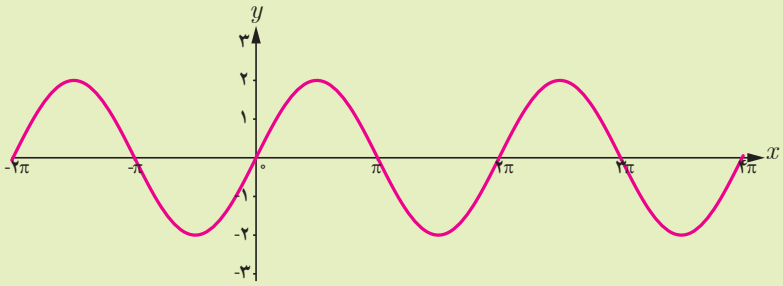
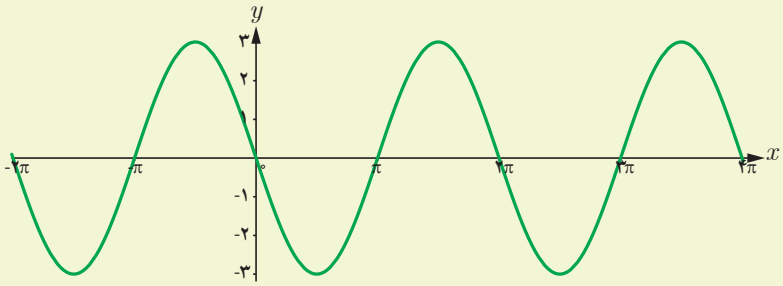
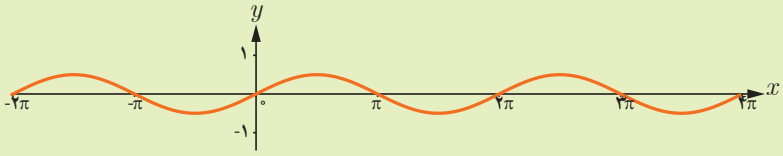
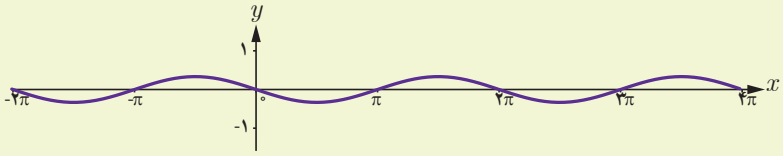
$$۳)h(x)=\sin ۲x-\cos \pi x$$

$$\begin{cases}\sin ۲x & T_۱=\dfrac{۲\pi}{۲}=\pi\\ \cos \pi x & T_۲=\dfrac{۲\pi}{\pi}=۲\end{cases}$$

۲عدد گویا و $\pi$ عددی گنگ هست پس نمی توان ک . م.م پیدا کرد

$$۴)s(x)=\frac{۲\sin x-۳\cos x}{۴\sin x+۵\cos x}$$

$$s(x)=\frac{\dfrac{۲\sin x-۳\cos x}{\cos x}}{\dfrac{۴\sin x+۵\cos x}{\cos x}}=\frac{۲\tan x-۳}{۴\tan x+۵}\rightarrow T=\pi$$

| تابع | نمودار تابع | ماکزیمم | مینیمم | دوره تناوب |
|---|---|---|---|---|
| $y=\sin x$ |  | ۱ | −۱ | $۲\pi$ |
| $y=۲\sin x$ |  | ۲ | −۲ | $۲\pi$ |
| $y=-۳\sin x$ |  | ۳ | −۳ | $۲\pi$ |
| $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ |  | $\frac{۱}{۲}$ | $-\frac{۱}{۲}$ | $۲\pi$ |
| $y=-\frac{۱}{۳}\sin x$ |  | $\frac{۱}{۳}$ | $-\frac{۱}{۳}$ | $۲\pi$ |

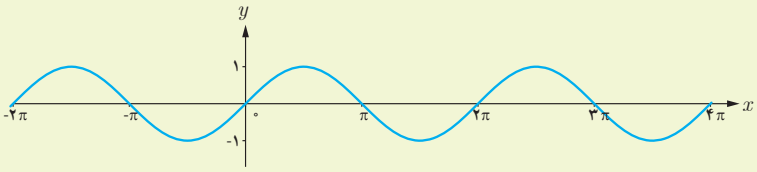
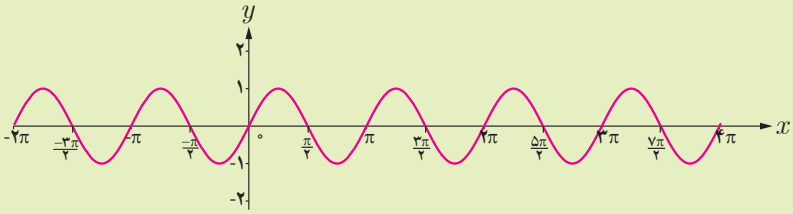
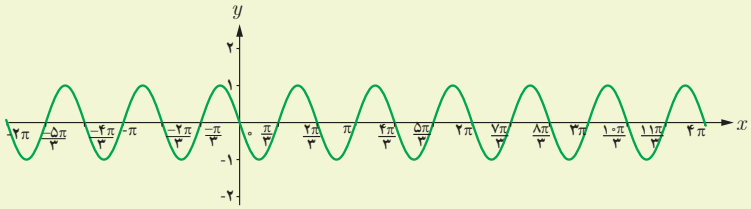
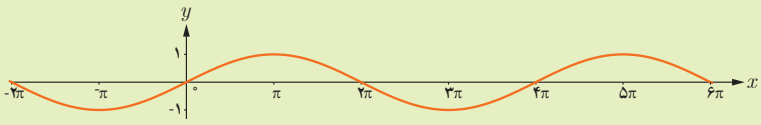
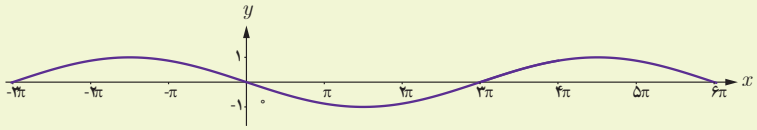
۲ با توجه به نمودارهای فوق دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=a\sin x$ را مشخص نمایید. $۲\pi$

$۲\pi$

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانید مشخص نمایید دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=a\sin x+c$ چگونه است.
با انجام مراحلی مشابه مراحل بالا می‌توان نشان داد دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y=a\cos x$ و $y=a\cos x+c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

## فعالیت

۱ با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شدهٔ زیر، دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب $b$ در تابع $y=\sin bx$ را بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

| تابع | نمودار تابع | ماکزیمم | مینیمم | دوره تناوب |
|---|---|---|---|---|
| $y=\sin x$ |  | ۱ | ۱- | ۲π |
| $y=\sin ۲x$ |  | ۱ | ۱- | π |
| $y=\sin(-۳x)$ |  | ۱ | ۱- | $\frac{۲\pi}{۳}$ |
| $y=\sin\frac{x}{۲}$ |  | ۱ | ۱- | ۴π |
| $y=\sin(-\frac{x}{۳})$ |  | ۱ | ۱- | ۶π |

$T=\frac{۲\pi}{|b|}$ $T=\frac{۲\pi}{|b|}$

۲ با توجه به نمودارهای فوق دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\sin bx$ را مشخص نمایید.

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانیم، مشخص نمایید دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\sin bx+c$ چگونه است.

با انجام مراحلی مشابه مراحل بالا می‌توان نشان داد دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y=\cos bx$ و $y=\cos bx+c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

## نکاتی در مورد توابع متناوب :

۱-دوره تناوب اصلی توابع $\sin^{2n-1}(ax+d), \cos^{2n-1}(ax+d)$ برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ می باشد $(a \neq 0, n \in \mathbb{Z})$

۲- دوره تناوب اصلی توابع $\sin^{2n}(ax+d), \cos^{2n}(ax+d), \tan^{n}(ax+d), \cot an^{n}(ax+d)$

برابر $\frac{\pi}{|a|}$ می باشد

۳-اگر g تابعی متناوب با دوره تناوب T و f تابعی دلخواه باشد آنگاه تابع fog درصورت معین بودن متناوب خواهد بود که دوره تناوب اصلی آن T ویا کوچکتر از T می باشد .چنانچه f تابعی یک به یک باشد دوره تناوب اصلی fog همان T است(کوچکترنمی شود)

۴-اگر f متناوب با دوره تناوب $T_1$ و g تابعی متناوب با دوره تناوب $T_2$ باشددر صورتیکه T کوچکترین مضرب مشترک $T_1$ و $T_2$ باشد آنگاه دوره تناوب توابع $f \pm g, f \times g, \frac{f}{g}$ حداکثر T می گردد.(وشاید کوچکتراز T )

## مراحل رسم تابع $y = a\sin(bx + c) + d$

۱- $y = \sin x$

تابع شناخته شده است که از مبدا مختصات بصورت صعودی جدا شده ودوره تناوب آن $\frac{۲\pi}{۱}$ می باشد.

۲- $y = \sin(bx)$

بازهم از مبدا معتصات می گذرد که اگر b>۰ باشد صعودی واگر b<۰ نزولی خارج می شود .

(sin-۵x=-sin۵x) که همچنان min=-۱,max=۱ و دوره تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ می باشد.

۳- $y = \sin(bx + c)$

هما ن نمودار $y = \sin(bx)$ می باشد که به اندازه $\frac{c}{b}$ به سمت چپ یا راست حرکت می کیم

min=-۱,max=۱ و دوره تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ می باشد.

$y = a\sin x$ -۴

همان نمودار $y = \sin x$ می باشد که با توجه به ضریب a خواهیم داشت. $\min = -|a|, \max = |a|$

که در مبدا مختصات اگر a>۰ باشد صعودی واگر a<۰ نزولی عبورمی کند

$y = a\sin(bx)$ -۵

مانند مرحله دوم دوره تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ می باشد که $\min = -|a|, \max = |a|$ می باشد.

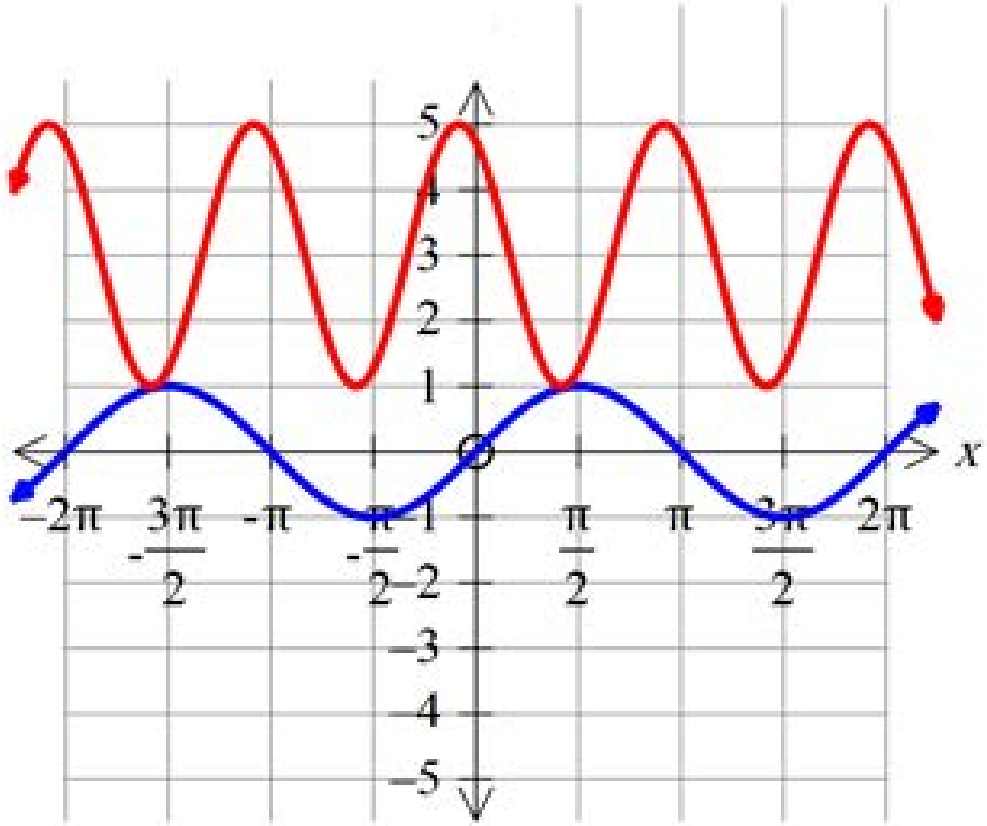
۶- $y = a\overbrace{\sin(bx + c)}^{g(x)}$

.مانند نمودار $g(x) = \sin(bx + c)$ می باشد که بستگی به مقدار و علامت **a** ممکن است ماگزیمم ومی نیمم غیر از ۱و۱- داشته باشیم واز مبدا خارج شود

۷- $y = a\sin(bx + c) + d$

همان نمودار $g(x) = a\sin(bx + c)$ می باشد به اندازه d به سمت بالا یا پایین حرکت کرده است.

نمودارتابع $g(x) = -۲\sin\left(۲x - \frac{\pi}{۳}\right) + ۳$ را رسم کنید با انتقال



**سوال:** در یک شهر در آبان ماه بطور متوسط در هر شبانه روز حداکثر دما ۳۲ درجه سانتیگراد وحداقل ۲۰درجه سانتیگراد است یک معادله سینوسی برای تعیین درجه حرارت در شبانه روز بنویسید.

$$c = \frac{۳۲ + ۲۰}{۲} = ۲۶ \qquad a = \frac{۳۲ - ۲۰}{۲} = ۶ \qquad \frac{۲\pi}{b} = ۲۴ \Rightarrow b = \frac{۲\pi}{۲۴} = \frac{\pi}{۱۲}$$

$$y = ۶\sin\left(\frac{\pi}{۱۲}x\right) + ۲۶$$

**سوال:** در یک مخزن آب شهری ازیک طرف آب وارد می شود وپس از تصفیه آب از راه دیگر خارج می شود ارتفاع ب در این مخزن طبق یک رابطه سیتوسی است که هر روز تکرار می شود اگر در ساعت ۳ صبح ارتفاع آن ماگزیمم و برابر ۱۵ متر در ساعت ۱۵ عصر کمترین ارتفاع به اندازه ۶متر داشته باشیم معادله این تابع را بنویسید .در ساعت ۱۲ ارتفاع آب چقدر است؟

$$a=\frac{۱۵-۶}{۲}=۴/۵ \qquad c=\frac{۱۵+۶}{۲}=۱۰/۵ \qquad \frac{T}{۲}=۱۵-۳=۱۲\rightarrow T=۲۴=\frac{۲\pi}{b}\rightarrow b=\frac{\pi}{۱۲}$$

$$\max(۳,۱۵)\rightarrow ۱۵=۴/۵\sin\left(\frac{\pi}{۱۲}\times ۳+\alpha\right)+۱۰/۵\rightarrow ۴/۵\sin\left(\frac{\pi}{۴}+\alpha\right)=۴/۵\rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{۴}+\alpha\right)=۱=\sin\frac{\pi}{۲}$$

$$\frac{\pi}{۴}+\alpha=\frac{\pi}{۲}\rightarrow \alpha=\frac{\pi}{۴}$$

$$\min(۱۵,۶)\rightarrow ۶=۴/۵\sin\left(\frac{\pi}{۱۲}\times ۱۵+\alpha\right)+۱۰/۵\rightarrow ۴/۵\sin\left(\frac{۵\pi}{۴}+\alpha\right)=-۴/۵\rightarrow \sin\left(\frac{۵\pi}{۴}+\alpha\right)=-۱=\sin\frac{۳\pi}{۲}$$

$$\frac{۵\pi}{۴}+\alpha=\frac{۳\pi}{۲}\rightarrow \alpha=\frac{\pi}{۴}$$

$$t=۱۲\rightarrow y=۴/۵\sin\left(\frac{\pi}{۱۲}\times ۱۲+\frac{\pi}{۴}\right)+۱۰/۵=۴/۵\left(-\sin\frac{\pi}{۴}\right)+۱۰/۵=-۴/۵\times ۰/۷+۱۰/۵=۷/۳$$

**سوال:** جمعیت نوعی از حیوانات طبق معادله $p(t)=۲۰۰۰\cos\frac{\pi t}{۵}+۸۰۰۰$ می باشد که $p(t)$ تعداد یا جمعیت در سال t می باشد دوره تناوب جمعیت چند سال است ماگزیمم ومی نیمم جمعیت چقدر است؟ نمودار آنرا رسم کنید (در یک دوره تناوب) معادله را برحسب سینوس بنویسید.

$$T=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۵}}=۱۰$$

زمانی ماگزیمم رخ میدهد که کسینوس عدد ۱ برگرداند

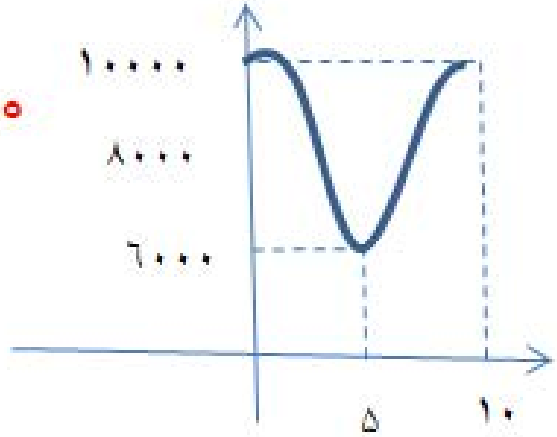
$$\begin{cases} t=۰\Rightarrow \cos\frac{\pi t}{۵}=۱\Rightarrow p(۰)=۲۰۰۰\times ۱+۸۰۰۰=۱۰۰۰۰ \\ t=۱۰\Rightarrow \cos\frac{\pi t}{۵}=\cos ۲\pi=۱\Rightarrow p(۱۰)=۲۰۰۰\times ۱+۸۰۰۰=۱۰۰۰۰ \end{cases}$$

یا هر مضربی از ۱۰

می نیمم زمانی رخ میدهد که کسینوس کمترین مقدارخود یعنی ۱-برگرداند یعنی در نقاط $۱۰k+۵$

$$t=۵\Rightarrow \cos\frac{\pi t}{۵}=\cos\pi=-۱\Rightarrow p(۵)=۲۰۰۰\times -۱+۸۰۰۰=۶۰۰۰$$

$$p(t)=۲۰۰۰\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi t}{۵}\right)+۸۰۰۰$$



سوال: معادله ولتاژیک دستگاه خانگی بر حسب تابع COS نسبت به زمان دارای فرکانس (دوره تناوب) $\frac{۱}{۶۰}$ می باشد بطوریکه تغییرات ولتاژدربازه $[-۱۷۰,۱۷۰]$ است معادله این ولتاژ را بنویسید.

$$y = p(t) = a\mathrm{Cos}(bt) + c, \frac{۲\pi}{b} = \frac{۱}{۶۰} \Rightarrow b = ۱۲۰\pi$$

$$a = \frac{۱۷۰-(-۱۷۰)}{۲} = ۱۷۰ \quad c = \frac{۱۷۰+(-۱۷۰)}{۲} = ۰$$

$$p(t) = ۱۷۰\mathrm{Cos}(۱۲۰\pi t)$$

همان‌طور که در فعالیت‌های قبل دیدیم در توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ ضریب $a$ در دورهٔ تناوب تابع بی‌تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضریب $b$ در دورهٔ تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی‌تأثیر است. مقدار $c$ نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می‌شود، در دورهٔ تناوب بی‌تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

بنابراین با داشتن ضابطهٔ تابعی به صورت فوق می‌توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب تابع را به دست آورد و برعکس با داشتن مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دورهٔ تناوب یک تابع مثلثاتی، می‌توان ضابطهٔ تابع مورد نظر را به دست آورد.

**مثال :** دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y = ۳\sin(۲x) - ۲$

ب) $y = -\frac{۱}{۴}\cos(\pi x)$

پ) $y = \pi\sin(-x) + ۱$

ت) $y = ۸\cos(\frac{x}{۳})$

**حل :**

الف) $\max = |۳| - ۲ = ۱$ $\quad \min = -|۳| - ۲ = -۵$ $\quad T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$

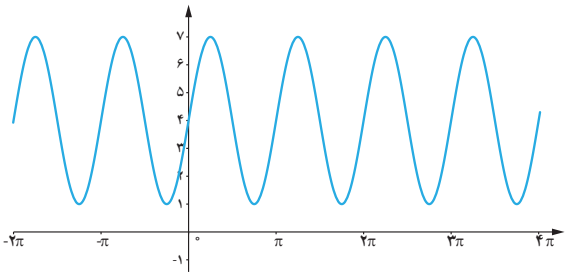
ب) $\max = \left|-\frac{۱}{۴}\right| = \frac{۱}{۴}$ $\quad \min = -\left|-\frac{۱}{۴}\right| = -\frac{۱}{۴}$ $\quad T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$

پ) $\max = |\pi| + ۱ = \pi + ۱$ $\quad \min = -|\pi| + ۱ = ۱ - \pi$ $\quad T = \frac{۲\pi}{|-۱|} = ۲\pi$

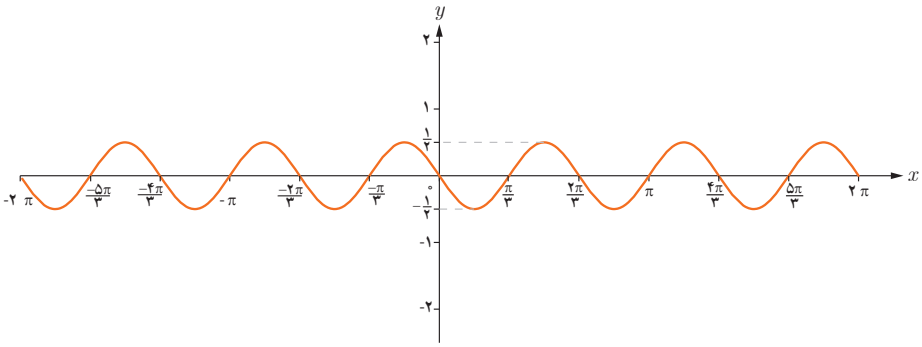
ت) $\max = |۸| = ۸$ $\quad \min = -|۸| = -۸$ $\quad T = \frac{۲\pi}{\left|\frac{۱}{۳}\right|} = ۶\pi$

**مثال :** هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطهٔ $f(x) = a\sin bx + c$ یا $f(x) = a\cos bx + c$ است. با دقت در شکلِ نمودار و تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطهٔ آن را مشخص نمایید.

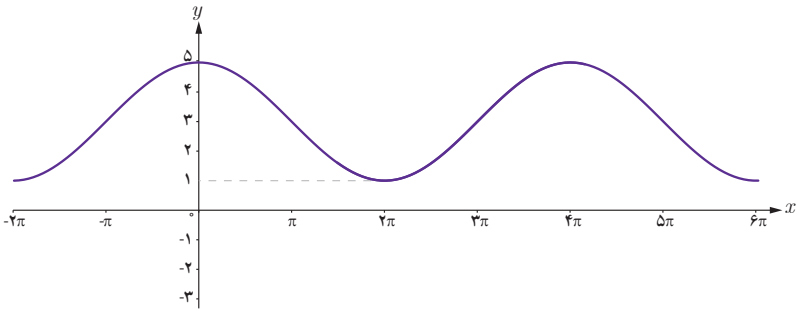
الف)



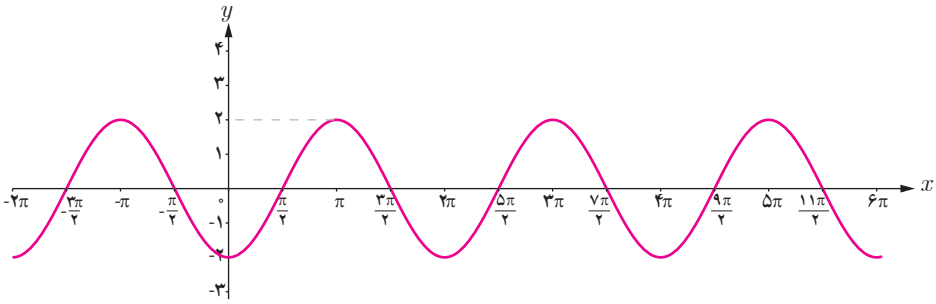
ب)



پ)



ت)



**حل :** الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و طول دورهٔ تناوب برابر $\pi$ است. لذا $T = \frac{۲\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = ۲$.

از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a| + c$ و $-|a| + c$ است، بنابراین همواره مقدار $c$ میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = ۴$ و در نتیجه $|a| = ۳$.

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از $a$ و $b$ بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای $x$ و $y$ دارد، هر دوی $a$ و $b$ باید مثبت باشند لذا ضابطهٔ تابع مورد نظر به صورت مقابل است : $y=۳\sin(۲x)+۴$

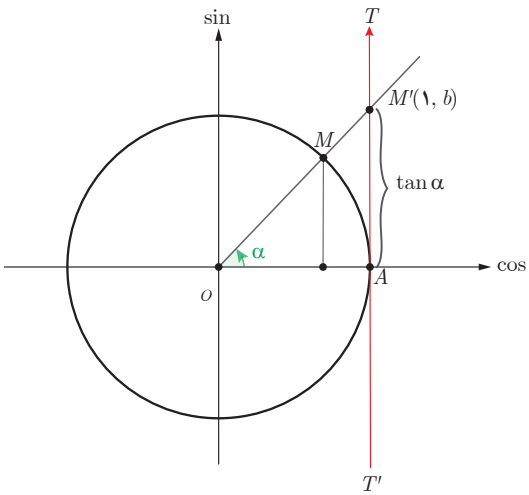
ب) با توجه به نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب از روی نمودار، $c = ۰$ و $|a| = \frac{۱}{۲}$ و $|b| = ۳$ به دست می‌آید که در آن علامت $a$ منفی و $b$ مثبت است. بنابراین داریم $y = -\frac{۱}{۲}\sin ۳x$

پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و طول دورهٔ تناوب برابر $۴\pi$ است. بنابراین $c = ۳$ و $|b| = \frac{۱}{۲}$ و $|a| = ۲$ . لذا $a = ۲$ و $b = \frac{۱}{۲}$ و بنابراین داریم $y = ۲\cos(\frac{x}{۲}) + ۳$ .

ت) ضابطهٔ این نمودار نیز می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و $c = ۰$ و $|a| = ۲$ و $|b| = ۱$ و $a$ منفی و $b$ مثبت است. بنابراین داریم $y = -۲\cos x$

## تانژانت

### فعالیت




در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو خط $TAT'$ در نقطهٔ $A$ بر محور کسینوس‌ها عمود است.

الف) زاویهٔ $\alpha$ را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره‌خط $OM$ را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطهٔ $M'$ قطع کند. نشان دهید :

$\tan\alpha = AM' = b$

می‌توان دید که تانژانت هر زاویه دلخواه مانند $\alpha$، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط $TAT'$ تعیین می‌شود. بنابراین خط $TAT'$ را محور تانژانت می‌نامیم. نقطهٔ $A$ مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟

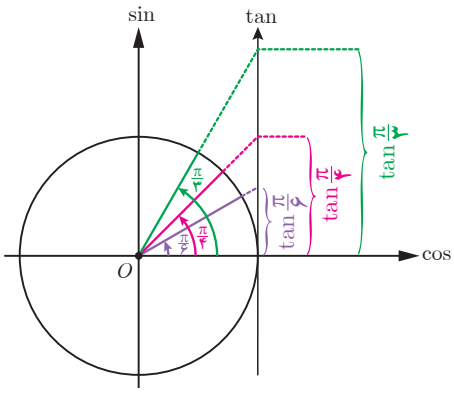
چون در ناحیه اول وسوم سینوس وکسینوس هم علامت هستند ولی در ناحیه های دوم وچهارم مختلف العلامه هستند

پ) آیا مقدار $\tan\frac{\pi}{۲}$ عددی حقیقی است؟ $\tan\frac{۳\pi}{۲}$ چطور؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.

خیر خیر

## تغییرات تانژانت

### فعالیت




با تغییر زاویهٔ $\alpha$ مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر $\alpha = ۰$، مقدار $\tan\alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه $\alpha$، مقدار $\tan\alpha$ نیز افزایش می‌یابد.

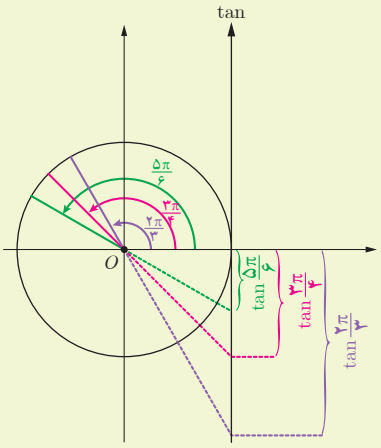
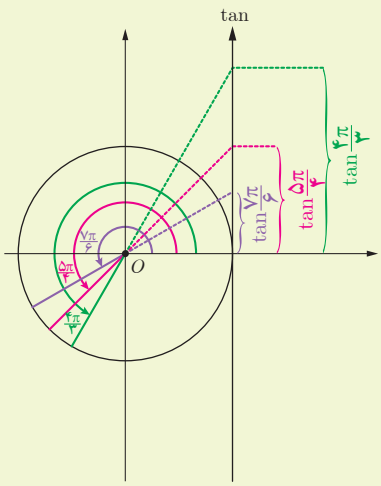
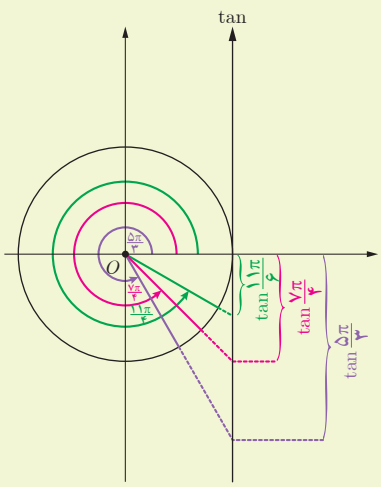
الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویهٔ $\alpha$ در ربع اول و نزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{۲}$، مقادیر تانژانت تا چه حد افزایش می‌یابد؟

ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت $a$ را داشته باشیم، چگونه می‌توان زاویه‌ای مانند $\alpha$ یافت، به طوری که $\tan\alpha = a$.

## کار در کلاس

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع‌های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهشی؟

ب) بازهٔ تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

| ربع | دوم | سوم | چهارم |
|---|---|---|---|
| زوایا |  |  |  |
| افزایشی یا کاهشی | افزایش | افزایش | افزایش |
| بازه تغییرات | $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$ | $\frac{7\pi}{6} < \alpha < \frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3} < \alpha < \frac{11\pi}{6}$ |

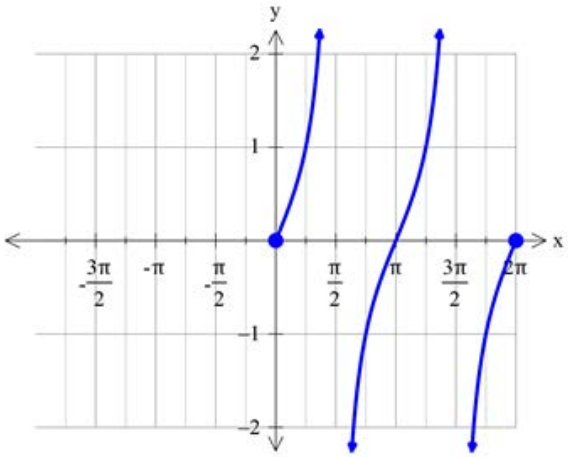
پ) جدول زیر را کامل کنید. (علامت ↗ به معنی افزایش یافتن و علامت ↘ به معنی کاهش یافتن است.)

| ربع اول | | | | ربع دوم | | | | ربع سوم | | | | ربع چهارم | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
| $0$ ↗ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | ↗ $1$ | ↗ $\sqrt{3}$ | ↗ $+\infty$ | ↗ $-\sqrt{3}$ | ↗ $-1$ | ↗ $\frac{-\sqrt{3}}{3}$ | ↗ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | ↗ $1$ | ↗ $\sqrt{3}$ | ↗ $+\infty$ | ↗ $-\sqrt{3}$ | ↗ $-1$ | ↗ $\frac{-\sqrt{3}}{3}$ | ↗ $0$ |

## تابع تانژانت

همان‌طور که می‌بینیم به ازای هر زاویهٔ دلخواه در دایرهٔ مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ , $k \in \mathbb{Z}$)، عددی حقیقی به عنوان $\tan\alpha$ داریم و تابعی با ضابطهٔ $y = \tan\alpha$ مشخص می‌کند. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $D = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می‌توان دید تابع $y = \tan\alpha$، تابعی متناوب است[1] و دوره تناوب آن $\pi$ است، زیرا :

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$




### کار در کلاس

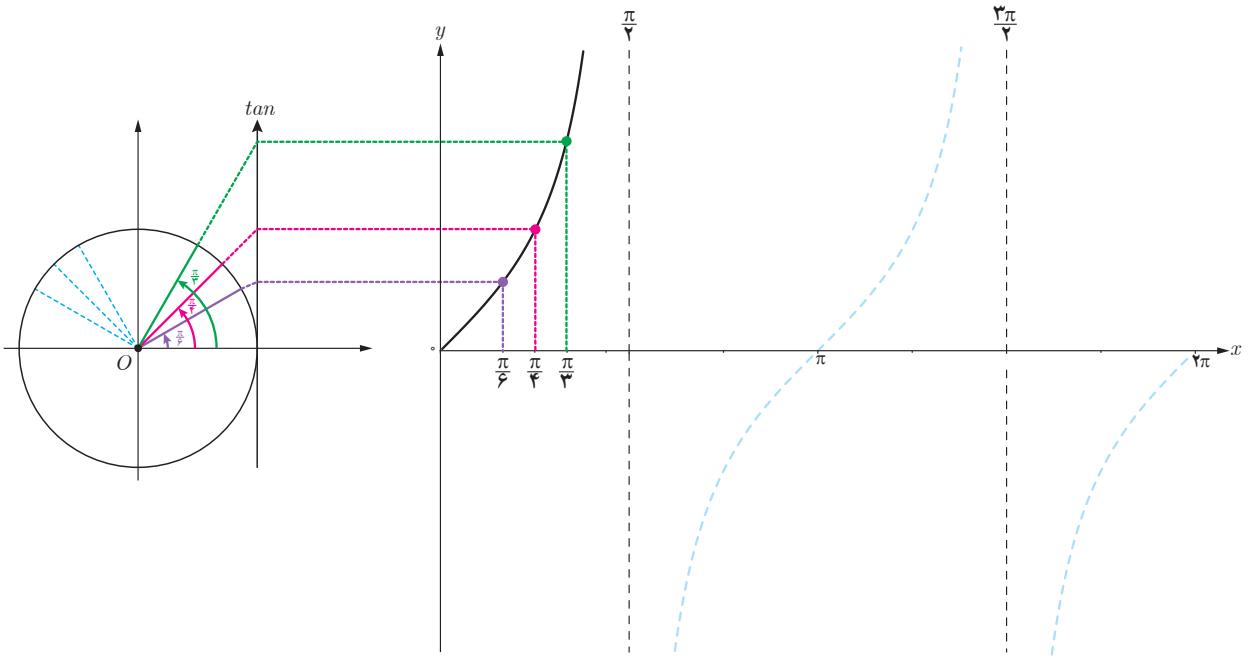
صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan\alpha$ را در بازه $[۰ , ۲\pi]$ بررسی کنید.

تابع در دامنه خود همواره صعودی است

### رسم تابع $y = \tan\alpha$

### فعالیت

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan\alpha$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع‌های دیگر رسم کنید.




۱ــ به دست آوردن دوره تناوب توابع شامل tan مدنظر نیست.

## تمرین

۱ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = ۱ + ۲\sin ۷x$

ب) $y = \sqrt{۳} - \cos\frac{\pi}{۲}x$

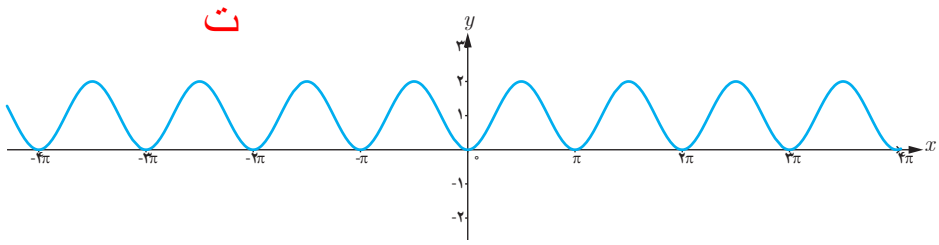
پ) $y = -\pi\sin(\frac{x}{۲}) - ۲$

ت) $y = -\frac{۳}{۴}\cos ۳x$

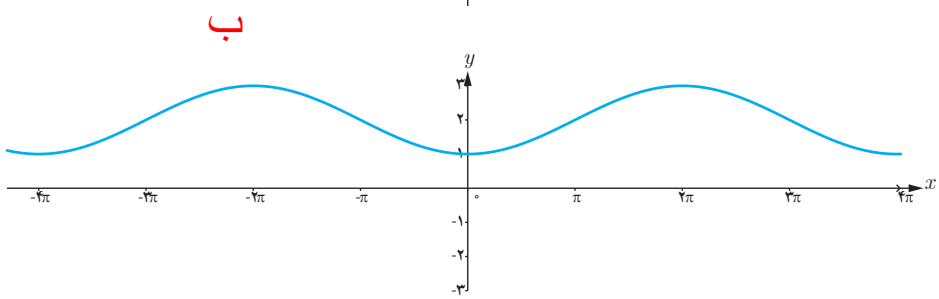
۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y = \sin\pi x$ ب) $y = ۲ - \cos\frac{۱}{۲}x$ پ) $y = \sin ۲x$ ت) $y = ۱ - \cos ۲x$

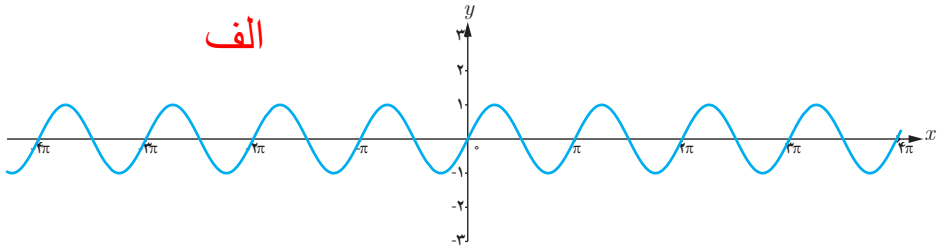
۱)



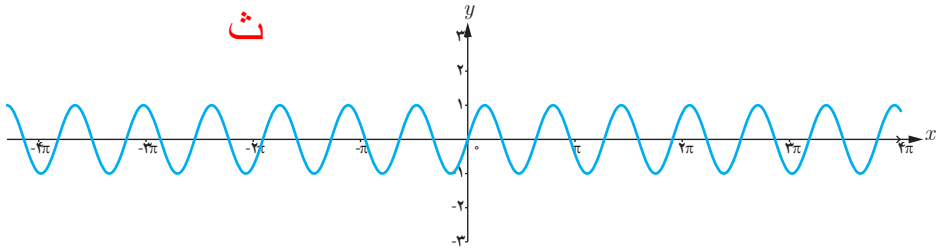

۲)




۳)




۴)



حل تمرین صفحه ۴۰ تمرین ۱:

$$y = ۱ + ۲\sin ۷x \xrightarrow[\max=|a|+c,\ \min=-|a|+c]{y=a\sin nbx+c \quad T=\frac{۲\pi}{|b|}} T = \frac{۲\pi}{|۷|} = \frac{۲\pi}{۷} \qquad \max = |۲| + ۱ = ۳ \qquad \min = -|۲| + ۱ = -۱$$

$$y = \sqrt{۳} - \cos\frac{\pi}{۲}x \xrightarrow[\max=|a|+c,\ \min=-|a|+c]{y=a\cos bx+c \quad T=\frac{۲\pi}{|b|}} T = \frac{۲\pi}{\left|\frac{\pi}{۲}\right|} = ۴ \qquad \max = |-۱| + \sqrt{۳} = ۱ + \sqrt{۳} \qquad \min = -|-۱| + \sqrt{۳} = -۱ + \sqrt{۳}$$

$$y = -\pi\sin\left(\frac{x}{۲}\right) - ۲ \xrightarrow[\max=|a|+c,\ \min=-|a|+c]{y=a\sin bx+c \quad T=\frac{۲\pi}{|b|}} T = \frac{۲\pi}{\left|\frac{۱}{۲}\right|} = ۴\pi \qquad \max = |-\pi| - ۲ = \pi - ۲ \qquad \min = -|-\pi| - ۲ = -\pi - ۲$$

$$y = -\frac{۳}{۴}\cos ۳x \xrightarrow[\max=|a|+c,\ \min=-|a|+c]{y=a\cos bx+c \quad T=\frac{۲\pi}{|b|}} T = \frac{۲\pi}{|۳|} = \frac{۲}{۳}\pi \qquad \max = \left|-\frac{۳}{۴}\right| = \frac{۳}{۴} \qquad \min = -\left|-\frac{۳}{۴}\right| = -\frac{۳}{۴}$$

۳ در هر مورد ضابطهٔ تابعی مثلثاتی با دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

الف) $T=\pi$ , $\max=۳$ , $\min=-۳$

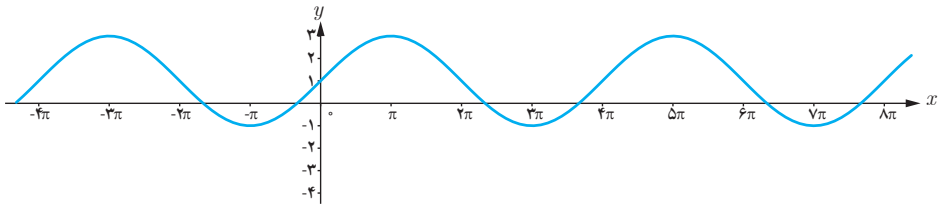
ب) $T=۳$ , $\max=۹$ , $\min=۳$

پ) $T=۴\pi$ , $\max=-۱$ , $\min=-۷$

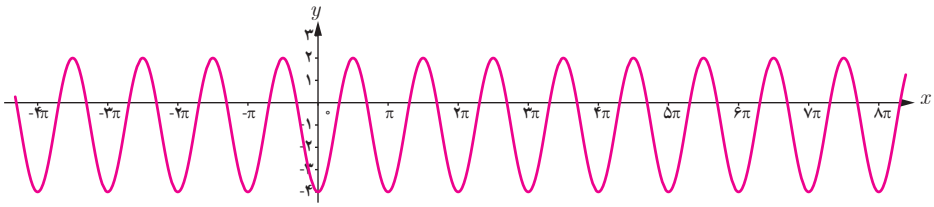
ت) $T=\frac{\pi}{۲}$ , $\max=۱$ , $\min=-۱$

۴ ضابطهٔ مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

الف)




ب)




۵ کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است. نادرست

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد. نادرست

پ) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد. نادرست

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است. درست

۶ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید :

الف) $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$

در ربع اول هم سینوس وهم تانژانت صعودی است

| | ۰ | | $\frac{\pi}{۶}$ | | $\frac{\pi}{۴}$ | | $\frac{\pi}{۳}$ | | $\frac{\pi}{۲}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin | ۰ | ↗ | $\frac{۱}{۲}$ | ↗ | $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ | ↗ | $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | ↗ | ۱ |
| tan | ۰ | ↗ | $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | ↗ | ۱ | ↗ | $\sqrt{۳}$ | ↗ | $+\infty$ ت ن |

ب) $\frac{۳\pi}{۲}<\alpha<۲\pi$

در ربع چهارم هم سینوس وهم تانژانت صعودی است

| | $\frac{۳\pi}{۲}$ | | $\frac{۵\pi}{۳}$ | | $\frac{۷\pi}{۴}$ | | $\frac{۱۱\pi}{۶}$ | | $۲\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin | $-۱$ | ↗ | $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | ↗ | $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ | ↗ | $-\frac{۱}{۲}$ | ↗ | ۰ |
| tan | ت ن | ↗ | $-\sqrt{۳}$ | ↗ | $-۱$ | ↗ | $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ | ↗ | ۰ |

تمرین ۳:

$$y = a\sin bx + c \qquad \max = |a| + c, \min = -|a| + c$$

$$T = \pi \quad \max = ۳ \quad \min = -۳ \Rightarrow a = \frac{۳-(-۳)}{۲} = ۳ \quad c = \frac{۳+(-۳)}{۲} = ۰ \quad \pi = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow b = ۲ \Rightarrow y = ۳\sin ۲x$$

$$T = ۳ \quad \max = ۹ \quad \min = ۳ \Rightarrow a = \frac{۹-۳}{۲} = ۳ \quad c = \frac{۹+۳}{۲} = ۶ \quad ۳ = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow b = \frac{۲}{۳}\pi \Rightarrow y = ۳\sin\frac{۲\pi}{۳}x + ۶$$

$$T = ۴\pi \quad \max = -۱ \quad \min = -۷ \Rightarrow a = \frac{-۱-(-۷)}{۲} = ۳ \quad c = \frac{-۱+(-۷)}{۲} = -۴ \quad ۴\pi = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow b = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = ۳\sin\left(\frac{۱}{۲}x\right) - ۴$$

$$T = \frac{\pi}{۲} \quad \max = ۱ \quad \min = -۱ \Rightarrow a = \frac{۱-(-۱)}{۲} = ۱ \quad c = \frac{۱+(-۱)}{۲} = ۰ \quad \frac{\pi}{۲} = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow b = ۴ \Rightarrow y = \sin(۴x)$$

حل تمرین ۴: الف)

$$\max = ۳, \min = -۱, T = ۴\pi$$

$$c = \frac{۳ + (-۱)}{۲} = ۱ , a = \frac{۳ - (-۱)}{۲} = ۲, |b| = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۴\pi} = \frac{۱}{۲}$$

$$\boxed{y = ۲\sin\left(\frac{۱}{۲}x\right) + ۱}$$

ب)

$$\max = ۲, \min = -۴, T = \pi$$

$$c = \frac{۲ + (-۴)}{۲} = -۱ , a = \frac{۲ - (-۴)}{۲} = ۳, |b| = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$$

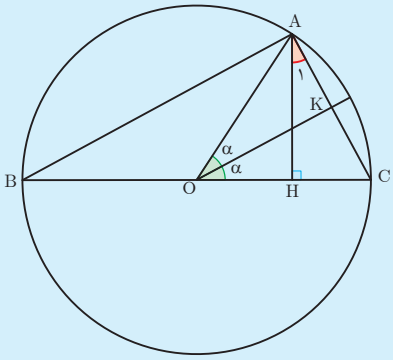
$$\boxed{y = ۳\cos(۲x) - ۱}$$

درس دوم

# معادلات مثلثاتی

## نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

در محاسبات فنی گاهی نسبت مثلثاتی برخی زوایا مورد نیاز است که مقدار آن را می‌توان به کمک دیگر زوایا به‌دست آورد. اگر مقدار $\cos ۱۵^\circ$ را نیاز داشته باشیم چگونه می‌توان آن را با استفاده از مقدار $\cos ۳۰^\circ$ به دست آورد؟ به وضوح $۱۵^\circ$ نصف $۳۰^\circ$ است و نیز می‌دانیم $\cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$. آیا با نصف کردن مقدار $\cos ۳۰^\circ$ می‌توان $\cos ۱۵^\circ$ را به دست آورد؟ در ادامه خواهیم دید که جواب منفی است ولی همچنان می‌شود مقدار $\cos ۱۵^\circ$ را به کمک مقدار معلوم $\cos ۳۰^\circ$ یافت اما نه با نصف کردن.[۱]




دایره روبه‌رو به شعاع واحد و مرکز $O$ را در نظر بگیرید. مطابق شکل، زاویه مرکزی $O$ برابر $۲\alpha$ داده شده که روبه‌رو به وتر $AC$ است. از این رو در مثلث $O\overset{\Delta}{A}K$ داریم:

$$AK = \sin\alpha \Rightarrow AC = ۲AK = ۲\sin\alpha \qquad (۱)$$

همچنین $\overset{\frown}{AC} = ۲\alpha$ و از آنجا که زاویه محاطی $B$ روبه‌رو به $\overset{\frown}{AC}$ است، لذا نصف آن است پس: $\hat{B} = \alpha$.

از طرفی $\hat{A}$ یک زاویه محاطی روبه‌رو به قطر $BC$ است و لذا: $\hat{A} = ۹۰^\circ$

همچنین از مجموع زوایای $A\overset{\Delta}{B}C$ به‌دست می‌آید:

$$A\overset{\Delta}{B}C : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۹۰^\circ + \alpha + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۹۰^\circ - \alpha$$

به‌طور مشابه در $A\overset{\Delta}{H}C$ داریم:

$$A\overset{\Delta}{H}C : \hat{H} + \hat{A}_۱ + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۹۰^\circ + \hat{A}_۱ + ۹۰^\circ - \alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = \alpha$$

اکنون ضلع $AH$ را در $O\overset{\Delta}{A}C$ و $A\overset{\Delta}{H}C$ به‌دست آورده و برابر قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} O\overset{\Delta}{A}C : AH = \sin ۲\alpha \\ A\overset{\Delta}{H}C : \cos\hat{A}_۱ = \cos\alpha = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC\cos\alpha \xrightarrow{(۱)} AH = ۲\sin\alpha\cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$$

همچنین در $O\overset{\Delta}{A}H$ داریم: $OH = \cos ۲\alpha$ و در $A\overset{\Delta}{H}C$ داریم:

$$\sin\hat{A}_۱ = \sin\alpha = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = \sin\alpha \times AC = \sin\alpha(۲\sin\alpha) = ۲\sin^۲\alpha$$

از طرفی با توجه به اینکه $OC=۱$ شعاع دایره است پس داریم:

$$OC = OH + HC = ۱ \Rightarrow OH = ۱ - HC \Rightarrow \cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha$$

و نیز با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^۲\alpha + \sin^۲\alpha = ۱$ به دست می‌آوریم $\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱$.

۱ــ این روش را ابوالوفا بوزجانی ریاضی‌دان مشهور ایرانی ارائه داده است. طرح اثبات فوق در ارزشیابی‌ها مجاز نیست.

به طور کلی داریم :

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\qquad$ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

**مثال :** مقدار $\cos 15^\circ$ و $\sin 15^\circ$ را بیابید.

$\sin 30^\circ = 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$

$\frac{1}{2} = 2\times\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\cos 15^\circ$

$\frac{1}{2} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\cos 15^\circ$

$\cos 15^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ (۱۵° در ربع اول است.)

$\cos 30^\circ = 1-2\sin^2 15^\circ$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1-2\sin^2 15^\circ$

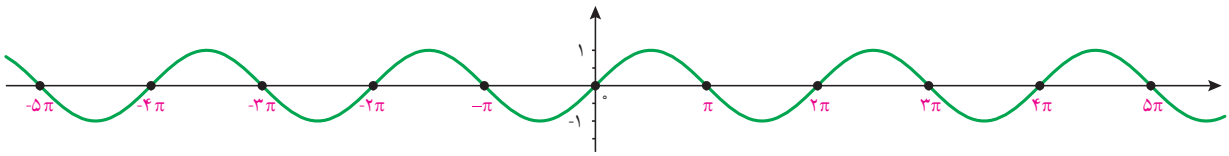
$\sin^2 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{-2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ (۱۵° در ربع اول است.)

## معادلات مثلثاتی

معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ مجهول داریم، یک معادلهٔ مثلثاتی نام دارد.

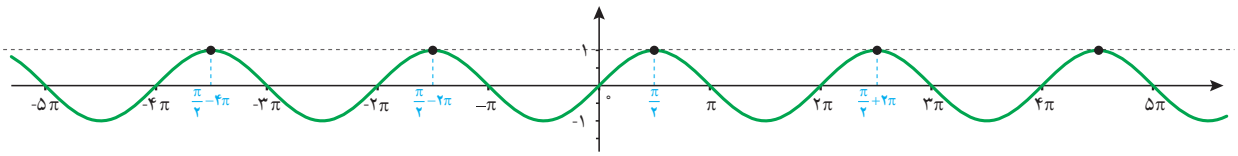
**مثال :** تابع مثلثاتی $y=\sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.




همان‌طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x=0$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به‌صورت $x=\ldots,-3\pi,-2\pi,-\pi,0,\pi,2\pi,3\pi,\ldots$ می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y=0$ (یعنی محور $x$ها) و تابع $y=\sin x$ است.

این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x=k\pi$ که $k$ یک عدد صحیح است نمایش داد.

به‌طور مشابه جواب های معادله $\sin x=1$ مقادیری از $x$ هستند که به ازای آنها مقدار $\sin x$ برابر ۱ می‌شود. این مقادیر محل تقاطع $y=1$ و $y=\sin x$ است که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله صفحه قبل به‌صورت

$$x=\cdots,\ \frac{\pi}{۲}-۴\pi,\ \frac{\pi}{۲}-۲\pi,\ \frac{\pi}{۲},\ \frac{\pi}{۲}+۲\pi,\ \cdots$$

می‌باشند که به‌صورت کلی $x=\frac{\pi}{۲}+۲k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ قابل نمایش است.

اکنون معادله $\sin x=\frac{۱}{۲}$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

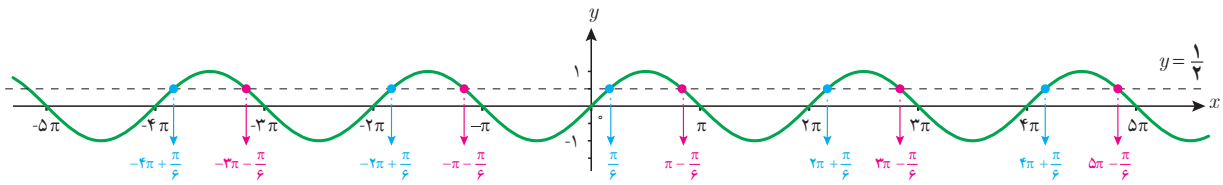
**فعالیت**

$$\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲},\ \sin\left(\pi-\frac{\pi}{۶}\right)=\sin\frac{۵\pi}{۶}=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

۱ چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ است مثال بزنید.

$$\alpha=\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶},\ldots$$

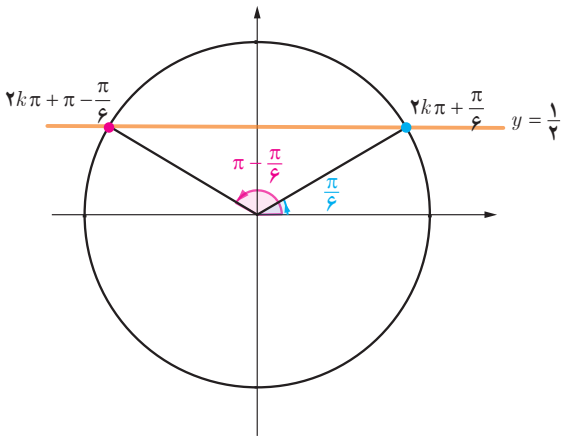
۲ خط $y=\frac{۱}{۲}$ و نمودار $y=\sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟ بله




۳ طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y=\frac{۱}{۲}$ و $y=\sin x$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x=\frac{۱}{۲}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ این معادله بی شمار جواب دارد

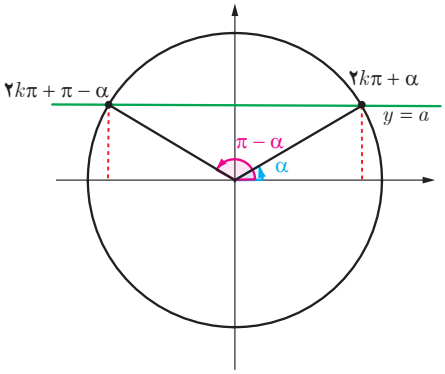
بله

۴ در دایره مثلثاتی زیر خط $y=\frac{۱}{۲}$ و زوایای $\frac{\pi}{۶}$ و $\pi-\frac{\pi}{۶}$ که سینوس آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{۶}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi-\frac{\pi}{۶}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟




هم انتها با $\frac{\pi}{۶}$: $\ldots\ldots,\ -۲\pi+\frac{\pi}{۶},\ \frac{\pi}{۶},\ ۲\pi+\frac{\pi}{۶},\ \ldots\ldots$

هم انتها با $\pi-\frac{\pi}{۶}$: $\ldots\ldots,\ -\pi-\frac{\pi}{۶},\ \pi-\frac{\pi}{۶},\ ۳\pi-\frac{\pi}{۶},\ \ldots\ldots$




برای عدد حقیقی $-۱\leq a\leq ۱$ که $\sin x=a$، زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin\alpha=a$. بنابراین معادله $\sin x=a$ به‌صورت $\sin x=\sin\alpha$ بازنویسی می‌شود.
اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x=\sin\alpha$ باید رابطه بین کمان‌های $x$ و α را بیابیم.
با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول $x$ به‌طوری که $\sin x=\sin\alpha$ در دوران‌های مختلف به‌صورت زیر است :

$$\sin x=\sin\alpha \Rightarrow x=۲k\pi+\alpha \quad \text{و} \quad x=(۲k+۱)\pi-\alpha \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\sin x=\sin\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi+\alpha$ و $x=(۲k+۱)\pi-\alpha$ می‌باشد که $k\in\mathbb{Z}$.

**مثال :** معادلهٔ $\sin x=-\frac{۱}{۲}$ را حل کنید.

$$\sin x=-\frac{۱}{۲}$$

$$\sin x=\sin(-\frac{\pi}{۶})$$

$$\begin{cases} x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶} & , k\in\mathbb{Z} \\ x=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶} & , k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

**کار در کلاس**

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲\sin x-\sqrt{۳}=۰$

$$\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳} \\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

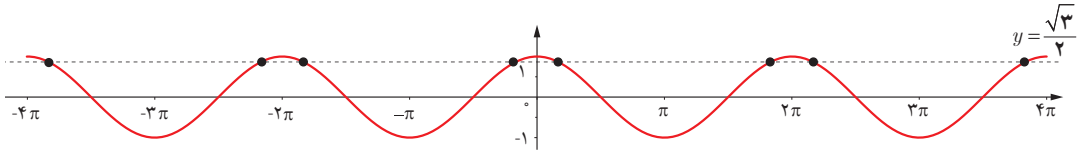
ب) $۴\sin x+\sqrt{۸}=۰$

$$\sin x=\frac{-\sqrt{۸}}{۴}=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}=\sin\left(-\frac{\pi}{۴}\right)$$

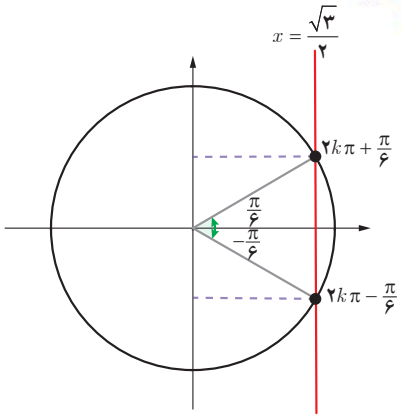
$$\Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi-\frac{\pi}{۴} \\ x=۲k\pi+\pi+\frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

**فعالیت**

نمودار تابع $y=\cos x$ و خط $y=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله $\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را بیابید.



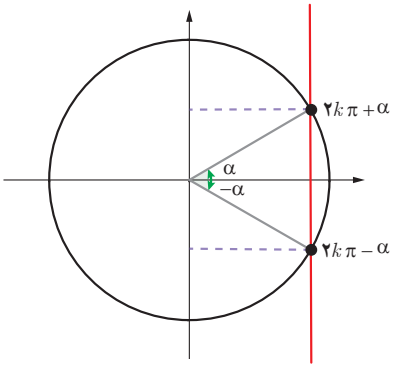
$$x=\frac{\pi}{6}, x=2\pi-\frac{\pi}{6}, x=2\pi+\frac{\pi}{6}, x=-\frac{\pi}{6}, x=-2\pi+\frac{\pi}{6}, \ldots$$




الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه‌رو و محل تقاطع خط $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ با دایره مثلثاتی، جواب‌های معادله فوق را به‌دست آورید.

برای هر عدد حقیقی $-1\le a\le 1$ در معادله $\cos x=a$ زاویه‌ای چون $\alpha$ وجود دارد که $\cos\alpha=a$.




بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به‌صورت $\cos x=\cos\alpha$ نوشته و سپس رابطه بین زوایای $x$ و $\alpha$ را با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو به‌صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x=\cos\alpha \Rightarrow x=2k\pi+\alpha \quad \text{و} \quad x=2k\pi-\alpha \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

ب: $\frac{\pi}{6}$ زاویه هایی هم انتها با $\Rightarrow \frac{\pi}{6}, 2\pi+\frac{\pi}{6}, 4\pi+\frac{\pi}{6} \longrightarrow k\in\mathbb{Z}, x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$

$-\frac{\pi}{6}$ زاویه هایی هم انتها با $\Rightarrow -\frac{\pi}{6}, -2\pi-\frac{\pi}{6}, 2\pi-\frac{\pi}{6}, -4\pi-\frac{\pi}{6} \longrightarrow k\in\mathbb{Z}, x=2k\pi-\frac{\pi}{6}$

جواب‌های کلی معادله $\cos x=\cos\alpha$ به‌صورت $x=2k\pi\pm\alpha$ می‌باشند که $k\in\mathbb{Z}$.

**مثال :** جواب‌های معادله $\cos x=\frac{1}{2}$ را به‌دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi,\pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ پس معادله به‌صورت $\cos x=\cos\frac{\pi}{3}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند :

$$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای $k$ در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های $x=-2\pi-\frac{\pi}{3}, -2\pi+\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

**مثال :** معادله $\sin 2x=\sin 3x$ را حل کنید.

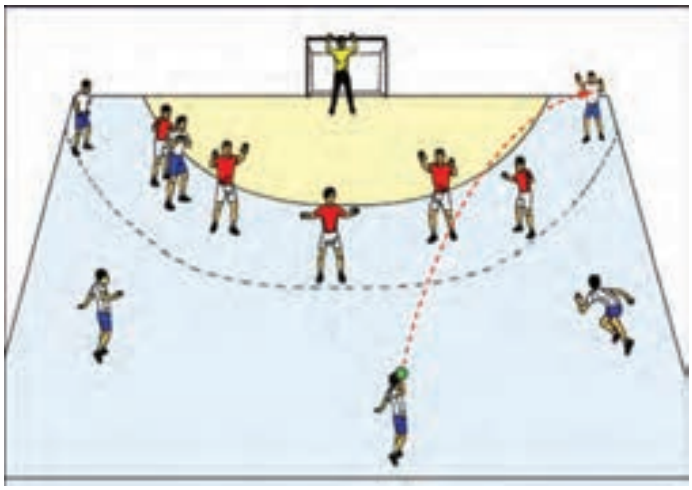
می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند :

$$\begin{cases} 2x=2k\pi+3x \Rightarrow x=2k\pi & , k\in\mathbb{Z} \\ 2x=(2k+1)\pi-3x \Rightarrow x=\frac{(2k+1)\pi}{5} & , k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

**مثال :** معادله $۲\sin ۳x-\sqrt{۲}=۰$ را حل کنید.

$$۲\sin ۳x-\sqrt{۲}=۰$$
$$۲\sin ۳x=\sqrt{۲}$$

$$\sin ۳x=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sin ۳x=\sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} ۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۱۲} & , k\in\mathbb{Z} \\ ۳x=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x=\frac{(۲k+۱)}{۳}\pi-\frac{\pi}{۱۲} & , k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$



**مثال :** یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت $۱۶\ m/s$ برای هم‌تیمی خود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ $v$ (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی $d$ (بر حسب متر) و زاویه پرتاب $\theta$ به‌صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d=\frac{v^{۲}\sin ۲\theta}{۱۰}$$

از رابطه داده شده به دست می‌آید :

$$۱۲/۸=\frac{(۱۶)^{۲}\sin ۲\theta}{۱۰} \Rightarrow \sin ۲\theta=\frac{۱۲/۸\times ۱۰}{۲۵۶} \Rightarrow \sin ۲\theta=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} ۲\theta=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} & , k\in\mathbb{Z} \\ ۲\theta=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۶} & , k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta=\frac{\pi}{۱۲}$ می‌باشد.

**مثال :** جواب‌های معادله $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ را به‌دست آورید.

$$۲\sin x\cos x=۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\sin ۲x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin ۲x=\sin\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۶} & , k\in\mathbb{Z} \\ ۲x=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶} & , k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

**مثال :** معادله $\cos x(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به‌صورت $2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$ می‌نویسیم. با تغییر متغیر $\cos x = t$ می‌توان معادله فوق را به معادله درجه دوم $2t^2 - 9t - 5 = 0$ تبدیل کرد. جواب‌های این معادله $t = -\frac{1}{2}$ و $t=5$ است. بنابراین جواب‌های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده $\cos x=5$ و $\cos x = -\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آیند. از آنجا که $\cos x=5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب‌های معادله $\cos x = -\frac{1}{2}$ را به‌دست می‌آوریم.

زیرا مقادیر کسینوس همواره بین مثبت یک ومنفی یک می باشد

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}\ ,\ k = \mathbb{Z}$$

## تمرین

۱ فرض کنید $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ و $\alpha$ زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$ ب) $\sin 2\alpha$

۲ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به‌دست آورید.

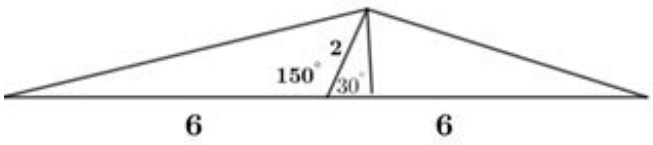
۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 3x$ ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

پ) $\cos x = \cos 2x$ ت) $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$

ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ ج) $\sin x - \cos 2x = 0$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟




$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin C = 3 \rightarrow \sin C = \frac{1}{2} \rightarrow C = 30^\circ, 150^\circ$$

## حل تمرین صفحه ۴۸:

الف)

$$\sin^{۲}\alpha = ۱ - \left(\frac{۵}{۱۳}\right)^{۲} = \frac{۱۴۴}{۱۶۹} \rightarrow \sin\alpha = \frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\cos ۲\alpha = ۲\cos^{۲}\alpha - ۱ = ۲ \times \frac{۲۵}{۱۶۹} - ۱ = -\frac{۱۱۹}{۱۶۹}$$

ب)

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha.\cos\alpha = ۲ \times \frac{۱۲}{۱۳} \times \frac{۵}{۱۳} = \frac{۱۲۰}{۱۶۹}$$

حل تمرین ۲:

$$\sin^{۲} ۲۲/۵ = \frac{۱-\cos ۴۵^{\circ}}{۲} = \frac{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{۲-\sqrt{۲}}{۴} \rightarrow \sin ۲۲/۵ = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

$$\cos^{۲} ۲۲/۵ = \frac{۱+\cos ۴۵^{\circ}}{۲} = \frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{۲+\sqrt{۲}}{۴} \rightarrow \cos ۲۲/۵ = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

حل تمرین ۴:

الف)

$$\sin\frac{\pi}{۲} = \sin ۳x$$

$$۱ = \sin ۳x \rightarrow ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$$

ب)

$$\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$$

$$۲\cos^{۲} x - ۱ - \cos x + ۱ \rightarrow \cos x\left(۲\cos x - ۱\right) = ۰ \rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ ۲\cos x - ۱ = ۰ \rightarrow \cos x = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

پ)

$$\cos x = \cos ۲x \rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + ۲x \rightarrow x = -۲k\pi \\ x = ۲k\pi - ۲x \rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \end{cases}$$

ت)

$$\cos 2x - \sin x + 1 = 1 \rightarrow 1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\sin x = t} t^2 + t - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 \rightarrow t = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{matrix} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ث)

$$\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0$$

$$\xrightarrow{\sin x = t} t^2 + t - \frac{3}{4} = 0 \rightarrow \Delta = 1 + 3 = 4 \rightarrow t = \frac{-1 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{matrix} \\ \sin x = \frac{-3}{2} \quad \text{غیر ممکن} \end{cases}$$

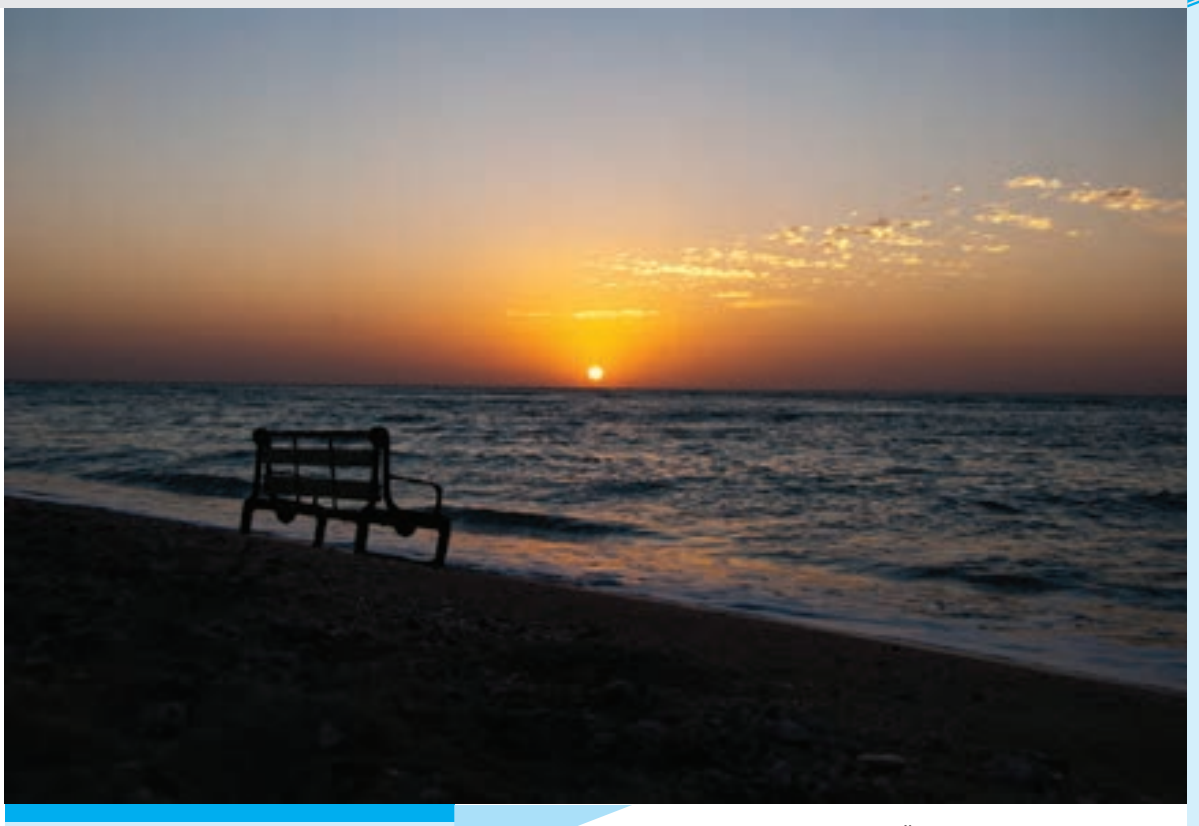
$$\sin x - \cos 2x = 0$$

ج)

$$\sin x = \cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \rightarrow x = -2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

فصل

# ۳ حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت



عکاس: سیدمهدی حسینی

جزیره قشم، روستای شیب‌دراز

فیزیکدان معروف، نیلز بور معتقد است که انسان با مشاهدهٔ دریا، حس می‌کند که بخشی از بی‌نهایت را در اختیار دارد. شاید به همین دلیل است که مشاهدهٔ طلوع یا غروب آفتاب در ساحل دریا حس خوشایندی را در ما برمی‌انگیزد. و چه بسا دلیل زیبایی آسمان شب نیز آن باشد که هیچ انتهایی برای آن دیده نمی‌شود!

درس اوّل

**حد بی‌نهایت**

درس دوم

**حد در بی‌نهایت**

درس اوّل

# حد بی‌نهایت

## یادآوری و تکمیل

در کلاس یازدهم با مفهوم حد تابع در یک نقطه آشنا شدیم. در فصل حاضر به حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت خواهیم پرداخت. پیش از آن لازم است مطالبی را از پایه قبل یادآوری و تکمیل کنیم. همچنین، برخی پیش‌نیازها باید ارائه گردد.

**بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $(x-a)$ :**

**فعالیت**

۱ الف) چندجمله‌ای $f(x)=2x^2-5x+1$ را بر دو جمله‌ای درجه اول $(x-3)$ تقسیم کرده‌ایم. جاهای خالی را پر کنید :

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^2}-5x+1 & x-3 \\ \hline -(\cancel{2x^2}-6x) & 2x+\boxed{1} \\ \hline \quad \cancel{x}+1 & \\ \quad -(\boxed{x}-3) & \\ \hline \qquad 4 & \end{array}$$

ب) اگر در تقسیم بالا، باقیمانده را با $R$ نشان دهیم، داریم $R=$ ۴.

پ) مقدار $f(3)$ را محاسبه کنید. $f(3)=2(9)-5(3)+1=18-15+1=4$

ت) $f(3)$ و $R$ چه رابطه‌ای با هم دارند؟ برابرند

ث) رابطه تقسیم را کامل کنید : $2x^2-5x+1=(x-3)(2x+\boxed{1})+4$

۲ الف) اکنون می‌خواهیم در حالت کلی چندجمله‌ای دلخواه $f(x)$ را بر دوجمله‌ای درجه اول $(x-a)$ تقسیم کنیم. فرض کنیم خارج‌قسمت این تقسیم، چندجمله‌ای $Q(x)$ و باقیماندهٔ آن عدد ثابت $R$ باشد :

$$\begin{array}{l|l} f(x) & x-a \\ \hline & Q(x) \\ R & \end{array}$$

رابطهٔ تقسیم به صورت زیر است :

$$f(x)=(x-a)\,Q(x)+R$$

این رابطه، به ازای تمام مقادیر $x$ درست است؛ از جمله به ازای $x=a$. با قرار دادن $a$ به جای $x$ در دو طرف رابطهٔ فوق خواهیم داشت :

$$f(a)=\underbrace{(a-a)Q(a)}_{0}+R \Rightarrow f(a)=R$$

ب) از رابطهٔ اخیر مقدار $R$ را به دست آورید.

از فعالیت قبل دیده می‌شود که :

**قضیه :** در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجهٔ اول $(x-a)$، باقی ماندهٔ تقسیم برابر $f(a)$ است.

**نتیجه :** اگر $f(a)$ برابر صفر باشد آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

نتیجهٔ حاضر را می‌توان برای تجزیه چندجمله‌ای‌ها به کار برد.

## کار در کلاس

۱ در چندجمله‌ای $f(x) = ۳x^۲ - ۵x - ۲$، مقدار $f(۲)$ برابر صفر است. بنابراین $f(x)$ بر $(x - ۲)$ بخش‌پذیر است. با تکمیل مراحل تقسیم، درستی این مطلب را بررسی کنید.

$$\begin{array}{l|l} ۳x^۲ - ۵x - ۲ & x - ۲ \\ \hline -(۳x^۲ - ۶x) & ۳x + ۱۰ \\ \hline x - ۲ & \\ -(۱۰x - ۲۰) & \\ \hline R = ۱۸ & \end{array}$$

بنابر رابطهٔ تقسیم داریم : $f(x) = ۳x^۲ - ۵x - ۲ = (x - ۲)(۳x + ۱۰)$

همانگونه که دیده می‌شود، $f(x)$ به‌صورت حاصل ضرب عامل‌های اول نوشته شده‌است.

۲ چندجمله‌ای $g(x) = ۲x^۳ + x^۲ + ۱$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا $g(x)$ بر $(x + ۱)$ بخش‌پذیر است؟ چرا؟ بله

$x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱$

$g(-۱) = ۲(-۱)^۳ + (-۱)^۲ + -۲ + ۱ + ۱ = ۰$

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید :

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۳ + x^۲ + ۱ & x + ۱ \\ \hline -(۲x^۳ + ۲x^۲) & ۲x^۲ - x + ۱ \\ \hline -x^۲ + ۱ & \\ -(-x^۲ - x) & \\ \hline x + ۱ & \\ -(x + ۱) & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

پ) $g(x)$ را به صورت حاصل‌ضرب عامل‌ها بنویسید.

$g(x) = (x + ۱)(۲x^۲ - x + ۱)$

۳ نشان دهید چندجمله‌ای $f(x) = ۲x^۳ + ۵x^۲ - ۳x - ۱۰$ بر دوجمله‌ای $x + ۲$ بخش‌پذیر است.

$x + ۲ = ۰ \rightarrow x = -۲$

$f(-۲) = ۲(-۲)^۳ + ۵(-۲)^۲ - ۳(-۲) - ۱۰ = -۱۶ + ۲۰ + ۶ - ۱۰ = ۰ \Rightarrow \boxed{R = ۰}$

## حد توابع کسری

با قضیه زیر از پایهٔ قبل آشنا هستیم :

> **قضیه :** اگر دو تابع $f$ و $g$ در نقطه‌ای به طول $a$ حد داشته باشند و حد آنها در این نقطه به ترتیب $l$ و $m$ باشد به‌طوری که $m \neq ۰$، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در $a$ حد دارد و این حد برابر $\frac{l}{m}$ است.

**مثال**[۱] :

$$\lim_{x \to ۵} \frac{x^۲ - ۳x + ۲}{x + ۱} = \frac{۱۲}{۶} = ۲$$

در سال گذشته دیدیم که در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$، اگر $f(a) = g(a) = ۰$، در این صورت دیگر قضیهٔ بالا برای محاسبه حد تابع $\frac{f}{g}$ در $a$ قابلیت استفاده ندارد. در این حالت با توجه به روابط $f(a) = ۰$ و $g(a) = ۰$، نتیجه می‌گیریم که چند جمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x - a)$ بخش‌پذیرند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ بر $(x - a)$، تابع گویای دیگری حاصل می‌شود که حد آن در نقطهٔ $a$، در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ در $a$ برابر است.

**مثال :** مقدار $\lim_{x \to ۱} \frac{x^۲ - ۱}{x^۲ + x - ۲}$ را محاسبه کنید.

**حل :** صورت و مخرج کسر به ازای $x = ۱$ برابر صفرند. بنابراین هم صورت و هم مخرج بر $(x - ۱)$ بخش‌پذیرند. این عامل را به کمک تجزیه، در صورت و مخرج ظاهر و سپس حذف می‌کنیم.

$$\lim_{x \to ۱} \frac{x^۲ - ۱}{x^۲ + x - ۲} = \lim_{x \to ۱} \frac{\cancel{(x - ۱)}(x + ۱)}{\cancel{(x - ۱)}(x + ۲)} = \frac{۱ + ۱}{۱ + ۲} = \frac{۲}{۳}$$

---

۱ــ در این بخش از درس اول، حد توابع گویا که درجهٔ صورت و مخرج حداکثر ۳ باشد و همچنین توابع کسری شامل عبارت‌های رادیکالی با فرجهٔ حداکثر ۳ مورد بحث هستند. بنابراین تابع‌های شامل قدر مطلق، جزء صحیح و نسبت‌های مثلثاتی مدنظر نیستند. رعایت این مطلب در انواع ارزشیابی‌ها الزامی است.

**مثال :** حد تابع $f(x)=\dfrac{2x^3+3x^2+4}{x^3+8}$ را در نقطهٔ $x=-2$ در صورت وجود به دست آورید.

**حل :** در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای $x=-2$ برابر صفرند. باید عامل $(x+2)$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. مخرج را می‌توانیم به کمک اتحاد مجموع مکعب‌های دو جمله به حاصل‌ضرب عامل‌های اوّل تجزیه کنیم. اما برای تجزیهٔ صورت، آن را بر $(x+2)$ تقسیم می‌کنیم :

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^3}+3x^2+4 & x+2 \\ \hline -(\cancel{2x^3}+4x^2) & 2x^2-x+2 \\ \quad \cancel{-x^2}+4 & \\ \quad -(\cancel{-x^2}-2x) & \\ \qquad \cancel{2x}+\cancel{4} & \\ \qquad -(\cancel{2x}+\cancel{4}) & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

بنابر رابطهٔ تقسیم می‌توان نوشت $2x^3+3x^2+4=(x+2)(2x^2-x+2)$. بنابراین :

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(2x^2-x+2)}{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}=\frac{8+2+2}{4+4+4}=1$$

**تذکر :** گاهی صورت یا مخرج تابع $\dfrac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. در این حالت برای محاسبه حد $\dfrac{f}{g}$ در نقطهٔ $a$ لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن $f$ و $g$ شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به‌دست آوریم.

**مثال :** حد تابع $g(x)=\dfrac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$ را در نقطهٔ به طول $x=5$ در صورت وجود به دست آورید.

**حل :** هم حد صورت و هم حد مخرج در نقطهٔ ۵ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $2+\sqrt{x-1}$ ضرب می‌کنیم تا صورت کسر عبارتی گویا شود.

$$\lim_{x\to 5} g(x)=\lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}\times\frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 5}\frac{4-(x-1)}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(2+\sqrt{x-1})}=\frac{-1}{2+2}=\frac{-1}{4}$$

**مثال :** حد تابع $h(x)=\dfrac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}$ را در $x=8$ در صورت وجود به دست آورید.

**حل :** هم حد صورت و هم حد مخرج در $x=8$ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4$ ضرب می‌کنیم تا مخرج کسر گویا شود.

$$\lim_{x\to 8} h(x)=\lim_{x\to 8}\frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\lim_{x\to 8}\frac{x\cancel{(x-8)}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\cancel{x-8}}=8(4+4+4)=96$$

**کار در کلاس**

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x^2+3x}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-4x+1}{2x^2+x-1}$

پ) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{2x^3-13x^2+24x-9}$

ت) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+\sqrt{2x+3}}$

ث) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2+x-2}$

ج) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2}$

## حد نامتناهی

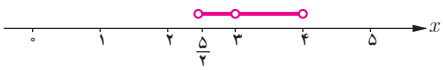
تابعی مثل $f$ را در نظر بگیرید که در نزدیکی یک نقطه مثل $a$، مقدارش از هر عدد دلخواه مثبتی بتواند بزرگ‌تر شود؛ به عبارت دیگر، در نقطهٔ $a$ حد آن $+\infty$ شود. در اینجا، حدهایی از این نوع را بررسی می‌کنیم. ابتدا به چند تعریف نیاز داریم.

**همسایگی :** هر بازهٔ باز شامل عدد حقیقی $x_0$ را یک همسایگی $x_0$ می‌نامیم.
به‌عبارت دیگر اگر $x_0 \in (a\,,\,b)$ آنگاه بازهٔ $(a\,,b)$ یک همسایگی $x_0$ می‌باشد.

**مثال :** بازهٔ $(2\,,5)$ یک همسایگی ۳ است. آیا بازهٔ $(0\,,4)$ هم یک همسایگی برای ۳ محسوب می‌شود؟ شما دو همسایگی دیگر برای ۳ بنویسید و جواب خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

**همسایگی محذوف :** اگر بازهٔ $(a\,,b)$ یک همسایگی عدد حقیقی $x_0$ باشد، آنگاه مجموعهٔ $(a\,,\,b)-\{x_0\}$ یک همسایگی محذوف $x_0$ نامیده می‌شود.

**مثال :** مجموعهٔ $(\frac{5}{2}\,,4)-\{3\}$ یک همسایگی محذوف ۳ می‌باشد.



کار در کلاس صفحه ۴۵: الف)

$$\lim_{x \to -۳} \frac{x^۲ - ۹}{x^۲ + ۳x} = \lim_{x \to -۳} \frac{\cancel{(x+۳)}(x-۳)}{x\cancel{(x+۳)}} = \lim_{x \to -۳} \frac{(x-۳)}{x} = \frac{-۶}{-۳} = ۲$$

ب)

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۲ - ۴x + ۱}{۲x^۲ + x - ۱} = \lim_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{\cancel{\left(x - \frac{۱}{۲}\right)}(۴x-۲)}{(۲x+۲)\cancel{\left(x - \frac{۱}{۲}\right)}} = \lim_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{(۴x-۲)}{(۲x+۲)} = \frac{۰}{۳} = ۰$$

پ)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{2x^3-13x^2+24x-9}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{(2x^2-7x+3)\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)}{(x-3)(2x-1)}=\frac{1}{5}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{(x-2)}{(x-3)(2x-1)}=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{(x-2)}{(x-3)(2x-1)}=-\infty\end{cases}$$

مخرج در نزدیکی ۳ با مقادیر مثبت به صفر میل می کند وحد صورت هم در ۳ برابر ۱ است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

مخرج در نزدیکی ۳ با مقادیرمنفی به صفر میل می کند وحد صورت هم در ۳ برابر ۱ است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

ت)

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+\sqrt{2x+3}}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)\left(x-\sqrt{2x+3}\right)}{\left(x+\sqrt{2x+3}\right)\left(x-\sqrt{2x+3}\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}\left(x-\sqrt{2x+3}\right)}{(x-3)\cancel{(x+1)}}=\frac{+4}{-4}=-1$$

ث)

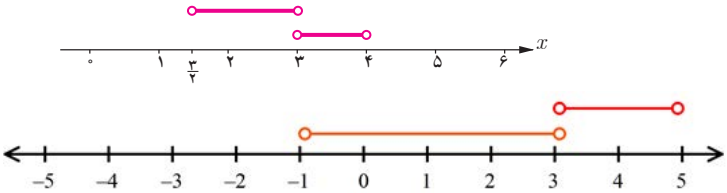
$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^{2}+x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}^{x^{2}-x}}{\left(x+3\right)\left(x-1\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x\cancel{\left(x-1\right)}}{\left(x+3\right)\cancel{\left(x-1\right)}\left(x+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{\left(x+3\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{6}$$

ج)

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^{3}+3x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt[3]{x^{2}}-\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(x+2\right)\left(x+1\right)\left(\sqrt[3]{x^{2}}-\sqrt[3]{x}+1\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{\left(x+1\right)}}{\left(x+2\right)\cancel{\left(x+1\right)}\left(\sqrt[3]{x^{2}}-\sqrt[3]{x}+1\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{\left(x+2\right)\left(\sqrt[3]{x^{2}}-\sqrt[3]{x}+1\right)}=\frac{1}{3}$$

**همسایگی چپ و راست :** اگر $r$ عددی مثبت باشد آنگاه $(x_\circ , x_\circ + r)$ یک همسایگی راست $x_\circ$ نامیده می‌شود. همچنین، $(x_\circ - r , x_\circ)$ را یک همسایگی چپ $x_\circ$ می‌نامیم.

**مثال :** بازهٔ (۴ , ۳) یک همسایگی راست ۳ و بازهٔ $(\frac{۳}{۲} , ۳)$ یک همسایگی چپ ۳ است. شما یک همسایگی راست دیگر برای ۳ و یک همسایگی چپ برای آن بنویسید.



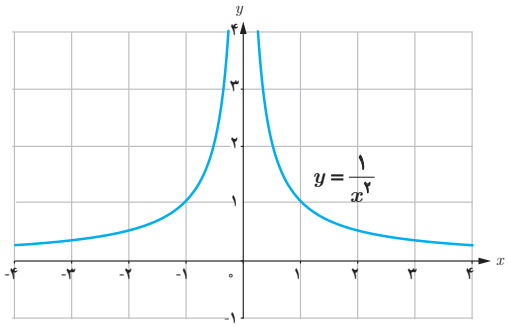

همسایگی راست (۳،۵) و همسایگی چپ (۱،۳-)

**فعالیت**

می‌خواهیم مقدار $\lim\limits_{x\to \circ} \frac{۱}{x^۲}$ را در صورت وجود به‌دست آوریم. می‌دانیم تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲}$ در هر نقطهٔ غیرصفر تعریف شده است؛ یعنی $D_f = \mathbb{R} - \{\circ\}$. با تکمیل جدول زیر، به رفتار تابع $f$ در یک همسایگی محذوف صفر توجه کنید.

| $x$ | ۰/۲- | ۰/۱- | ۰/۰۱- | ۰/۰۰۰۱- | $\to \circ \leftarrow$ | ۰/۰۰۰۱ | ۰/۰۰۱ | ۰/۰۱ | ۰/۱ | ۰/۲ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=\frac{۱}{x^۲}$ | ۲۵ | ۱۰۰ | ۱۰۰۰۰ | ۱۰۰۰۰۰۰۰۰ | $\to ? \leftarrow$ | ... | ۱۰۰۰۰۰۰ | ... | ۱۰۰ | ۲۵ |

در جدول دیده می‌شود که وقتی $x$ از سمت راست یا چپ به صفر نزدیک می‌شود، مقدار $x^۲$ نیز به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین مقادیر $\frac{۱}{x^۲}$، به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ می‌شوند. در واقع با دقت در نمودار[۱] تابع $y=\frac{۱}{x^۲}$ می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه به اندازهٔ کافی $x$ را به صفر نزدیک کنیم، خواهیم توانست مقادیر $f(x)$ را به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ نماییم. بنابراین دیده می‌شود که مقدارهای بزرگ‌شونده $f(x)$ به هیچ عددی میل نمی‌کنند؛ در نتیجه $\lim\limits_{x\to \circ} \frac{۱}{x^۲}$ موجود نیست. با این حال، در چنین مواقعی برای توصیف بهتر رفتار تابع در همسایگی محذوف صفر، می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to \circ} \frac{۱}{x^۲} = +\infty$.




**تذکر :** همچنان که از سال‌های قبل می‌دانیم، $+\infty$ یک عدد حقیقی نیست و رابطهٔ $\lim\limits_{x\to \circ} \frac{۱}{x^۲} = +\infty$ صرفاً به حالت خاصی از عدم وجود حد اشاره دارد. به این معنا که $\frac{۱}{x^۲}$ را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم بزرگ کنیم، مشروط بر آنکه $x$ را به قدر کافی به صفر نزدیک کرده باشیم. این‌گونه حدها را حد نامتناهی یا حد بی‌نهایت می‌نامیم.

---

۱ــ رسم نمودار تابع‌های گویا جزو اهداف کتاب حاضر نمی‌باشد.

**تعریف ۱ :** فرض کنیم تابع $f$ در یک همسایگی محذوف $a$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقدارهای $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه $x$ به قدر کافی به $a$ نزدیک اختیار شود.

رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شود :

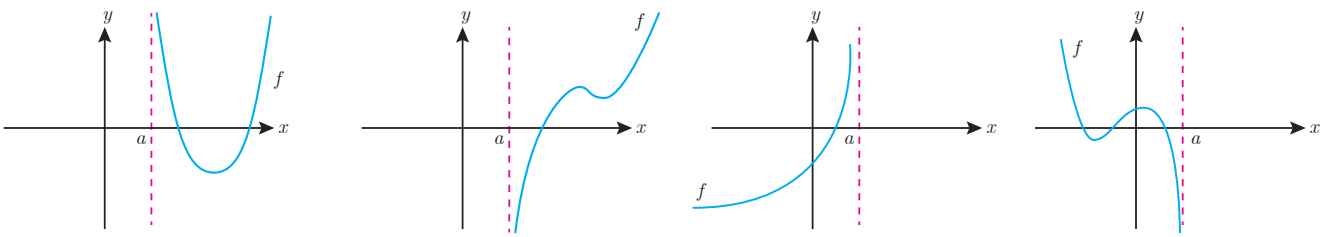
همسایگی محذوف

**تعریف ۲ :** فرض کنیم $f$ در یک ..... $a$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی کوچکتر... کرد، مشروط بر آنکه $x$ به قدر ..کافی.. به $a$ نزدیک اختیار شود.

حدهای یک طرفهٔ نامتناهی نیز به روش مشابهی تعریف می‌شوند. به عنوان نمونه تعریف $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ در زیر آمده است.

**تعریف ۳ :** فرض کنیم $f$ در یک همسایگی راست از $a$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه $x$ با مقادیر بزرگ‌تر از $a$ به قدر کافی به $a$ نزدیک اختیار شود.

به نمودار مربوط به $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ و همچنین سایر حالت‌های حدود نامتناهی یک‌طرفه، در شکل‌های زیر دقت کنید.

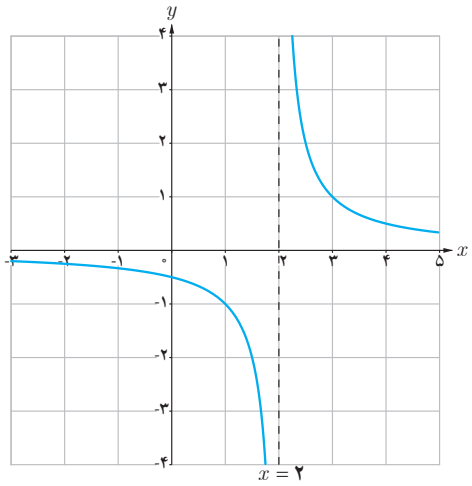



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

**مثال :** حد چپ و راست تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$ را در $x=۲$ به دست آورید.

**حل :** نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$ رسم شده است. به مقادیر تابع در سمت راست و چپ $x=۲$ دقت نمایید. وقتی $x\to ۲^+$ در این حالت مخرج کسر یعنی $(x-۲)$ عددی مثبت و کوچک نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه $\frac{۱}{x-۲}$ مثبت و بسیار بزرگ می‌شود که مقدار آن می‌تواند از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر شود. بنابراین همان‌طور که از نمودار هم دیده می‌شود، $\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{۱}{x-۲}=+\infty$ .

به همین ترتیب وقتی $x\to ۲^-$، مخرج کسر یعنی $(x-۲)$ عددی منفی و بسیار نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه مقدار $\frac{۱}{x-۲}$ می‌تواند از هر عدد منفی دلخواه، کوچک‌تر شود، بنابراین $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{۱}{x-۲}=-\infty$ . درستی این مطلب، از روی نمودار هم قابل مشاهده است.




در مورد حدهای نامتناهی قضیهٔ زیر بدون اثبات ارائه می‌شود.

**قضیه :** فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L\neq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=۰$ در این صورت :

الف) اگر $L>۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از $a$ مثبت باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ب) اگر $L>۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از $a$ منفی باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

پ) اگر $L<۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از $a$ مثبت باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ت) اگر $L<۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از $a$ منفی باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

**تذکر :** قضیهٔ قبل، برای حالتی که $x\to a^+$ و یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

**مثال :** حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}\frac{[x]-۳}{|۲x-۱|}$ را محاسبه کنید[۱].

**حل :** مخرج در نزدیکی $\frac{۱}{۲}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند و حد صورت هم در $\frac{۱}{۲}$ برابر $-۳$ است.
پس بنابر قسمت (پ) قضیهٔ قبل داریم :

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}}\frac{[x]-۳}{|۲x-۱|}=-\infty$$

۱ــ در اینجا حد آن دسته از توابع کسری مدنظر است که به‌صورت عدد غیر صفر بر روی صفر باشند. بنابراین حالت‌هایی مثل $۰\times\infty$ و $\infty-\infty$ مورد نظر نیستند که رعایت این مطلب در سؤالات ارزشیابی الزامی است.

## کار در کلاس

۱ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۵^-} \frac{۲x}{x-۵}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۵^+} \frac{۲x}{x-۵}$

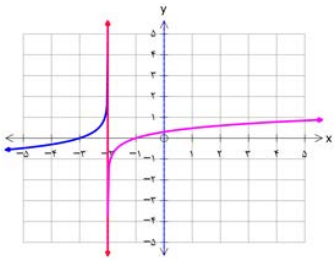
پ) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{-۱}{x^۲}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{۲}{|x-۳|}$

ث) $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۳}} \frac{[x]}{|۳x+۱|}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{x+۱}{\sin^۲ x}$

۲ نمودار تابعی مانند $f$ را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف ۲- تعریف شده باشد به طوری که $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x)=+\infty$ . پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.



## تمرین

۱ الف) نشان دهید چندجمله‌ای $f(x)=۲x^۳+x^۲+۱$ بر دوجمله‌ای $x+۱$ بخش‌پذیر است.

ب) به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصل‌ضرب عامل‌ها بنویسید.

۲ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۲x^۲-x}{۴x^۲-۱}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۵} \frac{x^۳-۴x^۲-۴x-۵}{x^۲-۲۵}$

پ) $\lim\limits_{x\to -۴} \frac{x^۲+۳x-۴}{x^۳+۴x^۲+x+۴}$

۳ حدود زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{x-\sqrt{۲x-۱}}{x^۲-x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{x^۲-۹}{۲-\sqrt{x+۱}}$

پ) $\lim\limits_{x\to -۸} \frac{۲x+۱۶}{\sqrt[۳]{x}+۲}$

۴ حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{-۱}{|x|}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{۱}{x-۱}$

ت) $\lim\limits_{x\to -۶} \frac{۹}{(x+۶)^۲}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{-۱}{(x-۳)^۴}$

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{-۱}{۲}} \frac{۴x+۱}{(۲x+۱)^۲}$

چ) $\lim\limits_{x\to ۳^+} \frac{۱-۵x}{x^۲-۹}$

ح) $\lim\limits_{x\to (-۲)^-} \frac{-۳x}{x^۲-۴}$

خ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \frac{۱}{\cos x}$

د) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \tan x$

ذ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \tan x$

ر) $\lim\limits_{x\to ۳^-} \frac{[x]-۳}{x-۳}$

۵ الف) عبارت $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=+\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

ب) عبارت $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=-\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

پ) نمودار تابعی مانند $f$ را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند. مسئله چند جواب دارد؟

حل کاردر کلاس صفحه ۵۷:

الف) $\lim\limits_{x\to ۵^-} \frac{۲x}{x-۵} = \frac{۱۰}{۰^-} = -\infty$

مخرج در نزدیکی ۵ با مقادیرمنفی به صفر میل می کند وحد صورت هم در۵ برابر۱۰ است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

ب) $\lim\limits_{x\to ۵^+} \frac{۲x}{x-۵} = \frac{۱۰}{۰^+} = +\infty$

مخرج در نزدیکی۵ با مقادیر مثبت به صفر میل می کند وحد صورت هم در۵ برابر۱۰ است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

پ) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{-۱}{x^۲} = \frac{-۱}{۰} = -\infty$

مخرج در نزدیکی صفر همواره با مقادیر مثبت به صفرمیل می کند وصورت هم برابر۱- است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

ت) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{۱}{|x-۳|} = \frac{۱}{۰} = +\infty$

مخرج در نزدیکی۳ همواره با مقادیر مثبت به صفر میل می کند وح صورت هم برابر۱ است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

ث) $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۳}} \frac{[x]}{|۳x+۱|} = \frac{-۱}{۰} = -\infty$

مخرج در نزدیکی $\frac{-۱}{۳}$ همواره با مقادیر مثبت به صفرمیل می کند وصورت هم $\left[\frac{-۱}{۳}\right] = -۱$ است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{x+۱}{\sin^۲ x} = \frac{+۱}{۰} = +\infty$

مخرج در نزدیکی صفر با مقادیر مثبت به صفر میل می کند وحد صورت هم درصفر برابر۱ است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

حل تمرین صفحه ۵۷ سوال ۱: الف)

$$x+1=0 \rightarrow x=-1$$

$$f(-1)=2(-1)^3+(-1)^2+1=-2+1+1=0 \rightarrow \boxed{R=0}$$

ب)

$$\begin{array}{l|l}
2x^3+x^2+1 & x+1 \\ \cline{2-2}
-(2x^3+2x^2) & 2x^2-x+1 \\ \cline{1-1}
\quad -x^2+1 & \\
\quad -(-x^2-x) & \\ \cline{1-1}
\quad x+1 & \\
\quad -(x+1) & \\ \cline{1-1}
\quad 0 &
\end{array}$$

$$f(x)=(x+1)(2x^2-x+1)$$

تمرین ۲:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2x^2-x}{4x^2-1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\cancel{2}x\cancel{\left(x-\frac{1}{2}\right)}}{\cancel{2}\cancel{\left(x-\frac{1}{2}\right)}(2x+1)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{x}{(2x+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^3-4x^2-4x-5}{x^2-25} = \lim_{x\to 5} \frac{\cancel{(x-5)}(x^2+x-1)}{\cancel{(x-5)}(x+5)} = \lim_{x\to 5} \frac{x^2+x-1}{(x+5)} = \frac{25+5-1}{10} = \frac{29}{10}$$

$$\lim_{x\to -4} \frac{x^2+3x-4}{x^3+4x^2+x+4} = \lim_{x\to -4} \frac{\cancel{(x+4)}(x-1)}{\cancel{(x+4)}(x^2+1)} = \lim_{x\to -4} \frac{x-1}{x^2+1} = \frac{-5}{17}$$

تمرین ۳:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-x}\times\frac{x+\sqrt{2x-1}}{x+\sqrt{2x-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x(x-1)\left(x+\sqrt{2x-1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-1)}{x\cancel{(x-1)}\left(x+\sqrt{2x-1}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{x\left(x+\sqrt{2x-1}\right)}=\frac{1-1}{1(1+1)}=\frac{0}{2}=0$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)\left(2+\sqrt{x+1}\right)}{\left(2-\sqrt{x+1}\right)\left(2+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)\left(2+\sqrt{x+1}\right)}{\underbrace{4-x-1}_{-\cancel{(x-3)}}}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)\left(2+\sqrt{x+1}\right)}{-1}=\frac{6\times 4}{-1}=-24$$

$$\lim_{x\to -8}\frac{2x+16}{\sqrt[3]{x}+2}=\lim_{x\to -8}\frac{2(x+8)\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left(\sqrt[3]{x}+2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4\right)}=\lim_{x\to -8}\frac{2\cancel{(x+8)}\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\cancel{(x+8)}}$$

$$=\lim_{x\to -8}2\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4\right)=2(4+2\times 2+4)=24$$

تمرین ۴:

مخرج در نزدیکی صفر با مقادیر مثبت به صفر میل می کند و صورت برابر ۱ عددی مثبت است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0}=+\infty$$

مخرج در نزدیکی صفر به صفر میل می کند و صورت برابر ۱- عددی منفی است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x\to 0}\frac{-1}{|x|}=\frac{-1}{0}=-\infty$$

مخرج در نزدیکی ۶- چون توان دو است به صفر مثبت میل می کند و صورت برابر ۹ عددی مثبت است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

$$\lim_{x\to -6}\frac{9}{(x+6)^2}=\frac{9}{0}=+\infty$$

مخرج درنزدیکی ۳ چون توان دو است به صفر مثبت میل می کند و صورت برابر ۱- عددی منفی است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x\to 3}\frac{-1}{(x-3)^2}=\frac{-1}{0}=-\infty$$

مخرج درنزدیکی $-\frac{۱}{۲}$ چون توان دو است به صفر مثبت میل می کند و صورت حاصلش برابر ۱- است که عددی منفی است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{۴x+۱}{(۲x+۱)^{۲}} = \frac{-۱}{۰} = -\infty$$

مخرج در نزدیکی ۳ به ازای مقادیر مثبت صفر میل می کند و صورت حاصلش برابر ۱۴- یک عددی منفی است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x\to ۳^{+}} \frac{۱-۵x}{x^{۲}-۹} = \frac{۱-۱۵}{۰} = \frac{-۱۴}{۰} = -\infty$$

مخرج در نزدیکی ۲- به ازای مقادیر منفی صفر میل می کند و صورت حاصلش برابر ۶ یک عددی مثبت است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x\to (-۲)^{-}} \frac{-۳x}{x^{۲}-۴} = \frac{-۳(-۲)}{۰} = \frac{۶}{۰} = -\infty$$

مخرج در نزدیکی $\frac{\pi}{۲}$ به صفرازسمت منفی میل می کند و صورت برابر۱ عددی مثبت است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^+}\frac{۱}{\cos x}=\frac{۱}{۰}=-\infty$$

مخرج در نزدیکی $\frac{\pi}{۲}$ از سمت منفی ها به صفر مثبت میل می کند و صورت حاصلش برابر۱ عددی مثبت است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^-}\tan x=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^-}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۱}{۰}=+\infty$$

مخرج در نزدیکی $\frac{\pi}{۲}$ از سمت مثبت ها به صفر منفی میل می کند و صورت حاصلش برابر۱ عددی مثبت است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^+}\tan x=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^+}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۱}{۰}=-\infty$$

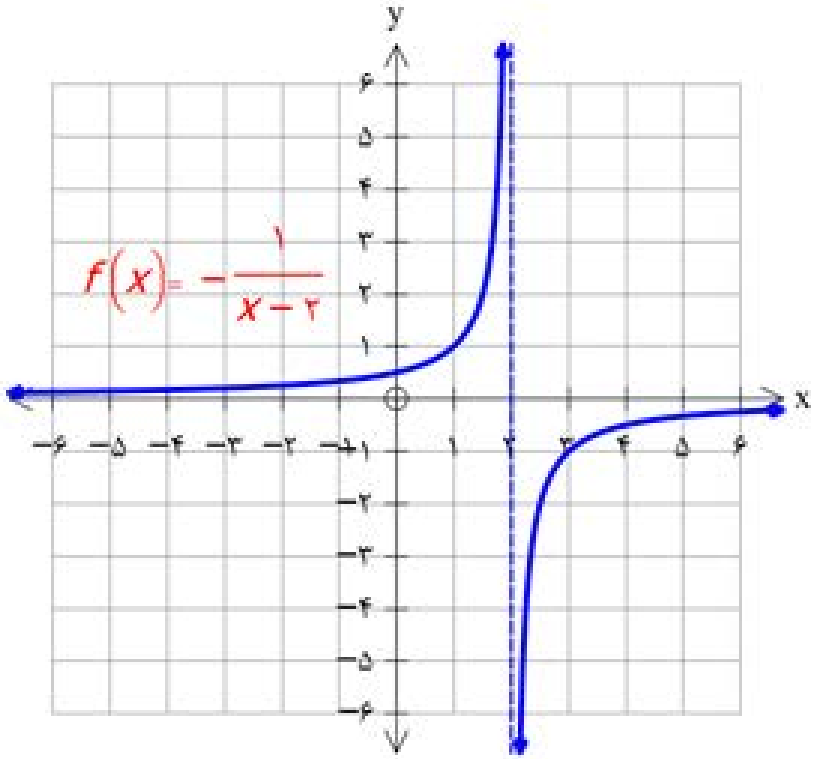
مخرج در نزدیکی ۳ از سمت چپ به صفر منفی میل می کند و صورت برابر۱- عددی منفی است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{[x]-۳}{x-۳}=\frac{\overbrace{[۳]}^{۲}-۳}{۳-۳}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

تمرین ۵: الف) حد تابع $f(x)$ وقتی که x از مقادیر کوچکتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می شود از هرعدد مثبت دلخواهی بزرگتر است.

ب) حد تابع $f(x)$ وقتی که x از مقادیر بزرگتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می شود از هرعدد مثبت دلخواهی کوچکتر است.

پ)



درس دوم

# حد در بی‌نهایت

## حد در بی‌نهایت

در درس قبل که حدهای نامتناهی را بررسی کردیم، دیدیم که وقتی $x$ به سمت عددی مثل $a$ نزدیک می‌شد، مقادیر $y$ به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کرد. در اینجا $x$ را به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌دهیم و حد تابع را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

### فعالیت

فرض کنید بخواهیم سطح مربعی به ضلع ۱ متر را طی فرایندی مطابق شکل‌های زیر رنگ کنیم. در مرحلهٔ اوّل، نصف سطح مربع را رنگ می‌کنیم. در مرحلهٔ دوم نصف قسمت‌های رنگ نشده را رنگ می‌زنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

| مرحله | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| شکل | | | | | ... |
| سطح رنگ شده (متر مربع) | $\frac{۱}{۲}=۱-\frac{۱}{۲}$ | $\frac{۳}{۴}=۱-\frac{۱}{۲^۲}$ | $\frac{۷}{۸}=۱-\frac{۱}{۲^۳}$ | $\frac{۱۵}{۱۶}=۱-\frac{۱}{۲^۴}$ | ... |

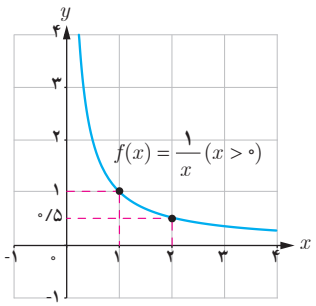
الف) در مرحلهٔ دهم، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟ $1-\frac{1}{2^{10}}=1-\frac{1}{1024}=\frac{1023}{1024}$

ب) در مرحلهٔ $n$ام، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟ $1-\frac{1}{2^n}$

پ) اگر $n$ به قدر کافی بزرگ اختیار شود، در مورد مساحت سطح رنگ شده در مرحلهٔ $n$ام چه می‌توان گفت؟

تقریبا کل سطح مربع رنگ می شود

**مثال :** تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در بازهٔ $(۰\ ,+\infty)$ در نظر می‌گیریم. رفتار این تابع را به ازای برخی مقادیر مثبت $x$ در جدول زیر مشاهده می‌کنید.




| $x$ | ۱ | ۲ | ۱۰ | ۱۰۰ | ۱۰۰۰ | ۱۰۰۰۰ | ... | $\to+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=\frac{۱}{x}$ | ۱ | ۰/۵ | ۰/۱ | ۰/۰۱ | ۰/۰۰۱ | ۰/۰۰۰۱ | ... | $\to ?\ ۰$ |

از جدول دیده می‌شود که با افزایش مقدار $x$، مقدار $\frac{۱}{x}$ به صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به عنوان مثال، برای آنکه فاصلهٔ $\frac{۱}{x}$ تا صفر، کمتر از ۰/۰۰۰۰۱ باشد، لازم است $x$ بزرگ‌تر از ۱۰۰۰۰۰ انتخاب شود. به نظر شما، آیا به هر میزان که بخواهیم، می‌توانیم مقدار $\frac{۱}{x}$ را به صفر نزدیک کنیم؟ آیا مقداری از $x$ وجود دارد که به ازای آن، فاصلهٔ $\frac{۱}{x}$ تا صفر کمتر از ۰/۰۰۰۰۰۱ باشد؟

با این شرایط می‌گوییم حد تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ در $+\infty$ برابر صفر است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=۰$ . به‌طور کلی می‌توان گفت :

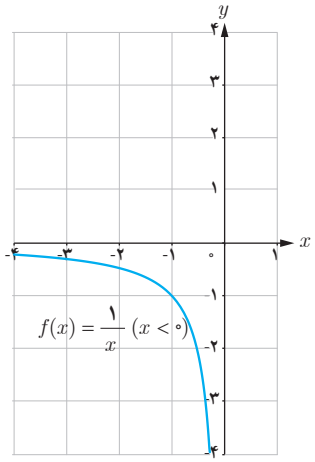
> اگر تابع $f$ در بازه‌ای مثل $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، رابطهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می‌توان به $L$ نزدیک کرد، مشروط بر آنکه $x$ به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

رابطهٔ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شود :

> فرض کنیم تابع $f$ در بازه‌ای مثل $(-\infty,b)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ به این معناست که به هر مقدار **دلخواه** . می‌توان $f(x)$ را به $L$ نزدیک کرد، مشروط بر آنکه $x$ به قدر . **کافی** . . کوچک و منفی اختیار شود.

**مثال :** با توجه به جدول زیر و با ملاحظه نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ که در بازهٔ $(-\infty\,,\,۰)$ رسم شده است، دیده می‌شود که $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=۰$ .

| $x$ | $-\infty\leftarrow$ | ... | $-۱۰۰۰۰۰۰$ | $-۱۰۰۰۰۰$ | $-۱۰۰۰$ | $-۱۰۰$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=\frac{۱}{x}$ | $۰\ ?\leftarrow$ | ... | $-۰/۰۰۰۰۰۱$ | $-۰/۰۰۰۰۰۱$ | $-۰/۰۰۱$ | $-۰/۰۱$ |



در مورد حدهای نامتناهی، دو قضیهٔ زیر مفیدند.

**قضیه ۱ :** فرض کنیم $n$ عددی طبیعی باشد. در این‌صورت :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۱}{x^n}=۰$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۱}{x^n}=۰$ .

**قضیه ۲ :** فرض کنیم $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=m$ . در این صورت :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\pm\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l\pm m$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x).g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\times\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l.m$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)}=\frac{l}{m}\ (m\neq ۰)$

**تذکر :** قضیهٔ ۲ برای وقتی که $x\to-\infty$ نیز برقرار است.

**مثال :** مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۷x^۲-۴x+۱}{۳x^۲+۵x-۶}$ را به دست آورید.

**حل :** برای محاسبهٔ این حد، ابتدا باید صورت و مخرج را بر بزرگ‌ترین توانی از $x$ که در مخرج وجود دارد، یعنی $x^۲$ تقسیم کنیم (چون $x\to+\infty$، پس می‌توان نتیجه گرفت که $x^۲\neq ۰$).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۷x^۲-۴x+۱}{۳x^۲+۵x-۶}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۷x^۲-۴x+۱}{x^۲}}{\frac{۳x^۲+۵x-۶}{x^۲}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۷-\frac{۴}{x}+\frac{۱}{x^۲}}{۳+\frac{۵}{x}-\frac{۶}{x^۲}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(۷-\frac{۴}{x}+\frac{۱}{x^۲})}{\lim\limits_{x\to+\infty}(۳+\frac{۵}{x}-\frac{۶}{x^۲})}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}۷-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۴}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۱}{x^۲}}{\lim\limits_{x\to+\infty}۳+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۵}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۶}{x^۲}}=\frac{۷-۰+۰}{۳+۰-۰}=\frac{۷}{۳}$$

**کار در کلاس**

۱ مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۳x+۲}{x-۱}$ ب) $\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{۱-۵t^۲}{t^۲+۳t}$ پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۱}{۲-۳x}$

۲ الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر $(-۱)$ باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر ۱۰۰ باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

حل کاردرکلاس صفحه ۶۰: سوال ۱:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}3-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}}{\lim\limits_{x\to-\infty}1-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}}=\frac{3-0}{1-0}=3$$

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{1-5t^2}{t^2+3t}=\lim_{t\to-\infty}\frac{\frac{1-5t^2}{t^2}}{\frac{t^2+3t}{t^2}}=\frac{\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{1}{t^2}-\lim\limits_{t\to-\infty}5}{\lim\limits_{t\to-\infty}1+\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{3}{t}}=\frac{0-5}{1+0}=-5$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2-3x}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}3}=\frac{1}{0-3}=-\frac{1}{3}$$

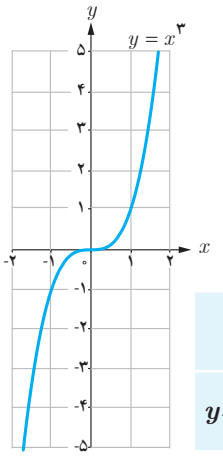
سوال ۲: الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{-x+5}=-1$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{100x^2+3x}{x^2+5}=100$

## حد نامتناهی در بی‌نهایت

برخی توابع مانند $f$ هستند که وقتی $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$، مقدار آنها یعنی $f(x)$ می‌تواند به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ (یا کوچک منفی) شود. در این بخش رفتار این‌گونه تابع‌ها را در $+\infty$ یا $-\infty$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

**مثال :** تابع $f(x) = x^3$ را در نظر بگیرید.




| $x$ | $-\infty \leftarrow$ | $-1000$ | $-100$ | $-10$ | $10$ | $100$ | $1000$ | $\to +\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=x^3$ | $-\infty \leftarrow$ | $-1000000000$ | $-1000000$ | $-1000$ | $1000$ | $1000000$ | $1000000000$ | $\to +\infty$ |

جدول بالا و همچنین نمودار تابع نشان می‌دهند که با افزایش مقدار $x$، مقدار $x^3$ هم افزایش می‌یابد به طوری که با بزرگ کردن $x$ به قدر کافی، می‌توان مقدار $x^3$ را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر کرد. در این حالت می‌نویسیم $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ . در حالت کلی داریم :

**تعریف :** فرض کنیم تابع $f$ در بازه‌ای مثل $(a\ ,\ +\infty)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می‌توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه $x$ به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

به روش مشابه از جدول و نمودار بالا دیده می‌شود که با منفی و کوچک گرفتن $x$ به قدر کافی، می‌توان مقدار $x^3$ را از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد. در این حالت می‌نویسیم $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ . در حالت کلی می‌توان گفت :

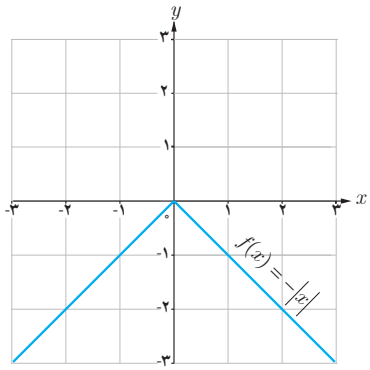
**تعریف :** فرض کنیم تابع $f$ در بازه‌ای مثل $(-\infty\ ,\ b)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می‌توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد، مشروط بر آنکه $x$ به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

**تذکر ۱ :** رابطه‌های $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شوند.

**تذکر ۲ :** رابطه‌هایی مانند $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ را حد نامتناهی در بی‌نهایت می‌نامیم. همچنان که قبلاً بیان شد، این دو مورد، صورت‌هایی از عدم وجود حد تابع $f$ در $+\infty$ هستند؛ چراکه $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند که بیانگر حد تابع $f$ در $+\infty$ باشند.

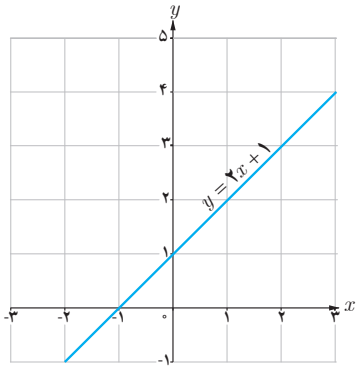
**کار در کلاس**

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.



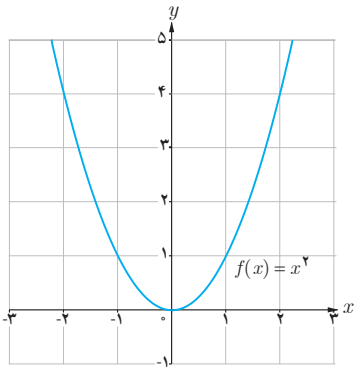

پ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$



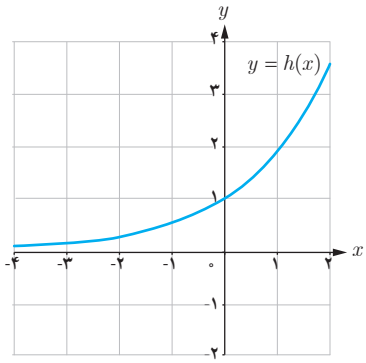

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} (۲x+۱) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (۲x+۱) = +\infty$



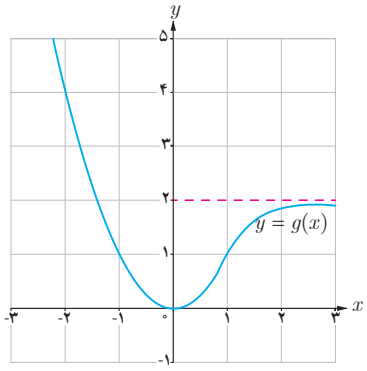

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^۲ = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^۲ = +\infty$



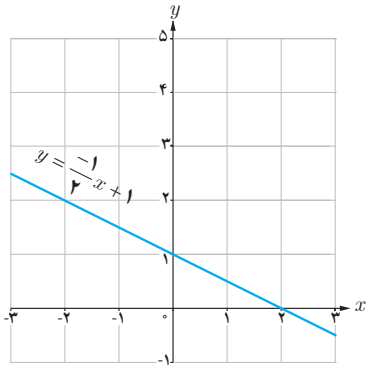

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = ۰$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$




ث) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = ۲$




ت) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{-۱}{۲}x+۱) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{-۱}{۲}x+۱) = -\infty$

از قضیهٔ زیر برای محاسبهٔ حد تابع یک‌جمله‌ای $f(x) = ax^n$ در $+\infty$ و $-\infty$ استفاده می‌کنیم.

**قضیه :** فرض کنیم $n$ عددی طبیعی و $a$ یک عدد حقیقی غیرصفر باشد.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (a \text{ منفی}) \end{cases}$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ منفی}) \\ -\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ مثبت}) \\ +\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ منفی}) \end{cases}$

**مثال :** حدود زیر را محاسبه کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3+5x^2)$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+4x^2-5x-9)$

**حل :**

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3+5x^2)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+5)$

بنابر قضیه‌ای از درس قبل، حد $\frac{2}{x}$ و $\frac{3}{x^2}$ در $+\infty$ برابر صفرند؛ بنابراین :

$$\lim_{x\to+\infty}x^2(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+5)=\lim_{x\to+\infty}x^2(0-0+5)=\lim_{x\to+\infty}5x^2=+\infty$$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+4x^2-5x-9)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3(-2+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{9}{x^3})=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3(-2+0)$

$$=\lim_{x\to-\infty}(-2x^3)=+\infty$$

در هر دو قسمت مثال قبل دیده می‌شود که حد یک تابع چندجمله‌ای مثل $f$ در $+\infty$ یا $-\infty$ برابر است با حد جملهٔ با بزرگ‌ترین توان $f$ در $+\infty$ یا $-\infty$. این مطلب در حالت کلی درست است و می‌توان به روش مثال بالا آن را اثبات کرد یعنی :

فرض کنیم $f$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه $n$ به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k$ باشد که در آن $n$ عددی طبیعی و $a$ یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}ax^n \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k)=\lim_{x\to+\infty}ax^n$$

از این مطلب می‌توان برای محاسبه حد توابع گویا، زمانی که $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ نیز استفاده کرد. به مثال زیر دقت کنید.

**مثال:** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-12x^5+7x^3-2x-9}{3x^2-8x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-12x^5}{3x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^3)=+\infty$

**کار در کلاس**

حدود زیر را محاسبه کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-5x+4}{7x^3-11x^2-6x}$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x+4}{x^3+x-8}$ پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4x^7+5x^2}{2x^3+9}$

**تمرین**

۱ نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{1}{x}$ : $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ , $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ , $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

ب) $g(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$ : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ , $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$

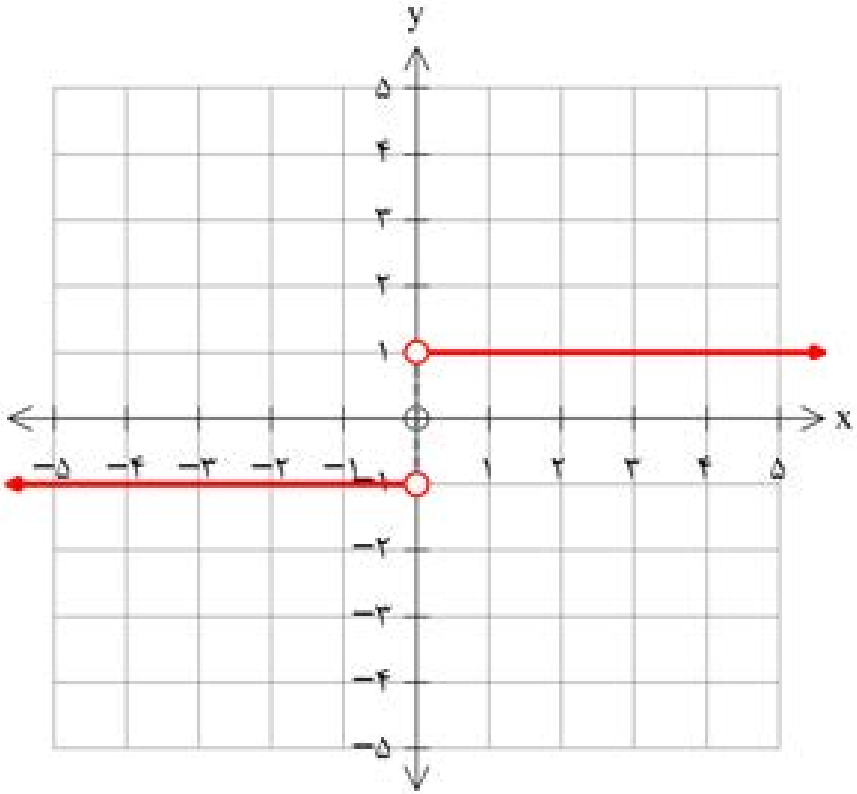
حل کار در کلاس صفحه ۶۳:

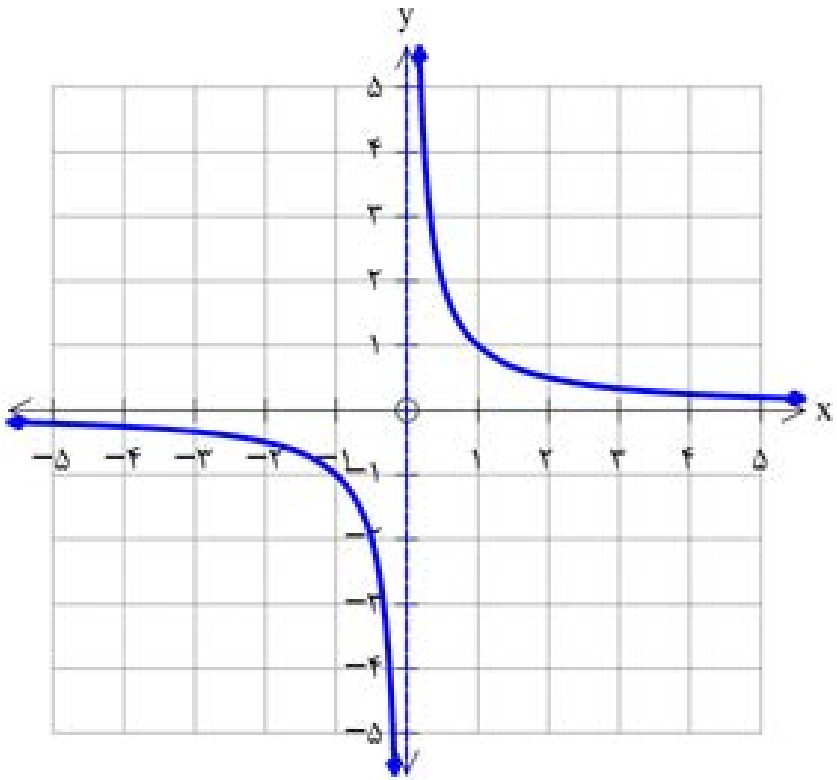
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^{۳}-۵x+۴}{۷x^{۳}-۱۱x^{۲}-۶x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^{۳}}{۷x^{۳}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲}{۷}=\frac{۲}{۷}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x+۴}{x^{۳}+x-۸}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x}{x^{۳}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۵}{x^{۲}}=۰$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-۴x^{۷}+۵x^{۲}}{۲x^{۳}+۹}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۴x^{۷}}{۲x^{۳}}=\lim_{x\to-\infty}\left(-۲x^{۴}\right)=-۲\left(+\infty\right)=-\infty$$

## حل تمرین صفحه ۶۳: تمرین ۱:



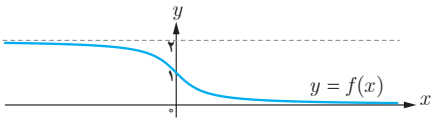




$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1,\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty \end{cases}$$

۲ با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.

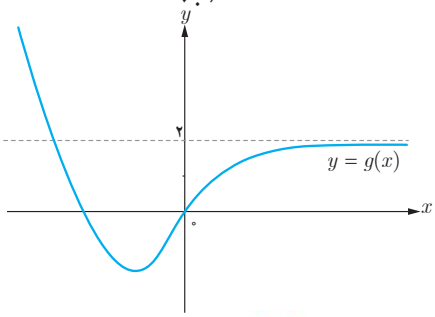
(الف)




$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ۰$ ۲

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ۰$ ۰

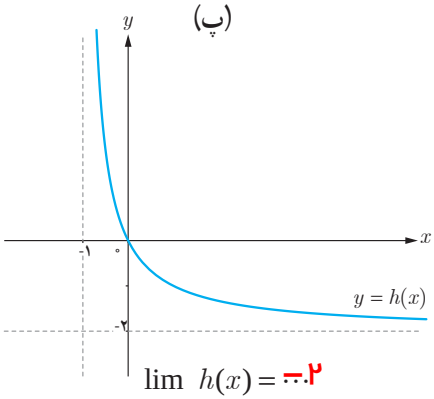
(ب)




$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = ۰$ ۲

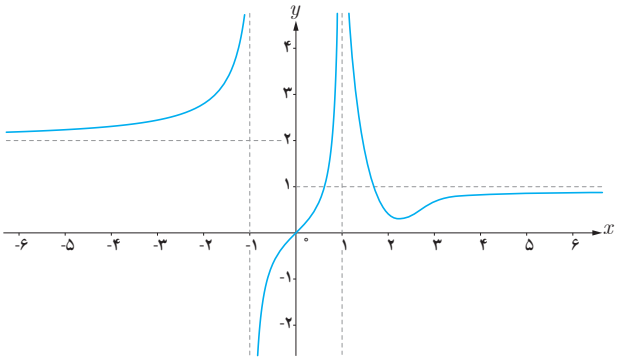
(پ)




$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -۰$ ۲

$\lim\limits_{x\to(-۱)^+} h(x) = +\infty$

۳ نمودار تابع $f$ به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید :



الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ۲$

ب) $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x) = +\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x) = -\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to۱^-} f(x) = +\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to۱^+} f(x) = +\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ۱$

۴ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} (۹+\frac{۷}{x^۳})$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-\frac{۱}{۲}x^۳+۷x^۲-۶)$

پ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۱}{۲x-۳}$

ت) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۳+\frac{۱}{x^۲}}{\frac{۴}{x}-۵}$

ث) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۲x-۱}{۳x+۱}$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۲x^۲-۳x+۱}{x^۲+۵x-۳}$

چ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۲x^۵-۶x^۳-x}{x^۲-۵x+۱}$

ح) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^۲+x}{۳-x}$

خ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-۶x^۳+۷x-۹}{۲x^۳-۴x^۲+x}$

د) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۲x+۱}{۴}$

۵ الف) هر یک از رابطه‌های $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-۱$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=۲$ به چه معنا هستند؟ توضیح دهید.

ب) نمودار تابعی مانند $f$ را رسم کنید که هر دو ویژگی الف را داشته باشد. مسئله چند جواب دارد؟

تمرین ۴:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(۹+\frac{۷}{x^{۳}}\right)=۹+۰=۹$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{۱}{۲}x^{۳}+۷x۲-۶\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{۱}{۲}x^{۳}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{۱}{۲x-۳}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{۱}{۲x}\right)=۰$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{۳+\frac{۱}{x^{۲}}}{\frac{۴}{x}-۵}\right)=\frac{\lim_{x\to+\infty}\left(۳+\frac{۱}{x^{۲}}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{۴}{x}-۵\right)}=\frac{۳}{-۵}=-\frac{۳}{۵}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{۲x-۱}{۳x+۱}\right)=\frac{\lim_{x\to+\infty}(۲x)}{\lim_{x\to+\infty}(۳x)}=\frac{۲}{۳}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{۲x^{۲}-۳x+۱}{x^{۲}+۵x-۳}\right)=\frac{\lim_{x\to-\infty}\left(۲x^{۲}\right)}{\lim_{x\to-\infty}\left(x^{۲}\right)}=۲$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{۲x^{۵}-۶x^{۳}-x}{x^{۲}-۵x+۱}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(۲x^{۵}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^{۲}\right)}=\lim_{x\to-\infty}۲x^{۳}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{۲}+x}{۳-x}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{۲}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left(-x\right)=-\infty$$

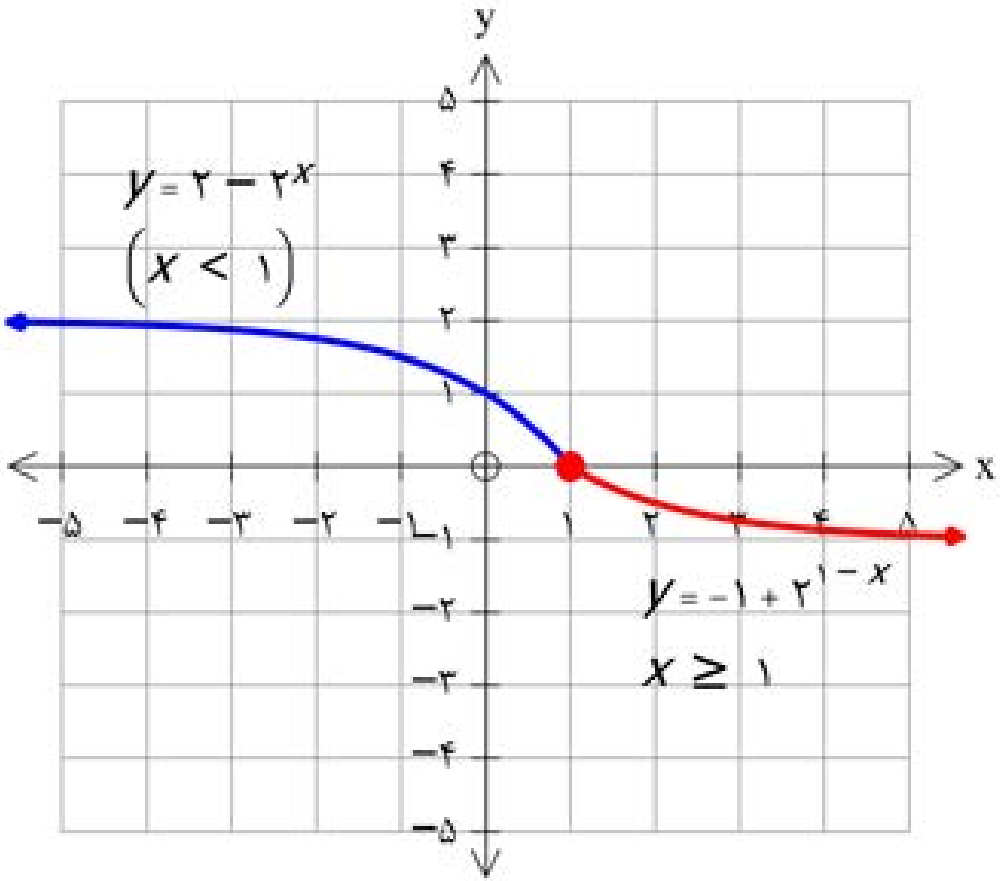
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-۶x^{۳}+۷x-۹}{۲x^{۳}-۴x^{۲}+x}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-۶x^{۳}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(۲x^{۳}\right)}=-۳$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{۲x+۱}{۴}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(۲x\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}۴}=\frac{۱}{۲}\left(+\infty\right)=+\infty$$

تمرین ۵: الف) اگر x به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود تابع $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه می توان به ۱- نزدیک کرد

اگر x به اندازه کافی کوچک انتخاب شود تابع $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه می توان به ۲ نزدیک کرد

ب)



فصل

# ۴ مشتق

ماهواره‌بر سیمرغ ـ پایگاه فضایی امام‌خمینی(ره)

ماهواره‌رصدا

ماهواره‌طلوع

ماهواره‌امید

مفهوم مشتق به مسئله تاریخی خط مماس در یک نقطه از منحنی و مسئله یافتن سرعت لحظه‌ای یک جسم مربوط می‌شود. امروزه مشتق در علوم مختلف کاربردهای وسیع و گسترده‌ای دارد. به‌طور مثال در صنایع فضایی، مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت و کمینه‌سازی زمان سفر با مفهوم مشتق ارتباط دارند.


درس اوّل — آشنایی با مفهوم مشتق

درس دوم — مشتق‌پذیری و پیوستگی

درس سوم — آهنگ تغییر

بیاموز
BIAMOZ.COM

# بیاموز | Biamoz.com

**بزرگترین مرجع آموزشی و نمونه سوالات درسی تمامی مقاطع**

**شامل انواع** | نمونه سوالاتِ | فصل به فصل | پایان ترم | جزوه |

ویدئوهای آموزشی | گام به گام | طرح درس | طرح جابر | و ...

کانال تلگرام | گروه تلگرام | اینستاگرام

برای ورود به هر پایه در سایت ما روی اسم آن **کلیک** کنید

**دبستان**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| اول | دوم | سوم | چهارم | پنجم | ششم |

**متوسطه اول**

| | | |
|---|---|---|
| هفتم | هشتم | نهم |

**متوسطه دوم**

| | | |
|---|---|---|
| دهم | یازدهم | دوازدهم |