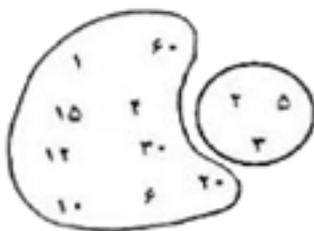


فصل اول

فعالیت



در شکل روبه‌رو شمارنده‌های طبیعی عدد ۶۰ را نوشته‌ایم و بین آنها شمارنده‌های اول را مشخص کرده‌ایم. شما هم شمارنده‌های ۶۰ را که اول نیست در یک منحنی بسته قرار دهید.

اگر شمارنده‌های طبیعی و اولی عدد ۶۰ یعنی ۲، ۳ و ۵ را در داخل

دو آکلاد قرار دهیم و آن را با حرفی چون A یا B یا ... نام‌گذاری کنیم و بنویسیم $A = \{2, 3, 5\}$ در این صورت یک مجموعه تشکیل داده‌ایم و به هر یک از عددهای ۲، ۳ و ۵ یک عضو مجموعه A می‌گوییم؛ در این صورت مجموعه A دارای ۳ عضو است.

* شما شمارنده‌های مرکب عدد ۶۰ را به صورت یک مجموعه بنویسید و آن را B بنامید.

$$B = \{4, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 40, 60\}$$

* مجموعه شامل شمارنده‌های عدد ۶۰ که نه اول باشد و نه مرکب، چند عضو دارد؟ این مجموعه را نیز C بنامید و آن را نمایش دهید.

$$C = \{1\}$$

* مجموعه D شامل همه شمارنده‌های دورقمی ۶۰ را تشکیل دهید؛ این مجموعه چند عضو

$$D = \{10, 12, 15, 20, 30, 40, 60\}$$

دارد؟

از رضا و احمد خواسته شد تا مجموعه شامل ۲ شمارنده زوج عدد ۶۰ را تشکیل دهند. احمد

نوشت: $\{2, 6, 10\}$ و رضا نوشت: $\{6, 10, 12\}$ به نظر شما چرا جواب‌های آنها با هم فرق دارد؟ چون

نتیجه: عبارت‌هایی شبیه این عبارت، که مشخص کننده یک مجموعه معین و یکتا نباشد، احمد و رضا هر کدام از این

مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کند.

فعالیت

۱- کدام یک از عبارت‌های زیر مشخص کننده یک مجموعه است؟ مجموعه مورد نظر را نمایش دهید.

الف) عددهای طبیعی و یک رقمی (ب) چهار شاعر ایرانی (ج) دو عدد اول کوچک‌تر از ۱۲

۲- با توجه به شرط متمایز بودن عضوهای یک مجموعه، جاهای خالی را پر کنید:

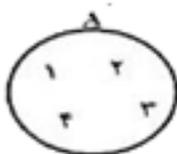
الف) به جای $A = \{1, 2, 1, 4, 5\}$ باید بنویسیم $A = \{1, 2, 4, 5\}$

ب) به دلیل تکراری بودن عدد ۵ در $B = \{5, 6, 5, 7\}$ آن را به صورت $B = \{5, 6, 7\}$ می‌نویسیم.

اگر مجموعه A را به صورت $A = \{a, b, d, v\}$ در نظر بگیریم برای نشان دادن

اینکه a عضوی از مجموعه A است می‌نویسیم $a \in A$ و می‌خوانیم «a عضو A است»

و چون عدد ۴ عضو A نیست، می‌نویسیم $4 \notin A$ و می‌خوانیم «۴ عضو A نیست».



نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار ون: مجموعه را می‌توان با

استفاده از منحنی‌های بسته نمایش داد؛ به عنوان مثال مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$

را به صورت روبه‌رو نمایش می‌دهیم که نمایش با استفاده از نمودار ون است.

فعالیت

۱- با توجه به نمودار ون، که برای دو مجموعه A و B رسم

شده است، مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان مشخص کنید.

$$A = \{a, b, c, d, e, k, f\} \quad B = \{m, n, s, t, k\}$$

۲- دو مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8\}$ را در نظر بگیرید:

دو مجموعه را با یک نمودار ون نمایش دهید. کدام عددها هم در منحنی بسته مربوط به A و

هم در منحنی بسته B وجود دارد؟ 7 و 8

۳- مجموعه عددهای دو رقمی و زوج اول را بنویسید و آن را E بنامید. این مجموعه چند

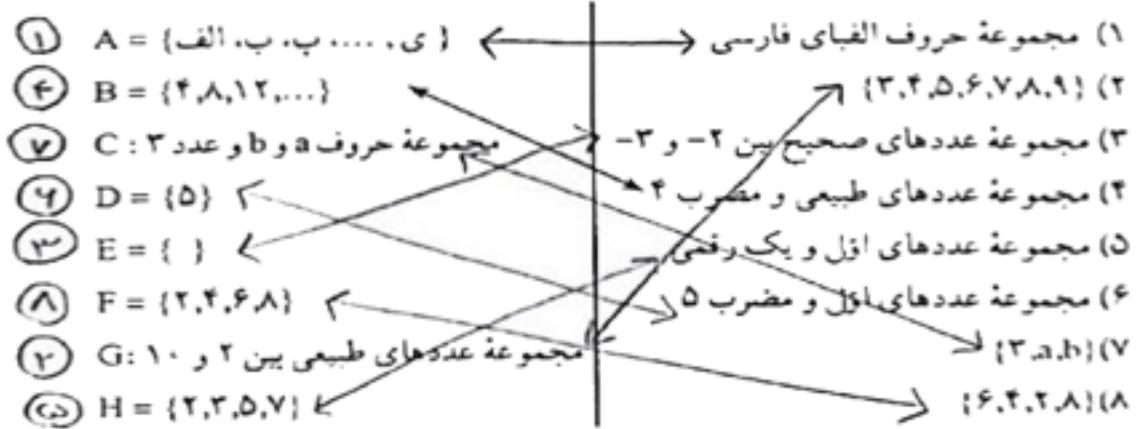
عضو دارد؟ عضوهای آن را بنویسید.

$$E = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60\}$$



- ۱- سه عبارت بنویسید که هر کدام نشان دهنده مجموعه تهی باشد؛ سپس عبارت های خود را با نوشته های هم کلاسی های خود مقایسه کنید. (اعداد صحیح کوچکتر از ۱) و (اعداد صحیح بین ۲ و ۷) و (اعداد صحیح زوج بین ۱ و ۴)
- ۲- سه عبارت بنویسید که هر کدام مشخص کننده مجموعه ای فقط با یک عضو باشد. (چنین مجموعه هایی را مجموعه های یک عضوی می نامند.) (اعداد صحیح کوچکتر از ۱) و (اعداد اول بین ۱ و ۹) و (اعداد اول زوج)
- ۳- عبارت هایی که مجموعه ای را مشخص می کند با علامت \checkmark و بقیه را با علامت \times مشخص کنید (با ذکر دلیل).

- الف) چهار عدد فرد متوالی \checkmark ب) سه عدد طبیعی زوج متوالی با شروع از ۲ \checkmark
 ج) عددهای اول کوچکتر از ۲۰ \times د) سه شهر ایران \checkmark ه) شمارنده های عدد ۲۴ \checkmark
 و) ۵ عدد بزرگ \times ز) عددهای طبیعی بین ۲ و ۳ \checkmark
 ۴- مانند نمونه کامل کنید:



۵- کدام یک از عبارت های زیر مشخص کننده یک مجموعه است؟ با نمودار ون نشان دهید:

الف) \checkmark عددهای صحیح مثبت و کمتر از ۱۰

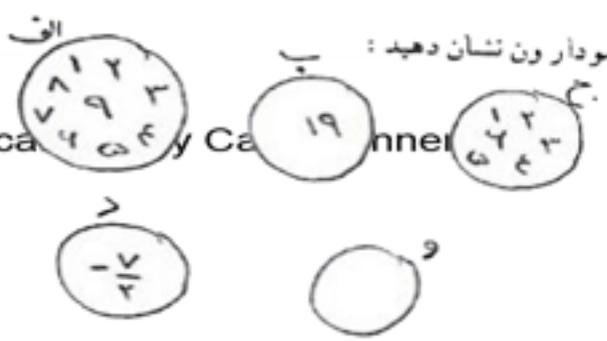
ب) \checkmark شمارنده های اول عدد ۱۹

ج) \checkmark عددهایی که نشن وجه یک تاس معمولی مشخص می کند.

د) \checkmark جواب های معادله $2x+8=1$

ه) چهار میوه خوشمزه

و) \checkmark عددهای منفی و بزرگتر از یک



تمرین

۱- متناظر با هر عبارت، یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت بنویسید و تعداد

عضوهای هر مجموعه را تعیین کنید:

الف) $A = \{1, 8, 27, 64, 125\}$ توان سوم اعداد طبیعی بین ۱ و ۱۰

ب) $C = \{10\}$ اعداد طبیعی بین ۱۱ و ۹

ج) $\{3, 4, 9, 12, \dots, 999\}$ عددهای طبیعی مضرب ۳ و کوچکتر از ۱۰۰۰

د) $\{ \}$ عددهای طبیعی بزرگتر از ۴ و کوچکتر از ۵

ه) $\{ \}$ عددهای صحیح منفی که بین ۴ و ۷ قرار دارد.

و) $\{ \}$ عددهای اول دورقمی که مضرب ۷ باشد.

۲- جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل، درست باشد.

الف) عبارت «۵ عدد طبیعی که بین ۱ و ۲۰ قرار داشته باشد» یک مجموعه را مشخص نمی کند.

ب) مجموعه $\{2, 3, 4, \dots, 9\}$ دارای ۸ عضو است.

ج) مجموعه $A = \{0, 2\}$ دارای ۲ عضو است.

د) با توجه به مجموعه $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ داریم: $5 \in A$ است یا با نماد ریاضی $5 \in A$

و ۱۲ عضو A نیست یا با نماد ریاضی $12 \notin A$.

۳- سه مجموعه متفاوت بنویسید که عدد ۲ عضو آن باشد. (بزرگ پاسخ)

$\{2\}$ و $\{2, 3, 5, \dots\}$ و $\{1, 2, 3\}$

۱۰	-۱۵	۱۲
۴	۴	۲
-۲	۱۸	-۲

۱- جدول عددهای صحیح روبه‌رو را طوری کامل کنید که مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر قطر آن برابر ۱۲ شود؛ سپس مجموعه عددهای سطر دوم جدول را بنویسید و آن را A بنامید.

$$A = \{2, 4, 4\}$$

اکنون مجموعه B را چنان بنویسید که شامل سه عدد زوج متوالی و میانگین عضوهای آن با ۴ برابر باشد. هریک از مجموعه‌های A و B چند عضو دارد؟ ۳ عضو دارد.

$$B = \{2, 4, 4\}$$

آیا هر عضو A در مجموعه B است؟ آیا هر عضو B در مجموعه A است؟ بلی

همان‌طور که ملاحظه کردید، عضوهای دو مجموعه A و B یکسان است و هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A است؛ در این صورت دو مجموعه A و B برابر است و می‌نویسیم $A = B$.

$$A = \{8, 9, 10\}$$

۲- مجموعه A شامل سه عدد طبیعی متوالی است به طوری که حاصل جمع آنها برابر ۲۷ است. ابتدا A را با عضوهای آن بنویسید؛ سپس مجموعه‌هایی را مشخص کنید که در زیر معرفی شده و با A برابر است:

$$\{7, 8, 9\} \quad \text{الف) مجموعه عددهای طبیعی بین ۶ و ۱۰}$$

$$\{8, 9, 10\} \quad \text{ب) مجموعه عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۷ و کوچک‌تر از ۱۱}$$

$$\{8, 9, 10\} \quad \text{ج) مجموعه سه عدد طبیعی متوالی که میانگین آنها با ۹ برابر است.}$$

همان‌طور که دیدید مجموعه $\{8, 9, 10\}$ با مجموعه $\{7, 8, 9\}$ برابر نیست؛ زیرا همه عضوهایشان یکسان نیست.

اگر عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که عضو A نباشد در این صورت مجموعه A با B برابر نیست و می‌نویسیم $A \neq B$.

کار در کلاس

۱- جاهای خالی را در مجموعه‌های زیر طوری پر کنید که مجموعه‌ها برابر باشند:

می‌توان اعداد را به صورت های دیگر نیز نوشت

$$\left\{5, -3, \frac{2}{5}, 4, \frac{9}{3}\right\} = \left\{\frac{2}{5}, 3, \frac{-\sqrt{144}}{(-2)}, \sqrt{12}, \sqrt{25}\right\} \quad \text{الف)}$$

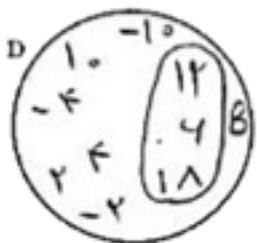
$$\left\{7, \frac{2}{10}, \sqrt{\frac{4}{9}}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{4}, 0, 1625\right\} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, 0, 15, \frac{9}{8}, \sqrt{49}, -2\right\} \quad \text{ب)}$$

۲- دو مجموعه به نام‌های A و B مانند سؤال بالا طرح کنید. پاسخ خود را با دوستانان مقایسه کنید.

$$A = \{-\sqrt{4}, -\sqrt{9}, -\sqrt{25}\}$$

$$B = \{-2, -3, -5\}$$

زیر مجموعه



مجموعه عددهای جدولی فعالیت قبل را D بنامید؛ سپس عضوهای

مجموعه D را در نمودار ون رویه رو بنویسید :

در نمودار بالا، عضوهایی را که بر ۳ بخش پذیر است با یک منحنی بسته مشخص کنید و B بنامید.

مجموعه B را بنویسید. آیا هر عضو B، عضوی از D نیز هست؟ $B = \{4, 12, 18\}$

در مجموعه D، عددهای زوج را مشخص کنید و آن را C بنامید؛ آیا $D = C$ ؟ $C = \{2, 4, 6, 12, 18, -2, -4, -10\}$
همان طور که دیدید، عضوهای مجموعه B همگی در D هست؛ یعنی هر عضو B، عضوی از

D است؛ در این صورت مجموعه B زیرمجموعه D است و می نویسیم $B \subseteq D$.

آیا مجموعه C زیرمجموعه D است؟ بله

با توجه به تعریف زیر مجموعه، واضح است که هر مجموعه، زیرمجموعه خودش

هست؛ یعنی اگر A مجموعه ای دلخواه باشد، داریم $A \subseteq A$.

اکنون زیرمجموعه ای از D را مشخص کنید که عضوهای آن عددهای فرد باشد؛ نام دیگر این

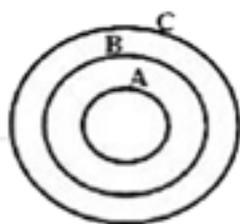
مجموعه چیست؟ $\{ \}$ تهی

آیا عبارت $\{10, 4, -6, 2\} \subseteq D$ درست است؟ چرا؟ نخیر. چون -6 عضو مجموعه D نمی باشد.

اگر بتوانیم عضوی در B بیابیم که در A نباشد، می گوئیم B زیرمجموعه A نیست و می نویسیم $B \not\subseteq A$.

آیا در مجموعه تهی عضوی هست که در مجموعه دلخواهی مانند A نباشد؟ نخیر

کاردرکلاس



۱- با توجه به نمودار مقابل، دلیل درستی یا نادرستی عبارت های زیر

را مشخص کنید:

$C \subseteq A \checkmark, B \subseteq A \times, A \subseteq C \times$

$A \subseteq B \checkmark, B \subseteq C \checkmark, \emptyset \subseteq A \checkmark$

۲- مجموعه های A، B، و C را در نظر بگیرید؛ سپس درستی یا نادرستی عبارت های زیر را

مشخص کنید (با ذکر دلیل):

$A = \{1, 3, 6, 4\}, B = \{5, 1, 3\}, C = \{2, 5, 1, 3, 6\}$

$B \subseteq A \checkmark, 3 \in B \times, A \subseteq B \times, B \subseteq C \checkmark, A \subseteq C \checkmark, 2 \in A \times$

$\{1, 4\} \in A \times, 6 \in A \times, \{5, 6\} \subseteq C \checkmark, 5 \in C \checkmark, \emptyset \subseteq A \checkmark$

مثال: همه زیرمجموعه های $A = \{a, b, c\}$ در زیر نوشته شده است:

$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

مانند مثال قبل، تمام زیرمجموعه های هر یک از مجموعه های زیر را بنویسید:

$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$

$\{a, b, c, d\}$ (ب) $\{10, 11\}$ = ۱۲ و ۹

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$

$\emptyset, \{10\}, \{11\}, \{10, 11\}$

$\{a, b, c, d\}$

$\{a, c, d\}, \{b, c, d\}$

$\{a, b, c, d\}$

مجموعه های زیر را با اعضا مشخص کنید: $\{ \dots, 2, 4, \dots, -4, -6, \dots \}$
 الف) مجموعه عددهای صحیح فرد $\{ \dots, 1, 3, 5, \dots \}$
 ب) $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, -5 \leq x < 5\}$

ج) $B = \{2k + 2 | k \in \mathbb{Z}\} = \{ \dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots \}$

مجموعه عددهای گویا را با Q نمایش می دهیم. چون اولین عدد گویای بزرگ تر از هر عدد گویا مشخص نیست، نمی توان این مجموعه را با اعضا مشخص کرد؛ به همین دلیل مجموعه عددهای

گویا را با نمادهای ریاضی تعریف می کنیم: $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$ و $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

توجه کنید که هر عدد صحیح، عددی گویا است؛ یعنی برای هر عدد صحیح a داریم: $a = \frac{a}{1}$

در نتیجه $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

تمرین

۱- مجموعه $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ را در نظر بگیرید. کدام یک از مجموعه های زیر با هم

برابر است؟ $\{ -1, 1 \}$ $\{ 0, 1 \}$ $\{ -1, 0, 1 \}$
 B = $\{x | x \in A, x' \leq 2\}$, C = $\{x | x \in A, -1 \leq x \leq 1\}$, D = $\{x | x \in A, x' = 1\}$
 (B و C مساویند)

۲- سه مجموعه مانند A، B و C بنویسید به طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$. آیا می توان نتیجه

$A = \{ 1, 2 \}$

$B = \{ 1, 2, 3 \}$

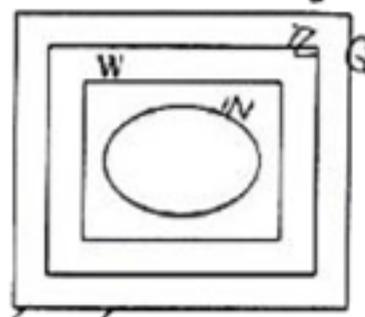
$C = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

گرفت $A \subseteq C$ ؟ (بار بار با هم)

۳- تمام زیر مجموعه های هر یک از مجموعه های زیر را بنویسید:

الف) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 2x + 1 = 3\}$ ب) $B = \{2x | x = 0, 2, 3\}$ و $\{0, 4, 6\}$
سوابق یا این صفر

۴- نمودار زوله زو، وضعیت مجموعه های $\mathbb{W}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}$ و \mathbb{Z}



را نسبت به هم نشان می دهد؛ آنها را نام گذاری و با علامت \subseteq با هم

مقایسه کنید. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ و $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ و $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

که درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را با ذکر دلیل مشخص

۱- هر عدد حسابی را می توان به صورت یک عدد گویا نوشت که منفرجه آن مخالف آن است. (الف) هر عدد گویا عددی حسابی است. (ب) هر عدد حسابی عددی گویا است. متن برابرند.

۲- بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح است. در عدد صحیح را می توان به صورت گویا نوشت که منفرجه آن مخالف متن برابرند. آن دسته از اعداد گویا که بعد از ساده کردن به صورت عدد صحیح در می آیند را می توانیم در نظر بگیریم.

۳- عدد $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{2}$ نسبت اولی حسابی نیست. (الف) هر عدد گویا عددی حسابی است.

۴- هر عدد صحیح عددی گویا است. در عدد صحیح را می توان به صورت گویا نوشت که منفرجه آن مخالف متن برابرند. (ج) هر عدد صحیح عددی گویا است.

۵- $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, \dots$ زیر مجموعه های B

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

$F = \{ \text{علی، رضا، محمد و کیوان} \}$ و $V = \{ \text{احسان، حسن، رشید} \}$

فعالیت

۱- در کلاس درس، علی و رضا عضو هر دو تیم والیبال و فوتبال هستند. سامان، احسان، فرشید و حسن فقط در تیم والیبال و محمد، حسن، کیوان و سبحان فقط در تیم فوتبال بازی می‌کنند. الف) اگر مجموعه دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را با V و فوتبال را با F نشان دهید. این مجموعه‌ها را با نمودار ون نمایش و سپس با عضوهایشان بنویسید.

ب) مجموعه دانش‌آموزانی را که در هر دو تیم عضویت دارند، بنویسید: $\{ \text{علی و رضا} \}$

ج) مجموعه دانش‌آموزانی را که حداقل در یکی از این دو تیم عضویت دارند، بنویسید: $\{ \text{احسان، حسن، رشید، علی، رضا، محمد و کیوان} \}$

۲- دو مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 6\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 2\}$ را در نظر بگیرید و

مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان تشکیل دهید:

الف) $A = \{ \dots, 3, 4, 5, 6 \}$ و $B = \{ -2, -1, 0, 1, 2 \}$

ب) مجموعه عددهایی که در هر دو مجموعه A و B هست

(این مجموعه را اشتراک A و B می‌نامیم و با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم).

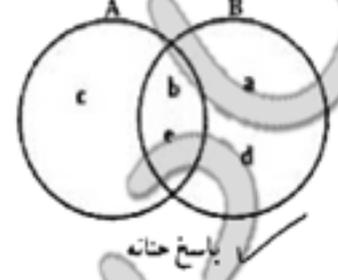
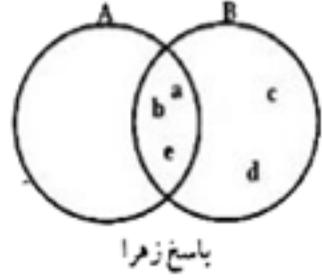
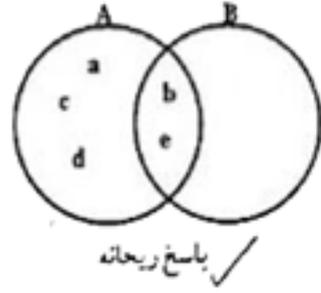
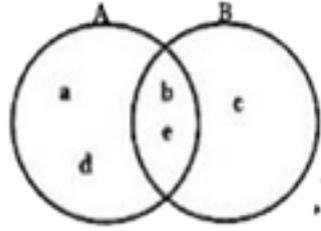
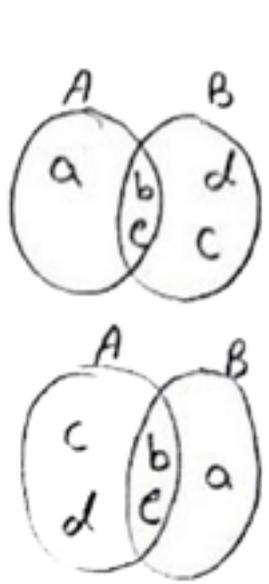
ج) مجموعه عددهایی که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B هست $\{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \}$ (این مجموعه را $A \cup B$ نشان می‌دهیم).

فعالیت

دهند. پاسخ چهار دانش‌آموز این کلاس را در زیر می‌بینید:

الف) درباره درستی یا نادرستی پاسخ این دانش‌آموزان بحث کنید و برای درستی یا نادرستی آنها دلیل بیاورید.

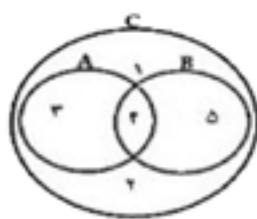
ب) آیا شما هم می‌توانید جواب درست دیگری به این سؤال بدهید؟ پاسخ خود را با پاسخ هم کلاسی‌های خود مقایسه کنید.



۲- با توجه به اولین فعالیت این درس و ورزشکاران دو تیم والیبال و فوتبال مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن عضو تیم والیبال باشد، ولی عضو تیم فوتبال نباشد (فقط در تیم والیبال بازی کند). این مجموعه را $V - F$ می‌نامیم و با نماد $V - F$ نمایش می‌دهیم:

$V - F = \{ \text{احسان و رشید} \}$ $F - V = \{ \text{کیوان و سبحان} \}$

۱- با توجه به نمودار زیر کدام عبارت، درست و کدام نادرست



- الف) $A \subseteq C$ ✓ ب) $B \subseteq C$ ✓ ج) $C \subseteq (A \cup B)$ ✗
 د) $(A \cup B) \subseteq C$ ✗ ه) $2 \in (A \cup B)$ ✗ و $4 \in (A \cap B)$ ✗
 ز) $A \cup B = A$ ✗ ح) $5 \in (A \cup B)$ ✓ و $4 \in (A \cup B)$ ✓

است؟

۲- مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲ را A و مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۸ را B بنامید. ابتدا A و B را تشکیل و سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید:

- الف) مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن، شمارنده ۱۸ باشد ولی شمارنده ۱۲ نباشد. $\{6, 18\}$
 ب) مجموعه‌ای تشکیل دهید که عضوهای آن، هم شمارنده ۱۲ و هم شمارنده ۱۸ باشند. $\{1, 2, 3, 4, 6, 12, 18\}$
 ۳- مجموعه‌های $(Z - N)$ ، $(N - Z)$ و $(W - N)$ را تشکیل دهید.
 $\{ \dots, -2, -1, 0 \}$ $\{1, 2, 3, \dots\}$ $\{ \dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
 قرارداد: تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم: به عنوان مثال، اگر A مجموعه‌ای k عضوی باشد، می‌نویسیم $n(A) = k$.

مثلاً اگر $A = \{2, 4, 6, 8\}$ در این صورت $n(A) = 4$.

۱۳

$$Z - W = \{ \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{ \dots, -1, -2, \dots \}$$

$$W - Z = \{1, 2, 3, \dots\} - \{ \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \} = \{ \}$$

سؤال ۳:

$$W - W = \{ \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \} - \{ \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \} = \{0\}$$

- الف) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ب) $\{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11\}$ ج) $\{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
 د) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \cup \{3, 6, 9, 12\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$
 ه) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 و) $\{9\}$
 ز) $\{1, 5, 7, 9\}$
 ح) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 ط) $\{2, 4, 6, 8, 9\}$
 ث) $\{ \}$
 ج) $\{1, 5, 7, 9\}$
 د) $\{1, 7, 8, 10, 11\}$ **تشریح**

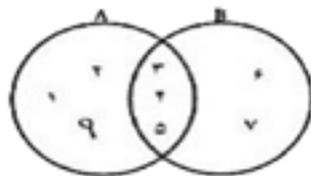
سؤال ۱:

۱- مجموعه‌های $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ و $B = \{1, 5, 7, 3, 9\}$ و $C = \{1, 7, 8, 10, 11\}$ را در نظر بگیرید: سپس هر یک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید:

- الف) $A \cup B$ ب) $B \cup C$ ج) $A \cup C$ د) $A \cap B$
 ه) $A - B$ و) $C - B$ ز) $(A - C) \cup (B - C)$ ح) $(A \cup B) - C$
 ط) $A \cap A$ ی) $A \cap \emptyset$ ک) $B \cup B$ ج) $C \cup \emptyset$

۲- با توجه به نمودار زیر، عبارات درست را با ✓ و گزاره‌های نادرست را با ✗ مشخص کنید:

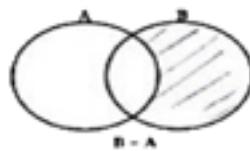
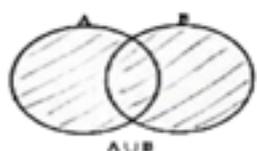
- الف) ✓ $(A - B) \cup (A \cap B) = A$ (ب) ✓ $B - A = \{6, 7\}$
 ج) ✗ $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 6\}$
 د) ✓ $n(A \cup B) = 8$

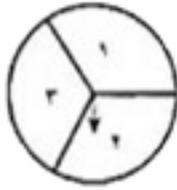


- ه) ✗ $n(A - B) = n(B - A)$ (و) ✓ $A - B = B - A$
 ۳- کلمات و مجموعه‌های داده شده زیر را در جاهای خالی قرار دهید:

- ۱) اجتماع ۲) A ۳) B
 ۴) زیرمجموعه ۵) $(A \cup B)$

- الف) اشتراک دو مجموعه، زیرمجموعه اجتماع همان دو مجموعه است.
 ب) هر یک از دو مجموعه A و B زیرمجموعه $A \cup B$ است.
 ج) اشتراک دو مجموعه A و B زیرمجموعه هر یک از دو مجموعه A و B است.
 د) مجموعه $A - B$ زیرمجموعه مجموعه A است.
 ه) اجتماع دو مجموعه $(A \cap B)$ با مجموعه B، مساوی است.
 ۴- در هر یک از شکل‌های زیر مجموعه مورد نظر را هاشور بزنید.





۱- با توجه به چرخنده مقابل، همه حالت‌های ممکن را که غفربه می‌تواند بایستد و عددی را نمایش دهد، مجموعه S بنامید. S را با عضوهایش نمایش دهید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

$$S = \{1, 2, 3\}$$

الف) مانند نمونه برای هر مجموعه با بیان یک جمله، یک پیشامد تعریف کنید:

A = {3, 1} (غفربه روی ناحیه ۱ یا ۳ بایستد) یا (غفربه روی عدد فرد بایستد)

B = {1, 2} (غفربه روی اعداد کوچکتر از ۳ بایستد)

C = {2, 3} (غفربه روی اعداد اول بایستد) ... D = {2} (غفربه روی عدد زوج بایستد)

پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی هایتان مقایسه کنید.

ب) هر یک از زیرمجموعه‌های S را پیشامد تصادفی می‌نامیم. احتمال رخداد هر یک از این پیشامدها را به دست آورید. چه تعداد از این پیشامدها هم‌تانس است؟ پاسخ‌های خود را با پاسخ هم‌کلاسی هایتان مقایسه کنید.

$$A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\} \rightarrow P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

$$D = \{1, 2\}, E = \{1, 3\}, F = \{2, 3\} \rightarrow P(D) = P(E) = P(F) = \frac{2}{3}$$

$$G = \{\} \rightarrow P(G) = 0$$

$$H = \{1, 2, 3\} \rightarrow P(H) = 1$$

کار در کلاس

۱۰ کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داخل جعبه‌ای قرار می‌دهیم و تصادفی یک کارت بیرون می‌آوریم.



الف) مجموعه همه حالت‌های ممکن $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ است. پیشامد A را به این صورت تعریف می‌کنیم که «عدد روی کارت خارج شده از ۵ کمتر باشد». مجموعه A را تشکیل دهید و احتمال رخداد پیشامد آن را به دست آورید.

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

ب) مجموعه با پیشامدی تعریف کنید که احتمال رخ دادن آن پیشامد، $\frac{4}{10}$ باشد. عدد روی کارت خارج شده بیشتر از ۶ باشد

ج) اگر B پیشامد خارج شدن عدد اول و C پیشامد خارج شدن عدد زوج باشد، مجموعه‌های B و C را تشکیل دهید و احتمال رخداد هر یک را محاسبه کنید. آیا پیشامدهای B و C هم‌تانس است؟ چرا؟

$$B = \{2, 3, 5, 7\} \quad P(B) = \frac{4}{10}$$

$$C = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad P(C) = \frac{5}{10}$$



۱- اگر ناسی را بیندازیم، جقدر احتمال دارد:

الف) عدد رو شده زوج باشد. $\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ ب) عدد رو شده زوج و از ۲ بزرگ تر باشد. $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ج) عدد رو شده زوج و اول باشد. $\frac{1}{4}$ د) عدد رو شده از ۳ کمتر باشد. $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

۲- اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد، اولاً مجموعه همه حالت‌های ممکن را تشکیل دهید (هر عضو این مجموعه را به طور مثال به صورت (د،د،ب) نمایش دهید). ثانیاً جقدر احتمال دارد این خانواده دارای دو دختر باشد؟ (دارای دو دختر یعنی دقیقاً دو دختر و یعنی فرزند اول سر و دو فرزند بعدی دختر بوده است). $\frac{3}{8}$

۳- در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز و ۴ مهره آبی و ۵ مهره سبز وجود دارد. اگر ۱ مهره را تصادفی از این جعبه خارج کنیم، جقدر احتمال دارد:

الف) این مهره آبی باشد. $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ ب) این مهره سبز نباشد. $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$

ج) این مهره قرمز یا سبز باشد. (یعنی اینها باشند) $\frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ یا $(1 - \frac{4}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3})$

۴- اگر ناسی را دو بار بیندازیم (یا دو ناسی آبی و قرمز را با هم بیندازیم)، جقدر احتمال دارد:

الف) اگر مجموعه همه حالت‌های ممکن را S بنامیم. $n(S) = 36$

الف) هر دو بار، عدد اول رو شود. $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ ب) دو عدد رو شده، مثل هم باشد. $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

ج) دو عدد رو شده، مضرب ۳ باشد. $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ د) مجموع دو عدد، ۷ باشد. $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

حواله‌های

در بسیاری از کتاب‌های ریاضی، از مجموعه به عنوان گروهی (یا دسته‌ای) از اشیاء نام برده شده است. غافل از آنکه اگر بگوییم مجموعه گروهی از اشیاء است، باید بگوییم گروه چیست؟! آیا می‌توانیم گروه را تعریف کنیم؟
در واقع جاره‌ای نیست جز آنکه مانند سمبولیسم (ریاضی دان معاصر) بگوییم: در همه شاخه‌های ریاضی مجموعه یک مفهوم بنیادی است. به عبارت دیگر مجموعه جزه نخستین تعریف نشده‌ها است، مانند مفاهیمی چون نقطه و خط در هندسه، که برای آنها تعریف دقیقی نداریم ولی آنها را با اثر خود می‌شناسیم.

۱۷

الف) (۲،۲) و (۲،۳) و (۲،۴) و (۳،۲) و (۳،۳) و (۳،۴) و (۴،۲) و (۴،۳) و (۴،۴)

ب) (۱،۱) و (۲،۲) و (۳،۳) و (۴،۴) و (۵،۵) و (۶،۶)

سؤال ۴: ج) (۲،۳) و (۳،۴) و (۴،۳) و (۶،۴)

د) (۴،۳) و (۵،۴) و (۶،۵) و (۳،۴) و (۲،۵) و (۱،۶)

فصل دوم

۱- در فصل گذشته با نمایش‌های مختلف مجموعه‌های اعداد آشنا شدید. عبارت‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید:

ردیف	عبارت کلامی	زبان نمادین	محور
۱	عددهای طبیعی بیشتر یا مساوی ۳	$\{x \in \mathbb{N} x \geq 3\}$ $\{3, 4, 5, \dots\}$	
۲	عددهای حسابی کوچک‌تر یا مساوی ۲	$\{x \in \mathbb{W} x \leq 2\}$ $\{0, 1, 2\}$	
۳	عددهای صحیح بین -۲ و ۲	$\{x \in \mathbb{Z} -2 < x < 2\}$ $\{-1, 0, 1\}$	
۴	عددهای صحیح بزرگ‌تر از -۱	$\{x \in \mathbb{Z} x > -1\}$ $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$	

math-home.ir مولف:

نامساوی $x \geq 3$ برای کدام یک از عددهای زیر درست است؟ اعداد ۳، ۴ و ۵
 درست $1 \geq 3$ و نادرست $2 \geq 3$ ، $3 \geq 3$ ، $4 \geq 3$ ، $5 \geq 3$ ، $1, 2$ ، $3, 4, 5$

۲- می‌خواهیم بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ چند کسر بنویسیم. روش‌های مختلفی را که چهار دانش‌آموز نوشته‌اند، بررسی و کامل کنید؛ راه حل هر کدام را توضیح دهید.

روش بهار

$$\frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{6} < ? < \frac{3}{6}$$

$$\frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12}$$

$$\frac{6}{18} < \frac{7}{18} < \frac{8}{18} < \frac{9}{18}$$

روش مریم

روش مریم

۱- ابتدا هر دو کسر را هم‌خرج کرده و سپس اعداد $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ و $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ را روی محور مشخص کرده‌است
 ۲- برای درست آوردن یک عدد بین این دو عدد هر قسمت را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده، لذا یک واحد به دو طرف قسمت مساوی تقسیم می‌شود بنابراین $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ و $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$ می‌باشد و کسر $\frac{5}{12}$ طبق شکل بین این دو عدد قرار می‌گیرد

۳- در این مرحله به‌حالی تقسیم هر کدام از قسمت‌های کوچک به ۳ قسمت مساوی، هر کدام از آن‌ها را به ۳ قسمت مساوی تقسیم می‌کنند، لذا واحد به ۱۸ قسمت مساوی تقسیم می‌شود بنابراین $\frac{1}{3} = \frac{6}{18}$ و $\frac{1}{2} = \frac{9}{18}$ می‌باشند و دو کسر $\frac{7}{18}$ و $\frac{8}{18}$ بین این دو عدد قرار می‌گیرد

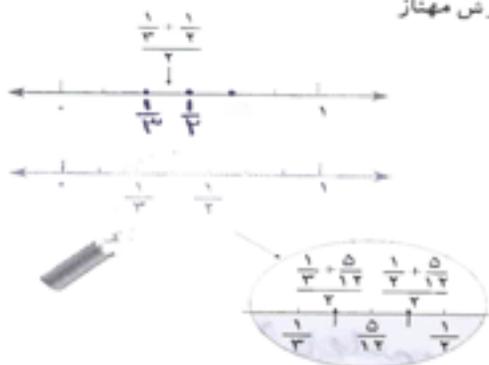
روش بهار

بهار دقیقاً کار مریم را انجام داده‌است ولی عدد هم نکرده‌است. روش مریم معنوی‌تر ولی روش بهار سریع‌تر می‌باشد
 می‌توانیم ببینیم روش بهار نتیجه‌ی روش مریم می‌باشد

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{2} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$$



مؤلف: math-home.ir

الف) با یکی از روش‌ها توضیح دهید که چرا بین دو کسر می‌توان بی‌شمار کسر پیدا کرد.

ب) آیا مجموعه عددهای گویا را می‌توان با نوشتن عضوها نشان داد؟ چرا؟

ج) آیا می‌توان مجموعه عددهای گویا را با محور اعداد نمایش داد؟

د) عددهای گویا را به زبان نمادین معرفی کنید.

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

$$\left\{ \frac{a}{1} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$$

فعالیت

مهناز بین از مشخص کردن جای دو عدد روی محور از خاصیت میانگین دو عدد کمک گرفته است.

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$



میانگین دو عدد $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ برابر $\frac{5}{12}$ می‌باشد پس داریم $\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$

در مرحله‌ی دوم ابتدا میانگین $\frac{1}{3}$ و $\frac{5}{12}$ و سپس میانگین $\frac{1}{3}$ و $\frac{5}{12}$ را بدست آورده‌ایم

عطیه هم دقیقاً از روش مهناز استفاده کرده است. فقط محور رسم نکرده است.

الف)

روش مردم

تعداد زیادی

مردم می‌توانند یک واحد را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کند و تعداد زیادی کسر بین این دو عدد بنویسد
اگر هر قسمت را به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم کند ۹۹ عدد گویا بین این دو کسر می‌تواند بنویسد

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{300}{900}, \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{200}{400}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{201}{600}, \frac{202}{600}, \frac{203}{600}, \dots, \frac{299}{600} < \frac{1}{2}$$

اگر هر قسمت را به ۱۰۰۰ قسمت مساوی تقسیم کند ۹۹۹ عدد گویا بین این دو کسر می‌تواند بنویسد

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{3000}{9000}, \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{2000}{4000}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{2001}{4000}, \frac{2002}{4000}, \frac{2003}{4000}, \dots, \frac{2999}{4000} < \frac{1}{2}$$

در روش مهناز نیز می‌توانیم به وفات زیادی میانگین دو عدد را محاسبه کنیم

نتیجه: بین دو عدد گویا بی‌شمار عدد گویا وجود دارد

صفحه ۲۰/۱

۱- بین $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{4}$ سه کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

روش دوم \Rightarrow

۲- بین $-\frac{1}{2}$ و -1 دو کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

صفحه ۲۰/۲

$$-1 = -\frac{2}{2} = -\frac{2 \times 3}{2 \times 3} = -\frac{6}{6} < -\frac{5}{6}, -\frac{4}{6} < \frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$$

کار در کلاس

۲۰/۱

$$\frac{2}{5} = \frac{8}{20}, \frac{3}{4} = \frac{15}{20} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{9}{20}, \frac{10}{20}, \frac{11}{20}, \dots, \frac{14}{20} < \frac{15}{20}$$

مؤلف: math-home.ir

دو کسر مهم منفرجه من کسری در بین $\frac{8}{20}$ و $\frac{15}{20}$ کسری $\frac{9}{20}, \frac{10}{20}, \dots, \frac{14}{20}$ را می توانیم

کار در کلاس بهترین ۲۰

کار در کلاس 1 :

می دانیم $a < \frac{a+b}{2} < b$ لذا داریم

$$\frac{2}{5} < \frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{\frac{23}{20}}{2} = \frac{23}{40} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{23}{40} < \frac{3}{4} \quad (1)$$

با ادامه روش بالا داریم

$$\frac{2}{5} + \frac{23}{40} = \frac{39}{40} \Rightarrow \frac{\frac{2}{5} + \frac{23}{40}}{2} = \frac{39}{80}, \quad \frac{\frac{23}{40} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{53}{40} \Rightarrow \frac{53}{80} < \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{39}{80} < \frac{23}{40} < \frac{53}{80} < \frac{3}{4}$$

کار در کلاس 2 :

$$\frac{-1}{2} < \frac{\frac{-1}{2} + (-1)}{2} = \frac{-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow -1 < -\frac{3}{4} < -\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$-1 + (-\frac{3}{4}) = -\frac{7}{4} \Rightarrow \frac{-1 + (-\frac{3}{4})}{2} = -\frac{7}{8}, \quad \frac{-\frac{3}{4} + (-\frac{1}{2})}{2} = -\frac{5}{4} \Rightarrow -\frac{5}{8} < -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow -1 < -\frac{7}{8} < -\frac{3}{4} < -\frac{5}{8} < -\frac{1}{2}$$

۱- می‌خواهیم کسره‌های $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{6}$ و $\frac{7}{8}$ و $\frac{5}{9}$ را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم. روش‌های مختلفی را که دانش‌آموزان به کار برده‌اند با هم مقایسه کنید؛ هر کدام را توضیح دهید و در صورت لزوم کامل کنید.



روش شاهد: شاهد به صورت تقریبی کسره‌های $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{9}$ را روی محور مشخص کرده است. آیا به نظر شما استفاده از این روش برای نمایش دو کسر دیگر مناسب است؟

خیر، این روش مناسب برای مقایسه نیست. روش مرتضی: مرتضی مخرج مشترک کسرها را پیدا کرد و با هم مخرج کردن کسرها، آنها را مقایسه می‌کند. توضیح دهید که عدد ۳۶۰ چگونه به دست می‌آید. کار مرتضی را کامل کنید.

math-home.ir

$$\frac{5}{9} = \frac{200}{360} \quad \frac{7}{8} = \frac{315}{360} \quad \frac{5}{6} = \frac{300}{360} \quad \frac{3}{5} = \frac{216}{360}$$

روش مجید: مجید به کمک مائین حساب، نمایش اعشاری هر کسر را تا دو رقم اعشار نوشت. شما کار او را کامل و کسرها را مقایسه کنید:

$$\frac{5}{9} = 0.55 \quad \frac{7}{8} = 0.875 \quad \frac{5}{6} = 0.833 \quad \frac{3}{5} = 0.6$$

در مورد روش‌های مختلف و ویژگی‌های هر کدام در کلاس گفت‌وگو کنید. **صورت ۲۱/۱**
۲- با کمک مائین حساب، نمایش اعشاری کسره‌های زیر را تا دو رقم اعشار بنویسید:

$$\frac{1}{7} = 0.14 \quad \frac{1}{9} = 0.11 \quad \frac{7}{6} = 1.17$$

$$\frac{1}{5} = 0.20 \quad \frac{1}{3} = 0.33 \quad \frac{3}{8} = 0.37$$

الف) مائین حساب شما تا چند رقم را روی صفحه نمایش نشان می‌دهد؟ پاسخ: ۸ رقم
ب) بین مقدارهای اعشاری این کسرها چه تفاوتی هست؟ **صورت ۲۱/۱**

$$1 \div 3 = 0.333333$$

فعالیت ۱ برای مقایسه‌ی اعداد گویا با مخرج‌های مساوی و کوچک استفاده از محور روش مناسبی است. در صورتی که مخرج‌ها بزرگ باشند تقسیم یک واحد به قسمت‌های مساوی کار دشوار و حتی در خیلی موارد غیر ممکن است. لذا برای این سؤال روش شاهد روش مناسبی نیست.

* یکی از روش‌های مناسب برای مقایسه‌ی کسرها هم مخرج کردن آن‌ها می‌باشد ولی این روش نیز به نوبه‌ی خود محدودیت‌های دارد و در صورتی که مخرج کسرها بزرگ باشد درست آوردن «ک.م.م» آن‌ها بسیار وقت‌گیر است.

* مجدد از ابزار استفاده کرده‌ایم و ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم کرده و عدد اعشاری آن‌ها را بیست کرده و سپس آن‌ها را با هم مقایسه کرده، استفاده از مائین حساب در زندگی روزمره و کسره‌های واقعی بسیار مناسب‌تر از دو روش بالاست. این روش هم محدودیت‌هایی دارد چون ممکن است مائین حساب نداشته باشیم. نتیجه: برای شروع کار روش شاهد مناسب‌ترین روش است و در انتها روش مجید در صورت داشتن مائین حساب بسیار مناسب‌تر است.

فعالیت ۲ ب) برخی اعداد تعداد رقم‌های اعشاری محدودی دارند مثلا $\frac{1}{5} = 0.2$ که فقط یک رقم اعشاری دارد. در برخی دیگر رقم‌ها تکرار می‌شود مثلا $\frac{1}{3} = 0.3333$ که رقم ۳ تکرار می‌شود و برخی از آن‌ها برخی ارقام تکرار و برخی تکرار نشده‌اند مثلا $\frac{1}{6} = 0.1666$

نمایش اعشاری هر یک از کسره‌های زیر را بنویسید:

$$\frac{5}{11} = 0,45\overline{45}$$

$$\frac{7}{9} = 0,7\overline{7}$$

$$\frac{5}{6} = 0,8\overline{3}$$

$$\frac{7}{22} = 0,31\overline{8}$$

$$\frac{3}{20} = 0,15$$

$$\frac{5}{16} = 0,3125$$

اگر به نمایش اعشاری کسره‌های بالا دقت کنید، خواهید دید که فقط کسره‌هایی نمایش اعشاری مختوم دارد که (پس از ساده شدن) مخارج آنها شمارنده اولی به جز ۲ و ۵ ندارد.

تمرین

۱- پس از محاسبه هر قسمت، کسر مرکب را تا حد امکان ساده کنید:

math-home.ir. مؤلف: ه

$$-1 + \frac{3}{4} = -0,25 \quad \frac{5}{6} - \frac{1}{8} = \frac{7}{24} = 0,291\overline{6} \quad \frac{5}{6} + 2\frac{1}{2} = \frac{17}{3} = 5,66\overline{6}$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(-2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{2}) \div (-1 - \frac{1}{9}) = -\frac{13}{5} = -2,6 \quad \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{10} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}} + 5\frac{1}{3} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{3}{4}} \times \frac{16}{14} = -\frac{5}{14} = -0,357\overline{142857}$$

منفی
مثبت

$$-\frac{1}{2} + \frac{-5}{6} + \frac{7}{2} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} + (2 + \frac{-6}{5})$$

$$-2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{3} + 4\frac{7}{12} = -2\frac{4}{12} - 3\frac{4}{12} + 4\frac{7}{12} = -1\frac{1}{12} = -0,08\overline{3}$$

$$\frac{1}{-1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{-1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3$$

۳- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

الف) $\frac{7}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 2, -3\frac{5}{6}$

ب) $\frac{16}{7}, -\frac{3}{2}, 2,75, -\frac{5}{6}, 4\frac{3}{5}, \frac{56}{13}$

۴- بین هر دو کسر، سه کسر بنویسید.

الف) $\frac{10}{11}, \frac{12}{13}$

ب) $0, -\frac{1}{3}$

$$\frac{10}{11} = \frac{130 \times 2}{143 \times 2} = \frac{260}{286} < \frac{271}{286}, \frac{272}{286}, \frac{273}{286} < \frac{12}{13} = \frac{132 \times 2}{143 \times 2} = \frac{264}{286}$$

تمرین
سؤال ۲

$$-\frac{1}{2} + \frac{-5}{6} \div \frac{7}{2} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{18} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} = -0,3\overline{3}$$

نکته: ضرب و تقسیم بر جمع و تفریق اولویت دارد ولی چون تقسیم ابتدا آمده مرحله اول تقسیم و سپس ضرب و در مرحله دوم جمع و تفریق را باید انجام دهیم

$$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} + (2 \div \frac{-4}{5}) = \frac{5}{6} - \frac{7}{8} \div (\frac{2 \times -5}{4}) = \frac{5}{6} - \frac{7}{8} \div (-\frac{5}{2})$$

$$= \frac{5}{6} - \frac{7}{8} \times (-\frac{2}{5}) = \frac{5}{6} + \frac{7}{20} = \frac{143}{120} = 1,191\overline{6}$$

سؤال ۳ قسمت الف)

$$[1, 3, 4, 1, 2] = 24 \quad -\frac{35}{4} = -\frac{21}{2} \quad \frac{7}{2} = \frac{14}{4} \quad -\frac{22}{4} = -\frac{11}{2}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{21}{24} \quad -\frac{7}{4} = -\frac{14}{24} \quad \frac{3}{4} = \frac{18}{24} \quad \frac{7}{2} = \frac{28}{24} \quad -\frac{22}{4} = -\frac{44}{24}$$

$$\Rightarrow -\frac{44}{24} < -\frac{14}{24} < \frac{18}{24} < \frac{21}{24} < \frac{28}{24} \Rightarrow -\frac{11}{6} < -\frac{7}{6} < \frac{3}{4} < \frac{7}{8} < 2$$

قسمت ب)

$$\frac{14}{5} = 2\frac{4}{5} = 2\frac{8}{10} \quad -\frac{9}{4} = -2\frac{2}{4} = -2\frac{1}{2} \quad -\frac{12}{11} = -1\frac{1}{11} \quad \frac{54}{13} = 4\frac{2}{13} = 4\frac{4}{26}$$

$$4\frac{4}{26} = 4\frac{8}{52} \quad 2,75 = 2\frac{3}{4} = 2\frac{15}{20} = 2\frac{21}{28}$$

$$-\frac{10}{12} < -\frac{9}{12} < 2\frac{8}{28} < 2\frac{21}{28} < 4\frac{8}{26} < 4\frac{21}{26} \Rightarrow -\frac{5}{6} < -\frac{3}{4} < 2,75 < \frac{54}{13} < 4\frac{13}{5}$$

روش دوم استفاده از بسط حساب

سؤال ۴

$$-\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} < -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots < 0$$

$$-\frac{1}{4} < \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{3}{12} < \frac{9}{12} \Rightarrow -\frac{3}{12} < -\frac{2}{12}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{12} < \frac{1}{12} = 0$$

۱- پنج عدد بین ۱ و ۲ معرفی کنید و آنها را روی محور نمایش دهید.
 $A = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{5}, C = \frac{2}{5}, D = \frac{3}{5}, E = \frac{4}{5}$
 ۲- با توجه به اینکه مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ مساوی 1.414 است، آن را روی محور نشان دهید.
 ۳- معلم از دانش آموزان خواست با ماشین حساب، مقدار تقریبی عدد $\sqrt{2}$ را بنویسند. با توجه به اینکه دانش آموزان از ماشین حساب های مختلف استفاده می کردند، تعداد رقم هایی که نوشته بودند متفاوت بود. سه نمونه از صفحه نمایش ماشین حساب ها را در زیر می بینید. با توجه به آنها به سوال های زیر پاسخ دهید:

1.4142136 1.414213562
 math-home.ir مولف:
 1.41421356237

صورت ۲۴۱ \Rightarrow چرا در ماشین حساب ۸ رقمی، رقم آخر با رقم مشابه در ماشین حساب ۱۲ رقمی تفاوت دارد. *فرد شده است*
 چرا این تفاوت در ماشین حساب های ۱۰ رقمی و ۱۲ رقمی دیده نمی شود؟ *فرد شده است*
 با توجه به عددی که ماشین حساب ۱۲ رقمی نشان می دهد، آیا تناوب (تکرار منظم) در رقم های اعشاری دیده می شود؟ *خیر*
 مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ ، تا رقم اعشار محاسبه، و در زیر نوشته شده است:

1.414213562373095

آیا در رقم نشان داده شده برای $\sqrt{2}$ ، تناوبی می بینید؟ *خیر*
 عددهایی مانند $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{11}$ ، $\sqrt{13}$ ، $\sqrt{17}$ ، $\sqrt{19}$ ، $\sqrt{23}$ ، $\sqrt{29}$ ، $\sqrt{31}$ ، $\sqrt{37}$ ، $\sqrt{41}$ ، $\sqrt{43}$ ، $\sqrt{47}$ ، $\sqrt{53}$ ، $\sqrt{59}$ ، $\sqrt{61}$ ، $\sqrt{67}$ ، $\sqrt{71}$ ، $\sqrt{73}$ ، $\sqrt{79}$ ، $\sqrt{83}$ ، $\sqrt{89}$ ، $\sqrt{97}$ ، $\sqrt{101}$ ، $\sqrt{103}$ ، $\sqrt{107}$ ، $\sqrt{109}$ ، $\sqrt{113}$ ، $\sqrt{127}$ ، $\sqrt{131}$ ، $\sqrt{137}$ ، $\sqrt{139}$ ، $\sqrt{143}$ ، $\sqrt{149}$ ، $\sqrt{151}$ ، $\sqrt{157}$ ، $\sqrt{163}$ ، $\sqrt{167}$ ، $\sqrt{173}$ ، $\sqrt{179}$ ، $\sqrt{181}$ ، $\sqrt{187}$ ، $\sqrt{191}$ ، $\sqrt{193}$ ، $\sqrt{197}$ ، $\sqrt{199}$ ، π را، که تعداد ارقام اعشاری آنها بی شمار و دارای دوره تناوب نیست، گنگ (اصم) می گوئیم. مجموعه ای که این عددها در آن قرار دارد، مجموعه عددهای گنگ می نامیم و آن را با Q' یا Q^c نمایش می دهیم.

$\sqrt{2}$ عددی گنگ است. اثبات این مطلب را در سال های آینده می خوانید. *صورت ۲۴۱*

فعالیت ۳
 ★ با توجه به اینکه رقم نهم ۴ می باشد وقتی این رقم حذف می شود یک واحد به رقم هشتم یعنی عدد ۱ اضافه می شود (چون ۱۰۰۰ است) $\rightarrow 1,414213562 \rightarrow 1,41421356$
 ★ چون رقم یازدهم برابر ۳ می باشد وقتی این رقم حذف می شود رقم قبلی تغییر می کند (چون ۱۰۰ است) $\rightarrow 1,41421356237 \rightarrow 1,4142135623$

اثبات کنید چرا $\sqrt{2}$ گنگ است.
 اثبات: فرض می کنیم $\sqrt{2}$ گویا باشد پس وجود دارد سری مانند $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$)
 به طوری که $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ و $\frac{a}{b}$ یک کسر ساده شده است یعنی $(a, b) = 1$
 $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$
 چون a^2 زوج است لذا a عددی زوج است پس $a = 2k$ (k عددی طبیعی است)
 $a^2 = 2b^2 \Rightarrow (2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$
 بنابراین b هم عددی زوج است.
 ① و ② داریم $(a, b) \neq 1$ چون هر دو زوج می باشند پس کسر $\frac{a}{b}$ یک کسر ساده شده است. چون فرض گرفته بودیم $\frac{a}{b}$ ساده نشده است پس فرض مان باطل است یعنی کسر ساده نشده بودیم که $\sqrt{2}$ یا آن برابر باشد پس $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.

کدام عبارت، درست و کدام عبارت، نادرست است؟

$Q \cap Q' = \emptyset$

درست

$N \subseteq Q'$

نادرست

$Z \subseteq Q$

درست

$Z \subseteq Q'$

نادرست است

($Z \subseteq Q$ است)

$N \subseteq Q$ است

فعالیت

الف) بین دو عدد ۱ و ۲ چند عدد گویا می توان نوشت؟ بی شمار عدد گویا می توان نوشت

ب) اگر این عددها را روی محور نمایش دهیم، متناظر با این عددها، چند نقطه روی محور

می توان پیدا کرد؟ متناظر با هر عدد فقط یک نقطه وجود دارد

ج) روی محور نقطه نمایش $\sqrt{2}$

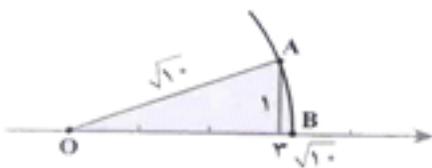
را پیدا کنید.

د) اگر نقاطی را رنگ کنیم که عددی گویا را نمایش می دهد، آیا همه نقاط پاره خط AB رنگ

می شود؟ آیا $\sqrt{2}$ نیز رنگ می شود؟ آیا این نقاط، که هر کدام نمایش یک عدد گویا است، یک پاره خط

به وجود می آورد؟ چرا؟ خیر زیرا بین هر دو عدد گویا بی شمار عدد گنگ داریم که رنگ نمی شود

مثال: نقطه نمایش عدد گنگ $\sqrt{10}$ روی محور به صورت زیر است:



به مرکز O و به شعاع OA کمان رسم می کنیم. نقطه B

روی محور عدد $\sqrt{10}$ را نمایش می دهد.

$OA^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \Rightarrow OA = \sqrt{10}$

فعالیت

الف) بین هر دو عدد گویا بی شمار عدد گویا وجود دارد

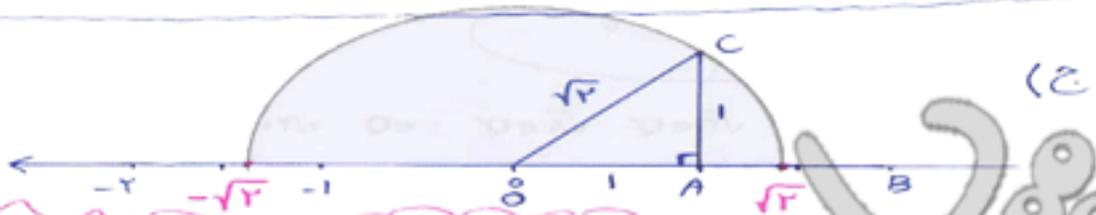
$1 < 1 \frac{1}{n} < 2$... $1 \frac{1}{6} < 1 \frac{1}{5} < 1 \frac{1}{4} < 1 \frac{1}{3} < 2$

$1 < \frac{n+1}{n} < 2$... $\frac{7}{6} < \frac{6}{5} < \frac{5}{4} < \frac{4}{3} < 2$

$OC^2 = OA^2 + AC^2$

$OC^2 = 1^2 + 1^2$

$OC = \sqrt{2}$



$\Rightarrow -1,5 < -\sqrt{2} < -1$ و $1 < \sqrt{2} < 1,5$

د) بین دو عدد ۱ و ۲ بی شمار عدد گنگ وجود دارد. و بی شمار عدد گویا وجود دارد. و بین هر دو عدد گویا بی شمار عدد گنگ وجود دارد. وقتی نقاط متناظر با اعداد گویا بین ۱ و ۲ را رنگ می کنیم نقاط متناظر با اعداد گنگ رنگ نشده باقی می ماند در نتیجه این نقاط نمی توانند با خط بوجود آورند.

- نکته
- ★ بین هر دو عدد گویا بی شمار عدد گویا وجود دارد
- ★★ بین هر دو عدد گویا بی شمار عدد گنگ وجود دارد
- ★★★ بین هر دو عدد گنگ بی شمار عدد گنگ وجود دارد
- ★★★★ بین هر دو عدد گنگ بی شمار عدد گویا وجود دارد

کار در کلاس

- ۱- بین $\sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$ ، چهار عدد گنگ بنویسید. $\sqrt{5.1}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{8.1}$
- ۲- بین دو عدد ۲ و ۳، چهار عدد گنگ بنویسید. $2 = \sqrt{4} < \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$

۳- الف) مجموعه A به صورت $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 \leq x \leq 3\}$ را در نظر بگیرید. آیا نمایش A به صورت زیر درست است؟ **خیر صفر ۱**



ب) نقطه نمایش $\sqrt{5}$ را روی محور مشخص کنید.

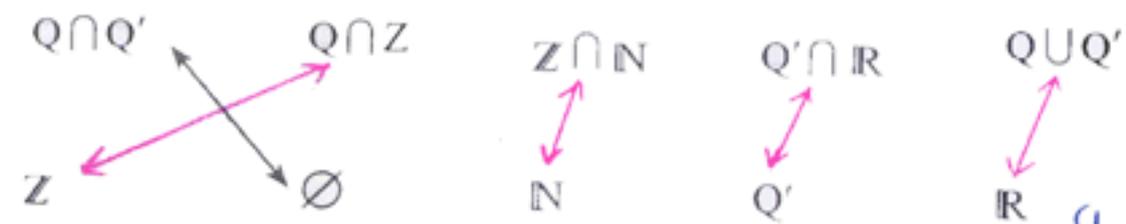
مؤلف: math-home.ir

کار در کلاس

۱- داخل \circ علامت \in یا \notin بگذارید:

- $4 \in \mathbb{Z}$ $0.2 \in \mathbb{Q}$ $\sqrt{18} \in \mathbb{R}$ $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$
- $-5 \in \mathbb{R}$ $-\frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$ $5 = \sqrt{25} \notin \mathbb{Q}'$ $\frac{0}{6} \in \mathbb{R}$ $\frac{0}{6} = 0$
- $\sqrt{3/5} \in \mathbb{Q}'$ $\sqrt{0/9} \in \mathbb{Q}'$ $\sqrt{0/09} \in \mathbb{Q}$ $\frac{9}{9} \in \mathbb{Z}$ $\frac{9}{9} = -9$

۲- مجموعه‌های سطر اول را به مجموعه مناسب در سطر دوم وصل کنید. هر مجموعه در سطر اول با یک مجموعه در سطر دوم مساوی است.



$$\sqrt{5} < \sqrt{5.1}, \sqrt{5.2}, \sqrt{5.3}, \dots, \sqrt{6}, \sqrt{6.1}, \dots, \sqrt{8.9}, \sqrt{9.1}, \sqrt{9.2}, \dots < 10$$

این سوال پاسخ باز است

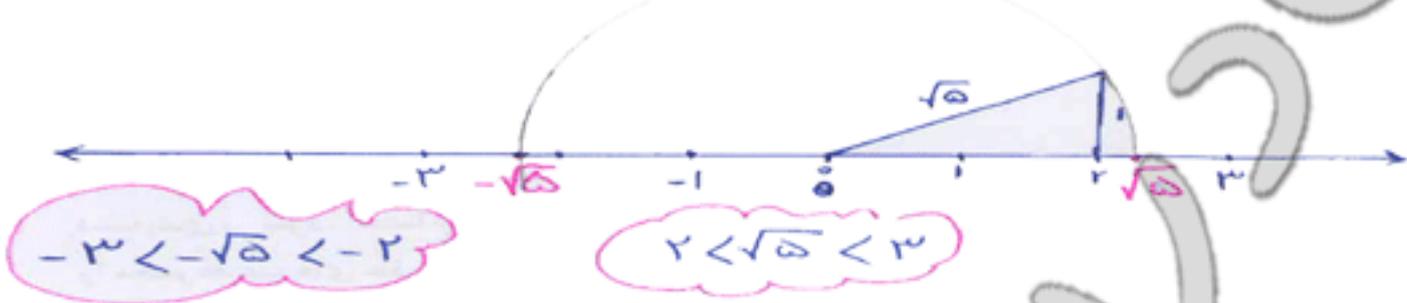
تذکره: $\sqrt{9}$ گنگ نیست

کار در کلاس

$$2 = \sqrt{4} < \sqrt{4.1}, \sqrt{4.2}, \sqrt{4.3}, \sqrt{4.4} < \sqrt{9} = 3$$

این سوال پاسخ باز است

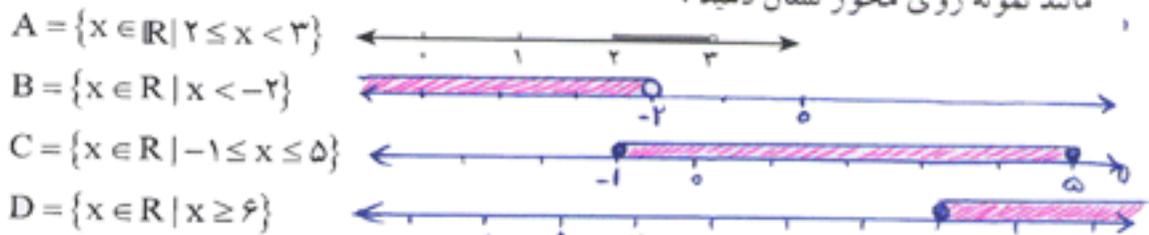
۳- مجموعه‌ی A شامل تمام اعداد گویا از ۲ تا ۳ می‌باشد (دو سره را نیز شامل می‌شود) ولی شامل اعداد گنگ نمی‌شود مثلاً $2 < \sqrt{5} < 3$ یک عدد گنگ است و نقطه‌ی متناظر با $\sqrt{5}$ رنگ نمی‌شود لذا نمی‌توان این مجموعه را با یک پارچه‌ی نخایش داد



- نکته
- ۱- دو مجموعه Q و Q' جدا از هم می‌باشند زیرا $Q \cap Q' = \emptyset$
 - ۲- $R - Q = Q'$ و $R - Q' = Q$
 - ۳- اجتماع این دو مجموعه، مجموعه‌ی اعداد حقیقی را درست می‌کند یعنی: $Q \cup Q' = \mathbb{R}$

با توجه به اینکه مجموعه عددهای حقیقی تمام عددها را شامل می‌شود، مجموعه‌های زیر را

مانند نمونه روی محور نشان دهید:



با توجه به مجموعه A چرا نقطه 2 روی محور توپر و نقطه 3 روی محور توخالی است؟

نامساوی $x < 3$ به این معنی است که x باید از 3 کم تر باشد و مجموع شامل عدد 3 نمی باشد و نامساوی $x \leq 2$ یعنی مجموع شامل 2 و اعداد بزرگ تر از آن می باشد

کار در کلاس

1- مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید و یا با توجه به محور، مجموعه متناظر آن را بنویسید:



2- با توجه به سه مجموعه A و B و C در سؤال 1 عبارات درست را با علامت ✓ مشخص کنید:

- $\sqrt{75} \in A$
- $\sqrt{3} \in A$
- $\sqrt{7} \in C$
- $\sqrt{1} \in A$
- $-1000 \in C$
- $0.252552555... \in B$

3- کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعه نقاط روی شکل زیر، برابر است؟



(الف) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

(ب) $\{x \in \mathbb{R} | x > -2\}$

(ج) $\{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 3\}$ ✓

مجموعه‌ی مشخص شده شامل تمام نقاط بین -2 و 3 است یعنی تمام اعداد حقیقی بزرگ تر از -2 و کوچک تر از 3.

$A \subseteq B$ باشد نگاه داریم: $A \cap B = A$ و $A \cup B = B$

- $Q' \subseteq R \Rightarrow Q' \cap R = Q'$
- $N \subseteq Z \Rightarrow Z \cap N = N$
- $Z \subseteq Q \Rightarrow Q \cap Z = Z$

نکته: $A = \{x | x \in \mathbb{R}, b < x \leq a\}$



نامساوی $x \leq a$ یعنی تمام اعداد کوچک تر و مساوی a به این مجموعه شامل عدد a نیز می شود و نامساوی $b < x$ به این معنی است که x بزرگ تر از b است و شامل عدد b نمی شود.

۱- با توجه به مجموعه‌های داده شده، سایر سطرها را مانند سطر اول کامل کنید

مجموعه اعداد	$\sqrt{3/2}$	$\frac{1}{2}$	0	π	$-\frac{3}{4}$	$0.292292229\dots$	-10	$\frac{6}{2}$
طبیعی \mathbb{N}	x	x	x	x	x	x	x	✓
حسابی \mathbb{W}	x	x	✓	x	x	x	x	✓
صحیح \mathbb{Z}	x	x	✓	x	x	x	✓	✓
گویا \mathbb{Q}	x	✓	✓	x	✓	x	✓	✓
گنگ \mathbb{Q}'	✓	x	x	✓	x	✓	x	x
حقیقی \mathbb{R}	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

۲- در هر یک از حالت‌های الف و ب تفاوت دو مجموعه را با ذکر دلیل بنویسید: $\frac{27}{11}$ صحیح

الف) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1/5 < x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1/5 < x < 5\}$

math-home.ir مولف: {4,5,6,7,8} $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 9\}$

۲- طرف دوم تساوی‌های زیر را کامل کنید:

۱) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$ ۳) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'$

۴- عدد $1 + \sqrt{5}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟ $\frac{27}{11}$ صحیح ۴, ۳

۵- بین هر دو عدد، چهار عدد گنگ بنویسید:

۵ و -۲ (الف) ۶ و ۷ (ب) $\sqrt{3}, 6$ (ج) $\sqrt{2}, \sqrt{4/1}$ (د)

۶- عبارات درست را با \checkmark و عبارات نادرست را با \times مشخص کنید. برای عبارات درست

مثال بزنید.

۱) عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد. تمام اعداد صحیح گویا هستند

۲) عددی وجود دارد که گویا و گنگ باشد. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$

۳) $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$ عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}, \sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$

۴) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ عددی وجود دارد که حقیقی و طبیعی باشد. تمام اعداد طبیعی، حقیقی می‌باشند

۷- در نمایش اعشاری عدد $\sqrt{10}$ و عدد $\frac{3}{11}$ چه تفاوتی هست؟

$\frac{3}{11} = 0.272727\dots$ و $\sqrt{10} = 3.16227766\dots$

در نمایش اعشاری $\frac{3}{11}$ دوره‌ی تناوب وجود دارد و ۲۷ تکرار می‌شود

ولی در نمایش اعشاری $\sqrt{10}$ دوره‌ی تناوب وجود ندارد

تجزیه (الف) مجموعه A شامل عددی اعداد بین ۱، ۵ و ۵ است (اعداد گویا و گنگ) ولی مجموعی

۲ فقط شامل اعداد گویای بین این دو عدد می‌باشد

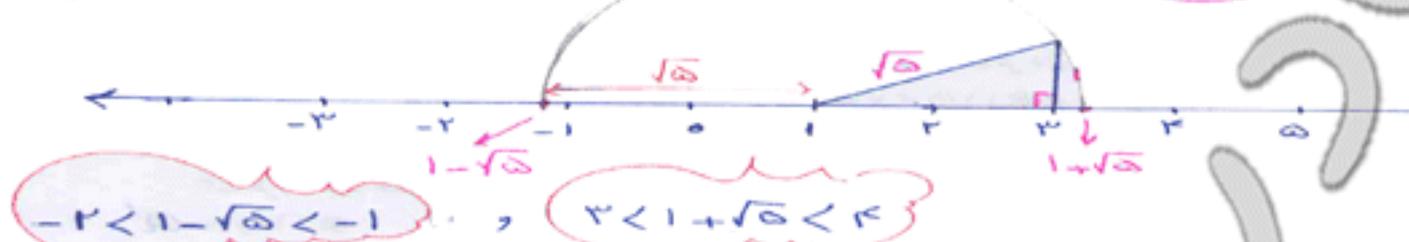
ب) مجموعه D شامل تمام اعداد گویا و گنگ بین ۳ و ۹ می‌باشد ولی مجموعی C فقط شامل

اعداد طبیعی بین ۳ و ۹ می‌باشد

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \\ \mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N} \end{cases}$, $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$

$2 < 5 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow 3 < 1 + \sqrt{5} < 4$



الف) $-2 = -\sqrt{4} < -\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3} < \sqrt{25} = 5$

ب) $4 = \sqrt{16} < \sqrt{17}, \sqrt{18}, \sqrt{19}, \sqrt{20}, \dots, \sqrt{48} < \sqrt{49} = 7$

ج) $\sqrt{2} < \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12} < \sqrt{36} = 6$

د) $\sqrt{2} < \sqrt{21}, \sqrt{22}, \sqrt{23}, \sqrt{24} < \sqrt{25} = 5$

۷ نکته‌ی مهم

اعداد اعشاری هر عدد گویا یکی از دو حالت زیر می‌باشد
 ۱- عدد اعشاری حقیقی (مختوم) ۲- عدد اعشاری متناوب (ساد و مرکب)

۱- با توجه به شکل به سوالات زیر پاسخ دهید:

نقاط A و B چه عددی را نمایش می‌دهند؟



فاصله نقطه A از O یا طول پاره خط OA چقدر است؟ $OA = 3$

فاصله نقطه B از O یا طول پاره خط OB چقدر است؟ $OB = 3$

می‌خواهیم نقاطی را روی محور بیابیم که فاصله آن از O برابر 2 باشد.

۲- نقطه C را روی محور نمایش دهید به طوری که طول OC برابر 2 باشد. **موانع:** math-home.ir

یافت؟ دو نقطه

کار در کلاس

۱- جملات سمت راست را به عبارات مناسب در سمت چپ وصل کنید:

- الف) دو عدد a و b مثبت است. $a > 0, b < 0$
- ب) عدد a نامنفی است. $a > 0, b > 0$
- ج) دو عدد a و b منفی است. $a \geq 0$
- د) عدد a مثبت و عدد b منفی است. $a < 0, b < 0$
- ه) عدد a نامثبت است. $a \leq 0$

۲- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب

را بهم وصل کنید:

- الف) $a > 0, b > 0$
- ب) $a < 0, b < 0$
- ج) $a < 0, b > 0$
- ۱) $ab < 0$
- ۲) $ab > 0, a + b > 0$
- ۳) $ab > 0, a + b < 0$

۳- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب

را بهم وصل کنید:

- الف) $a > 0$
- ب) $a > 0, b > 0$
- ج) $a < 0$
- د) $a < 0, b < 0$
- ۱) $|a| = -a$
- ۲) $|a| = a$
- ۳) $|a + b| = a + b$
- ۴) $|a + b| = -(a + b)$

۴- عبارات زیر را به زبان ریاضی بنویسید و برای هر کدام مثال بنویسید:

- ۱) قدر مطلق حاصلضرب دو عدد، مساوی با حاصلضرب قدر مطلق آنهاست.
- ۲) قدر مطلق مجموع دو عدد، از مجموع قدر مطلق‌های آن دو عدد، کوچک‌تر یا مساوی است.

۱) $|ab| = |a||b|$

$|(-2) \times (-5)| = |-2| \times |-5|$, $|(-3) \times 4| = |-3| \times |4|$

$\Rightarrow |10| = 2 \times 5$

$\Rightarrow |-12| = 3 \times 4$

$10 = 10$ ✓

$12 = 12$ ✓

کار در کلاس

مقدار تقریبی عددهای زیر تا یک رقم اعشار نوشته شده است :

$$\sqrt{2} = 1/4 \quad \sqrt{3} = 1/7 \quad \sqrt{5} = 2/2 \quad \sqrt{6} = 2/4 \quad \sqrt{7} = 2/6 \quad \sqrt{8} = 2/8$$

با توجه به مقادیر تقریبی صفحه قبل، تساوی‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید و دلیل خود را توضیح دهید :

$$|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$$

دلیل : $\sqrt{2} = 1/4$ پس $1 - \sqrt{2}$ عددی منفی می‌شود :

math-home.ir : مؤلف

دلیل : $\sqrt{3} \approx 1/7$ پس $2 - \sqrt{3}$ مثبت می‌شود

$$1) |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$$

دلیل : چون $\sqrt{7} < \sqrt{8}$ است $|\sqrt{7} - \sqrt{8}| = -(\sqrt{7} - \sqrt{8}) = \sqrt{8} - \sqrt{7}$

$$2) |\sqrt{7} - \sqrt{8}| = -(\sqrt{7} - \sqrt{8}) = \sqrt{8} - \sqrt{7}$$

دلیل : $2\sqrt{5} - \sqrt{5} = |\sqrt{5}| = \sqrt{5}$

دلیل : $-4 - \sqrt{3} < 0$ پس $|-4 - \sqrt{3}| = -(-4 - \sqrt{3}) = 4 + \sqrt{3}$

هر دو عدد -4 و $-\sqrt{3}$ منفی است پس $-4 - \sqrt{3} < 0$ است

مثال : اگر $a = \frac{1}{4}$ و $b = \sqrt{2}$ و $c = -3$ باشد، حاصل عبارت $|a+b+c|$ را به دست می‌آوریم :

$$|a+b+c| = \left| \frac{1}{4} + \sqrt{2} + (-3) \right| = \left| -\frac{2}{5} + \sqrt{2} \right|$$

چون $-\frac{2}{5} + \sqrt{2}$ عددی منفی است ($\sqrt{2} = 1/4$)، پس حاصل عبارت مساوی با

$$-(-\frac{2}{5} + \sqrt{2}) = \frac{2}{5} - \sqrt{2} \text{ است.}$$

$$|3 - \sqrt{5}| + | -2 - \sqrt{5} | = (3 - \sqrt{5}) - (-2 - \sqrt{5})$$

مثبت منفی

$$= 3 - \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} = 5$$

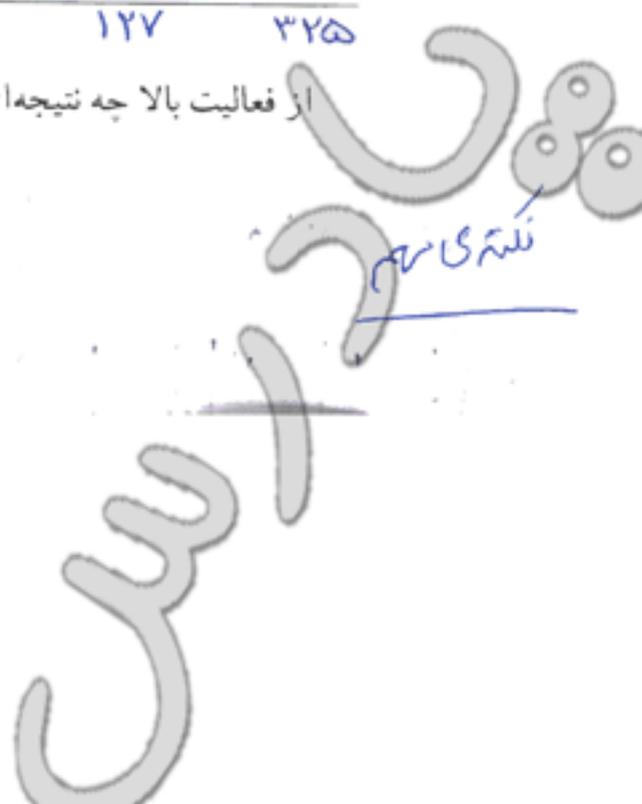
جدول زیر را کامل کنید :

$\sqrt{a^2}$	$\sqrt{(-3)^2}$	$\sqrt{3^2}$	$\sqrt{6^2}$	$\sqrt{(-6)^2}$	$\sqrt{(-7)^2}$	$\sqrt{(-127)^2}$	$\sqrt{325^2}$
حاصل	3	3	6	6	7	127	325

از فعالیت بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ حاصل $\sqrt{a^2}$ همیشه مثبت و برابر $|a|$ می‌باشد

$$0 < a < 1 \Rightarrow a < a^2 < a^3 < a^4 < \dots < a^n$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow a^5 < a^4 < a^3$$



۱- اگر $a=0/25$, $b=-\frac{1}{4}$, $c=2\frac{1}{4}$ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید:
 $|a+b| + 2|a-b-c|$

۲- عبارات زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید:

(الف) $|-3\sqrt{5}|$ (ب) $|7-5\sqrt{3}|$ (ج) $|0+\sqrt{5}|$

۳- جای خالی را با عدد مناسب پر، و جواب هایتان را در کلاس با سایر دوستانتان مقایسه کنید:

math-home.ir $\square + \square$ **مؤلف:**

۴- مقدار عددی عبارت $|a|+a$ را به ازای $a=-2$ ، $a=0$ و $a=2$ به دست آورید. آیا می توانید

عدد حقیقی به جای a قرار دهید که حاصل $|a|+a$ منفی باشد؟ **خیر**

۵- با ارائه یک مثال، نادرست بودن تساوی $\sqrt{a^2} = a$ را نشان دهید.

۶- حاصل عبارات روبه رو را به دست آورید: $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$ $\sqrt{(1-\sqrt{10})^2}$

تمرین ۱
 $|a+b| + 2|a-b-c| = |0.25 + (-\frac{1}{4})| + 2|0.25 - (-\frac{1}{4}) - 2\frac{1}{4}|$
 $= |\frac{1}{4} - \frac{1}{4}| + 2|\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 2\frac{1}{4}| = 0 + 2|\frac{1}{4} - \frac{5}{4}| = 2|-1| = 2 \times 2 = 4$

۲
 $|-3\sqrt{5}| = -(-3\sqrt{5}) = 3\sqrt{5}$ ، $|7-5\sqrt{3}| = |\sqrt{49} - \sqrt{20 \times 3}|$
 $= |\sqrt{49} - \sqrt{75}| = -(\sqrt{49} - \sqrt{75}) = \sqrt{75} - \sqrt{49} = 5\sqrt{3} - 7$ **منفی**
 $\sqrt{75} = \sqrt{49 \times 3} = 7\sqrt{3}$ ، $5\sqrt{3} = \sqrt{20 \times 3} = \sqrt{75} \Rightarrow 7 < 5\sqrt{3} \Rightarrow |7-5\sqrt{3}| = 5\sqrt{3} - 7$

ج) $|0+\sqrt{5}| = |\sqrt{5}| = \sqrt{5}$

۳
 $|5-12| > 1 + \square$ پس \square هر عددی که ترازی 4 می تواند باشد $\Rightarrow \square > 4$
 $\Rightarrow 5 > 1 + \square$

۴

a	-r	0	r
$ a +a$	$r+(-r)=0$	0	$r+r=2r$

 $a < 0 \Rightarrow |a|+a = -a+a = 0 \Rightarrow |a|+a \geq 0$
 $a \geq 0 \Rightarrow |a|+a = a+a = 2a$

۵
 $\sqrt{a^2} = a \xrightarrow{a=7} \sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7 \Rightarrow \sqrt{a^2} \neq a$
 $\sqrt{(-7)^2} = -7$

۶
 $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$ زیرا $1 < \sqrt{2}$ پس $\sqrt{2}-1 > 0$
 $\sqrt{(1-\sqrt{10})^2} = -|1-\sqrt{10}| = -1+\sqrt{10} = \sqrt{10}-1$ زیرا $1 < \sqrt{10}$ پس $1-\sqrt{10} < 0$

فصل سوم

متن های زیر را بخوانید و به سؤال ها پاسخ دهید :

۱- امیر و محسن برای دیدن مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت : «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقه من امروز هم می بازند.» امیر پرسید : «چگونه با این اطمینان حرف می زنی؟» محسن دلیل آورد که : «چون هر بار که به ورزشگاه رفته ام، تیم مورد علاقه من باخته است.»

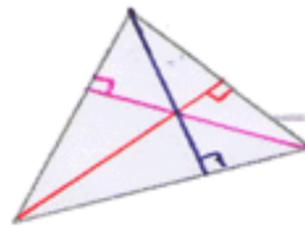
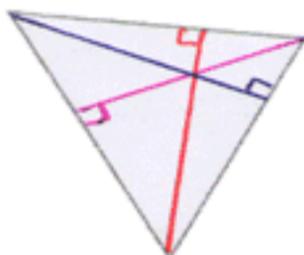
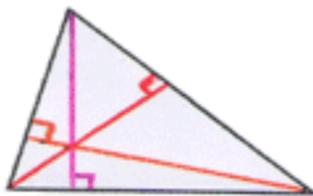
آیا دلیلی که محسن آورده است، درست است؟ چرا؟ **خیر، زیرا رفتن محسن به ورزشگاه نمی تواند علت باشد**
۲- عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتیمتر دارد. بیسکویت باقر از همان نوع، به همان ضخامت و مربع شکل به ضلع ۶ سانتیمتر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است.

$$\frac{32}{1}$$

۳- دلیلی که محسن در فعالیت ۱ برای ادعای خود آورده است را با دلیلی **مؤلف: math-home.ir** آوردید مقایسه کنید. به نظر شما کدام قابل اطمینان تر است. **دلیل ما قابل اطمینان تر است**

کار در کلاس

- مواردی را بازگو کنید که مانند فعالیت ۱ فردی با توجه به رویدادهای گذشته، نتیجه ای می گیرد که درست نیست. هر وقت **تکالیف را نمی نویسیم**، معلم **تکالیف را می بیند**
- دو ارتفاع از هر یک از مثلث های زیر، رسم کنید :



۱- رفتن محسن به ورزشگاه نمی تواند علت باخت تیم مورد علاقه ای او باشد و بود یک تیم به عوامل متعددی بستگی دارد که مهم ترین آن ها روحیه و آمادگی بازیکنان تیم و ضعف تیم مقابل می تواند باشد

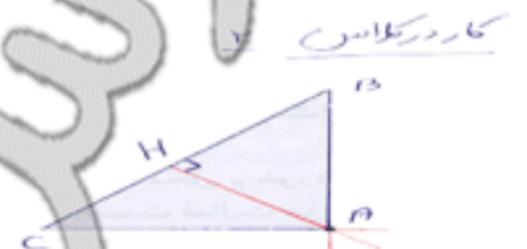
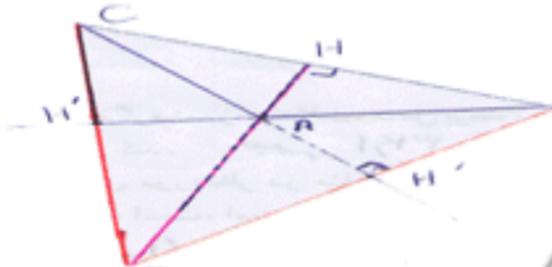
۲- با توجه به ضخامت یکسان بیسکویت ها، مقدار بیسکویت فردی بیش تر است که مساحت بیش تری داشته باشد
 $4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$ باقر
 $8 \times 4 = 32 \text{ cm}^2$ عباس
 $32 > 16$

بنابراین مقدار بیسکویت باقر بیش تر است

۳ در فعالیت اول محسن بر اساس نتایج عقل، نتیجه گیری کرد ولی مادر فعالیت دوم بر اساس یافته های که درستی آن ها از قبل اثبات شده است نتیجه گیری کردیم

- کار در کلاس ۱ (الف) هر وقت درسم را نمی خوانم معلم از من امتحان می گیرد
- (ب) هر وقت دیر به مدرسه می روم مدیر من را می بیند
- (ج) وقتی چتر ندارم، باران می بارد
- (د) اگر هوا صافیم را تمیز کنیم حتما فردا باران می بارد
- (ه) ما که شانس نداریم تا سرمان را بلند کنیم اما متوجه می شویم (یعنی تو نمی تقلب کنیم)

۲ **نتیجه گیری نادرست** : چون ارتفاع ها درون سه مثلث هم دگر را درون مثلث قطع کردند لذا نتیجه می گیریم در هر مثلث سه ارتفاع یکدیگر را درون مثلث قطع می کنند



نتیجه: اگر هر سه زاویه یک مثلث تند (حاد) باشد آنگاه ارتفاع ها داخل مثلث می کشند (یعنی از هر سه زاویه می قطع می کنند). اگر یک زاویه قائمه باشد محل برخورد ارتفاع ها رأس زاویه قائمگی مثلث است و اگر یکی از زاویه ها باز باشد آن گاه محل برخورد ارتفاع ها خارج مثلث است

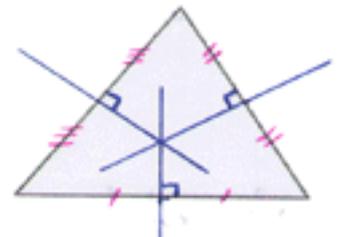
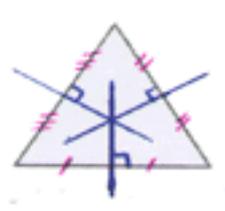
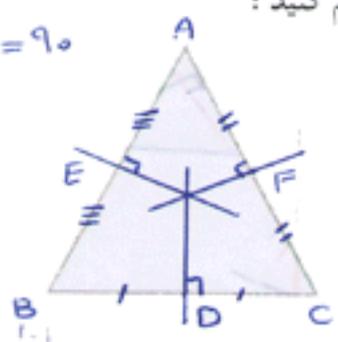
۱- در شکل های زیر عمود منصف های سه ضلع مثلث ها را رسم کنید :

$\hat{E} = \hat{D} = \hat{F} = 90^\circ$

$AE = BE$

$AF = CF$

$BD = CD$



آیا فقط با توجه به این شکل ها، می توان نتیجه گرفت که محل برخورد عمود منصف های هر مثلث

همیشه درون مثلث قرار دارد؟ چگونه می توانید درستی ادعای خود را نشان دهید؟ **خبر صبح ۳۵/۱**

۲- نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه برداری بودند. وزنه برداری قصد بلند کردن وزنه ای

۱۰۰ کیلویی را داشت. آنها هر دو عقیده داشتند که او نمی تواند وزنه را بلند کند؛ برای ادعای خود

استدلال های متفاوتی می کردند.

نیما: زیرا هفته پیش این وزنه بردار تمرینات بهتری انجام داده بود با این حال نتوانست وزنه

۹۰ کیلویی را بلند کند.

پژمان: امروز دوشنبه است. من بارها مسابقات این وزنه بردار را دیده ام. او هیچ گاه در روزهای

زوج موفق نبوده است.

استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟ در مورد استدلال ها بحث کنید. **استدلال نیما صبح ۳۵/۱**

۳- چون من تا به حال هیچ وقت تصادف نکرده ام در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد.

این استدلال مشابه کدام یک از استدلال های زیر است؟ استدلال "ج"

الف) چون برخی مثلث ها قائم الزاویه هستند پس مثلث های متساوی الاضلاع هم قائم الزاویه اند.

ب) همه فیلم های جنگی که تاکنون دیده ام، جذاب بوده اند. فیلمی که دیروز دیدم جذاب بود.

کاردرکلاس ۱- وقتی به ریل قطار نگاه می کنیم، احساس می کنیم ریل ها هم دیگر را قطع می کنند

۲- اگر حمام خود را داخل آب یک لیوان فرو ببرید، آن را کوتاه تر می بینید

۳- سه ظرف محتوی آب سرد، آب گرم و آب ولرم داریم. اگر هم زمان دست راست خود را در آب سرد

و دست چپ خود را در آب گرم فرو برده پس از مدتی هم زمان هر دو دست را درون آب ولرم فرو

ببریم، دست راست آب ولرم را گرم تر دست چپ آب ولرم را سرد احساس می کند

۴- چای داغ چندان تلخ احساس نمی شود ولی اگر همان چای سرد شود تلخ تر احساس می شود

نتیجه: همان طور که مشاهده می کنیم عمود منصف ها ممکن است بیرون مثلث یکدیگر را قطع کنند



تمرین ۱

۱- اگر هر سه زاویه های یک مثلث خارجا باشد عمود منصف ها بیرون مثلث هم دیگر را قطع می کنند

۲- اگر یکی از زاویه های مثلث ۹۰ درجه باشد (مثلث قائم الزاویه) آن گاه عمود منصف ها یکی و در مثلث یکدیگر را قطع می کنند

۳- اگر یکی از زاویه های مثلث بیش تر از ۹۰ درجه باشد آن گاه عمود منصف ها بیرون مثلث یکدیگر را قطع می کنند

۲ استدلال هیچ کدام قابل دقیق نیست، ولی استدلال نیما منطقی تر است زیرا وقتی یک نفر با

تمرینات بهتری مواجه شده است وزنه ۹۰ کیلویی را بلند کند، پس با احتمال زیادی وزنه ۱۰۰ کیلویی را هم می تواند بالا ببرد. استدلال پژمان، دلیل منطقی ندارد

۳- مشابه استدلال "ج" است. زیرا هر دو بر اساس یافته های قبلی، آینده را پیش بینی می کنند تصادف نکردن یک فرد می تواند دلیلی محکم برای اتفاقات در سفر آئینده باشد. همچنین دفتر بودن بچه های قبلی نمی تواند دلیل محکم و قوی برای دختر یا پسر بودن فرزند خاندی کوچک باشد



مؤلف: math-home.ir

۱- به گفت و گوی زیر توجه کنید :

مهرداد : آیا در هر لوزی زاویه های روبه رو با هم برابر است؟
 سعید : بله، من در یک کتاب هندسه دیدم که اثبات کرده بود در متوازی الاضلاع زاویه های روبه رو، با هم مساوی است و لوزی هم نوعی متوازی الاضلاع است.

در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را در زیر کامل کنید :

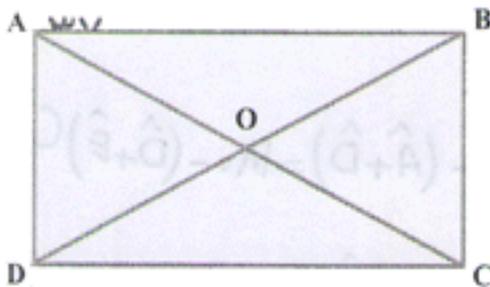
فرض : شکل لوزی است.

حکم : زاویه های روبه رو برابر است.

استدلال :

$\left. \begin{array}{l} \text{لوزی نوعی متوازی الاضلاع است.} \\ \text{در متوازی الاضلاع زاویه های روبه رو برابر است.} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{در لوزی زاویه های روبه رو با هم برابر است.}$

۲- اولین اقدامی که برای اثبات انجام می دهیم، تشخیص فرض، حکم و واقعیت های مرتبط با آن مسئله است که از قبل آنها را می دانستیم. در مسئله زیر فرض، واقعیت های آر تبیل ثابت شده، یا دانسته و حکم را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت ها را کامل کنید :



فرض : ABCD مستطیل است.

حکم : قطرهای مستطیل، مساوی است.

فرض : $\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \\ AB = DC, \quad AD = BC \\ AB \parallel DC, \quad AD \parallel BC \end{array} \right.$

حکم : $AC = BD$

$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ \\ \text{فرض } AD = BC \\ DC = DC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(صن و فرض)}} \triangle ADC \cong \triangle BCD \Rightarrow AC = BD$

فعالیت

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید :

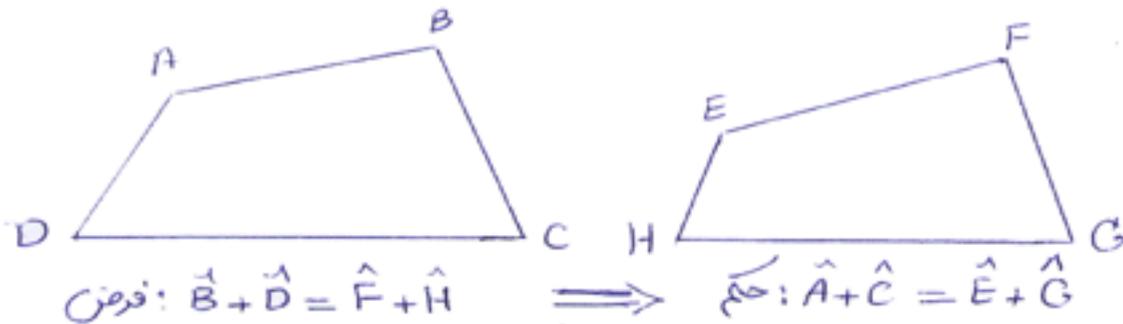
- ۱- در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده است. ثابت کنید زاویه‌های سوم از دو مثلث نیز با هم برابر است.



فرض : $\hat{A} = \hat{D}$
 $\hat{B} = \hat{E}$
 مولفان: math-home.ir

حکم : $\hat{C} = \hat{F}$

- ۲- اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر. حکم : $c > AB \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$ فرض
- ۳- اگر مجموع دو زاویه از چهارضلعی ABCD با مجموع دو زاویه از چهارضلعی EFGH برابر باشد، ثابت کنید مجموع دو زاویه دیگر ABCD با مجموع دو زاویه دیگر EFGH برابر است.

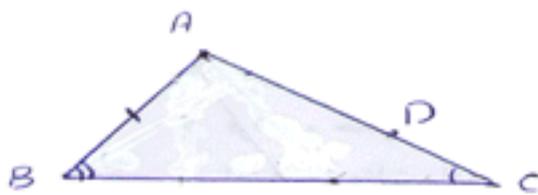


۳۸

کار در کلاس $\hat{A} = \hat{D}$ فرض $\hat{B} = \hat{E}$ فرض $\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = \hat{D} + \hat{E} \Rightarrow 180 - (\hat{A} + \hat{D}) = 180 - (\hat{E} + \hat{B})$

مردانیم مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر ۱۸۰ درجه است

$\Rightarrow 180 - (\hat{A} + \hat{D}) = 180 - (\hat{E} + \hat{B}) \Rightarrow \hat{C} = \hat{F}$



$AC > AB \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$
 فرض حکم

روی ضلع بزرگ‌تر یعنی AC به اندازه‌ی AB جدا می‌کنیم

$\Rightarrow AB = AD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$
 $\hat{D}_1 = \hat{B}_2 + \hat{C}$ در مثلث BDC داریم $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2 + \hat{C}$

$\Rightarrow \hat{B}_1 > \hat{C}$
 $\hat{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$

عکس قضیه‌ی بالا $\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow AC > AB$

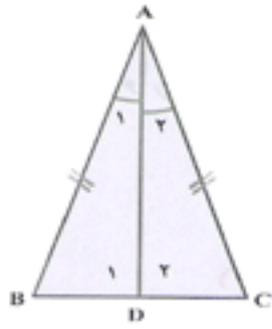
برهان خلف اگر $AB = AC$ باشد آن‌گاه داریم $\hat{B} = \hat{C}$

اگر $AB > AC$ آن‌گاه ضلع بزرگ‌تر یعنی $AB > AC$ داریم $\hat{C} > \hat{B}$ بنابراین داریم $AC > AB$

فرض $\hat{B} + \hat{D} = \hat{F} + \hat{H}$
 مردانیم $\hat{B} + \hat{D} + \hat{A} + \hat{C} = 360$
 $\hat{F} + \hat{H} + \hat{E} + \hat{G} = 360$
 $\Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{E} + \hat{G}$

۳۹

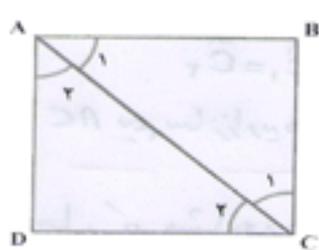
۱- در مسئله زیر فرض و حکم را بنویسید و اشکال استدلال داده شده را بیابید:



مثلث $\triangle ABC$ متساوی الساقین است و AD نیمساز زاویه A است.
 ثابت کنید AD میانه نیز هست:
 فرض: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $AB = AC$
 حکم: $BD = CD$
 استدلال: چون AD نیمساز زاویه A است، پس: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و

$\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ و ضلع AD در دو مثلث مشترک است، پس مثلث های ADB و ADC به حالت دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز) با هم همنهشتند، پس اجزای متناظر آنها برابر است. در نتیجه: $BD = DC$ صفر ۳۹/۱
 استدلال بالا را اصلاح کنید و نتیجه بگیرید در مثلث متساوی الساقین نیمساز وارد بر قاعده،

میانهم هست. آیا در مثلث ABC می توان نتیجه گرفت که نیمساز زاویه B نیز میانه متناظر آن است؟ به عبارتی، آیا می توان خاصیت اثبات شده برای نیمساز A را به نیمساز دیگر تعمیم داد. **مؤلف: math-home.ir**



۲- با استدلال زیر به سادگی می توان نتیجه گیری کرد که قطر AC از مربع $ABCD$ نیمساز زاویه های A و C است. چون دو مثلث ABC و ADC به حالت سه ضلع همنهشت است، زوایای متناظر با هم برابر است؛ بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و لذا AC نیمساز است. صفر ۳۹/۱

آیا می توان با استدلالی مشابه، این خاصیت را به قطر دیگر نیز تعمیم داد و گفت به طور کلی در مربع هر قطر نیمساز زاویه های دو سر آن قطر است؟ **بله**
 ۳- به نظر شما چرا در فعالیت ۱ خاصیت موردنظر قابل تعمیم به نیمسازهای دیگر نبود، اما در فعالیت ۲ خاصیت موردنظر به قطر دیگر تعمیم داده می شود؟

وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم، اگر تمام ویژگی هایی که در استدلال خود به کار برده ایم در سایر عضوهای آن مجموعه نیز باشد، می توان درستی نتیجه را به همه عضوهای آن مجموعه تعمیم داد.

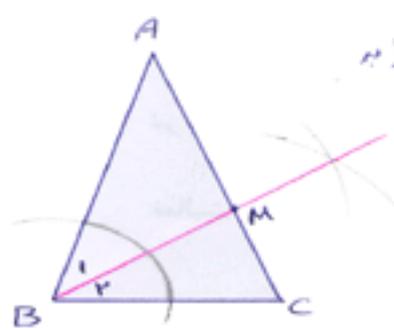
۳۹ با عوض شدن نیم ساز شرایط متفاوت بوجود می آید و نمی توان میانهم بودن را ثابت کردن ولی وقتی قطر عوض می شود شرایط تغییر نمی کند

فعالیت ۱) باره خط AD نیم ساز است پس می توانیم نتیجه بگیریم $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ولی نمی توانیم تساوی بین دو زاویه ی \hat{D}_1 و \hat{D}_2 را نتیجه بگیریم پس (این نتیجه گیری نادرست است) $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 \Rightarrow AD$ نیم ساز است
 AD نیم ساز $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$
 $\triangle ABC$ متساوی الساقین $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$
 $AD = AD$ ضلع مشترک
 $\Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ACD \Rightarrow BD = CD$
 پس نیم ساز وارد بر قاعده میانهم نیز می باشد
 روش دوم

$\triangle ABC$ متساوی الساقین $\Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$
 AD نیم ساز است $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$
 $\Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{A}_1 = \hat{C} + \hat{A}_2$
 $\Rightarrow 180 - (\hat{B}_1 + \hat{A}_1) = 180 - (\hat{C} + \hat{A}_2) \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2$
 $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$
 $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$
 $AD = AD$
 $\Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ACD \Rightarrow BD = CD$

۴- این خاصیت قابل تعمیم به تقسیم زاویه ها نمی باشد

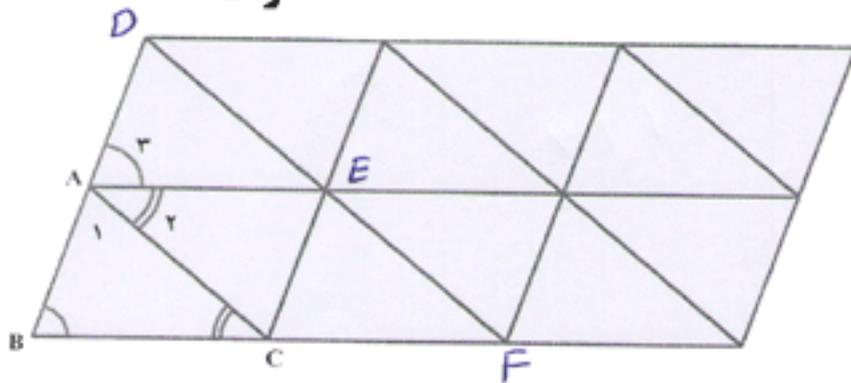
$AB = AD$ خاصیت مربع
 $CB = CD$
 $AC = AC$ ضلع مشترک
 $\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$
 $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$
 پس AC نیم ساز زاویه های A و C می باشد



همان طور که مشاهده می کنیم نیم ساز زاویه ی B ضلع AC را به دو قسمت مساوی تقسیم نمی کند پس میانهم نمی باشد

به استدلال‌هایی دقت کنید که چهار دانش‌آموز برای مسئله زیر آورده‌اند :
مسئله : مجموع زاویه‌های داخلی مثلث 180° است.

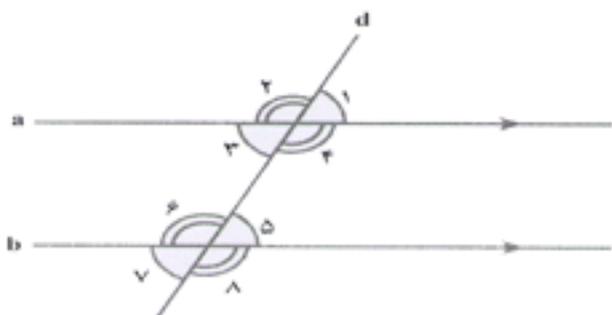
استدلال حامد : حامد گفت یک مثلث متساوی‌الاضلاع را در نظر می‌گیریم؛ چون سه زاویه دارد و هر زاویه 60° است، مجموع زاویه‌های مثلث 180° است. **نادرست است**، زیرا یک مثلث خاص در نظر گرفته شده است
استدلال حسین : حسین چند مثلث مختلف با حالت‌های گوناگون کشید و زوایای آنها را شمرده است
اندازه گرفت و دید که در همه آنها مجموع زوایای داخلی برابر 180° است و نتیجه گرفت که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است. **با بررسی مجموع زاویه‌ها در چند مثلث می‌توان آن تعمیم داد چنان‌که نادرست است**
استدلال مهدی : مهدی شکل زیر، که از مثلث‌های هم‌نهشت تشکیل شده است را کشید و نوشت **مؤلف: math-home.ir**



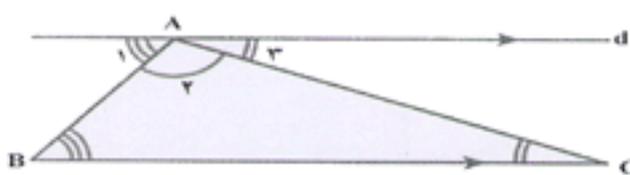
با مشخص کردن زاویه‌های مثلث ABC به صورت مقابل، استدلالی با استفاده از شکل به صورت زیر آورد :

این استدلال نیز نادرست است، زیرا در مورد این که نقاط D, B, A در یک امتداد (در یک راستا) می‌باشند صحبتی نشده است همچنین نقاط (B, C, F) سؤال : آیا پاره‌ها AB, AD در یک راستا می‌باشند؟

$$\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_2 = 180^\circ$$



استدلال رضا : رضا گفت می‌دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند با آنها هشت زاویه می‌سازد که مانند شکل چهار به چهار با هم مساوی است.»



حال مثلثی دلخواه مانند ABC را در نظر می‌گیریم؛ مانند شکل مقابل از رأس A خط d را موازی BC رسم می‌کنیم. سه زاویه تشکیل شده در رأس A را با

شماره‌های ۱، ۲ و ۳ نشان داده‌ایم که زاویه A_2 همان زاویه A در مثلث است و با در نظر گرفتن AB به عنوان مورب داریم $\hat{B} = \hat{A}_1$ و با در نظر گرفتن AC به عنوان مورب داریم $\hat{C} = \hat{A}_3$ پس با جای گذاری \hat{A}_3 و \hat{A}_1 به ترتیب به جای \hat{C} و \hat{B} خواهیم داشت : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$
استدلال رضا را می‌توان با استفاده از نمادهای ریاضی به صورت مرتب و خلاصه بدین صورت نوشت :

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب } AB \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب } AC \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_3$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

درباره معتبر بودن استدلال‌های این دانش‌آموزان بحث کنید. استدلال رضا کاملاً درست است

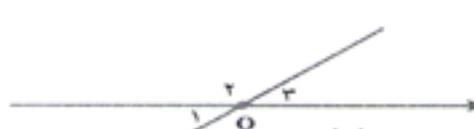
و من گوانیم آن را برای بقیه مثلث‌ها نیز تعمیم دهیم

مسئله: حمید، سعید و بهرام هر کدام مقداری پول دارند. مجموع پول های حمید و بهرام برابر ۵۰۰۰ تومان و مجموع پول های سعید و بهرام نیز برابر ۵۰۰۰ تومان است. به نظر شما پول حمید بیشتر است یا پول سعید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

$$\left. \begin{array}{l} \text{پول بهرام} + \text{پول سعید} = \text{پول بهرام} + \text{پول حمید} \\ \text{پول بهرام} + \text{پول سعید} = 5000 \\ \text{پول بهرام} + \text{پول حمید} = 5000 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{پول بهرام} = \text{پول حمید}$$

مؤلف: math-home.ir

بین استدلالی که برای مسئله قبل و مسئله بعدی هست، چه شباهتی می بینید؟
 مسئله: نشان دهید زاویه های متقابل به رأس با هم برابر است.
 فرض کنیم \hat{O}_1 و \hat{O}_2 مانند شکل زیر متقابل به رأس باشند، داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ \\ \hat{O}_2 + \hat{O}_2 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}_2 + \hat{O}_2 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

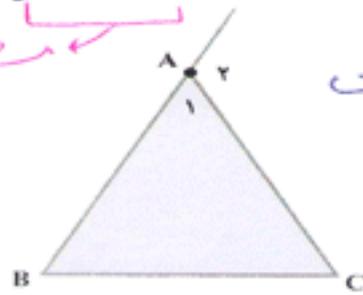
① دو مقدار مساوی با یک مقدار خودش نیز با هم مساوی می باشند

$$a = b \Rightarrow a = c$$

② وقتی در دو عبارت مساوی دو مقدار برابر داریم آن گاه دو مقدار دیگر نیز با هم مساوی می باشند

$$a + b = c + b \Rightarrow a = c$$

مسئله



۱- آیا اثبات مسئله زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید. **خیبر، معتبر نیست**، چون از حالت خاص استفاده شده است
 مسئله: در هر مثلث، اندازه زاویه خارجی با مجموع اندازه های دو زاویه داخلی غیر مجاور با آن برابر است.
 اثبات: مثلث متساوی الاضلاع ABC را در نظر می گیریم.
 می دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است و زوایای \hat{A}_1 و \hat{B} و \hat{C} هر کدام 60° است، بنابراین

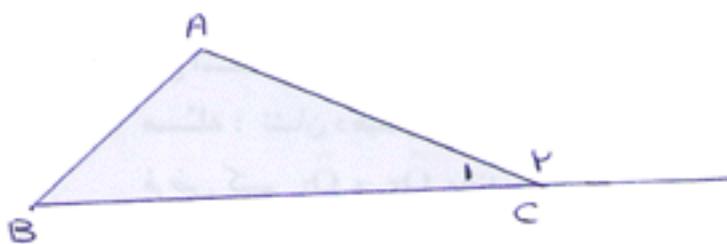
$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \rightarrow \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{A}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

صفحه ۴۲/۱

۲- در سال گذشته با تعریف چند ضلعی های محدب آشنا شدید. تعریف چندضلعی محدب را می توان بدین صورت هم آورد: «یک چندضلعی محدب است اگر هر پاره خطی که دو نقطه دلخواه درون آن چندضلعی را به هم وصل می کند، به طور کامل درون آن چند ضلعی قرار بگیرد.» چند ضلعی که محدب نباشد، مقعر است. آیا تشخیص های دو دانش آموز در مورد محدب و مقعر بودن چندضلعی های زیر و دلایلی که ارائه کرده اند با توجه به تعریف بالا درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

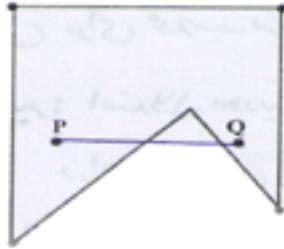
تمرین
 برای اثبات یک مسئله باید آن را در یک شکل دلخواه انجام دهیم و اثبات در یک شکل خاص مورد قبول نمی باشد



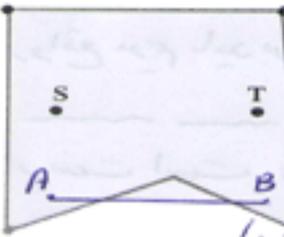
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_1 = 180^\circ \\ \hat{C}_2 + \hat{C}_1 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_1 = \hat{C}_2 + \hat{C}_1 \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = \hat{C}_2$$

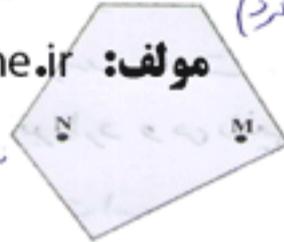
در اثبات های هندسی نباید از شکل خاص کمک بگیریم



ترگس: چند ضلعی مقابل محدب نیست، زیرا نقاط P و Q درون آن قرار دارد اما پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند به طور کامل در آن قرار نمی گیرد. کاملاً درست است و یک مثال ناقص برای محدب نبودن این چهار ضلعی است. چون تمام نقاط این پاره خط درون ۴ ضلعی نیست



مهدیه: چند ضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط S و T درون آن قرار دارد و پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند نیز به طور کامل در آن قرار دارد. نادرست است، زیرا این خاصیت را باید برای



همه دو نقطه‌ی دلخواه بررسی کرد برای مثال تمام نقاط پاره خط AB درون ۴ ضلعی نمی باشد (با یک مثال یا چند مثال می توان نتیجه گیری کرد) مریم: چند ضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط M و N درون آن قرار دارد و پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند نیز به طور کامل در آن قرار دارد. نادرست است، ۴ ضلعی محدب است ولی استدلال ۳- آیا استدلال های زیر درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

math-home.ir: مولف:

ناقص است

الف) هر مستطیل یک متوازی الاضلاع است. چهار ضلعی ABCD متوازی الاضلاع است.

پاسخ ۴۲/۱

ب) در هر مربع، ضلع ها با هم برابرند. ABCD مربع نیست.

پاسخ ۴۲/۱

ج) در هر مربع، ضلع ها با هم برابرند. در چهار ضلعی ABCD ضلع ها برابر نیستند.

پاسخ ۴۲/۱

۴- ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار دارد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. یادآوری: فاصله یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره خطی که از آن نقطه بر خط عمود می شود.

راهنمایی: یک زاویه دلخواه بکشید و نیمساز آن را رسم، و یک نقطه روی این نیمساز مشخص کنید. ثابت کنید فاصله این نقطه از دو ضلع زاویه با هم برابر است و سپس علت اینکه این نتیجه برای همه نقاط روی نیمساز درست است را بیان کنید.

۴۳

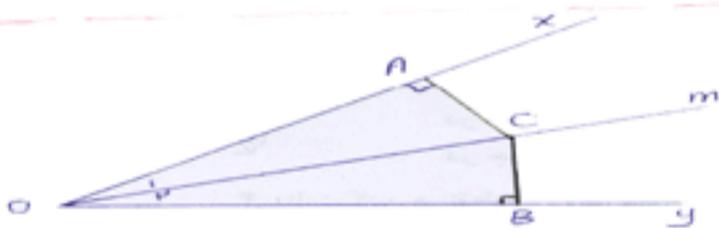
تصویر ترگس: برای اثبات محدب بودن باید ضمیمه هر دو نقطه دلخواه را بررسی کنیم ولی یک مثال ناقص برای محدب بودن کاملاً درست و در واقع ترگس پاره خط PQ را عنوان مثال ناقص برای محدب نبودن آورده است

مهدیه: استدلال مهدیه نادرست است. زیرا این خاصیت باید برای همه دو نقطه دلخواه بررسی شود در این شکل می توان پاره خطی رسم کرد که نادرستی استدلال را نشان دهد (مثال: AB) مریم: این ۴ ضلعی محدب است ولی استدلال مریم ناقص است (درست نیست) در واقع مریم باید برای همه دو نقطه دلخواه این خاصیت را بررسی کند

۳- نادرست است. زیرا هر متوازی الاضلاع لزوماً یک مستطیل نیست در صورتیکه هر مستطیل یک متوازی الاضلاع است

ب) نادرست است. زیرا این ۴ ضلعی می تواند لوزی باشد. لوزی چهار ضلعی است که ۴ ضلع برابر دارد و می دانیم یک لوزی لزوماً یک مربع نیست در صورتیکه تمام مربع ها لوزی می باشند

ج) درست است. مربع یک چهار ضلعی است که چهار ضلع مساوی و چهار زاویه ی مساوی دارد چون چهار ضلع این چهار ضلعی برابر نیست لذا می توان نتیجه گرفت ABCD مربع نمی باشد



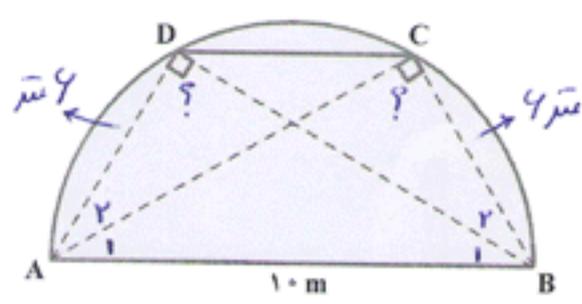
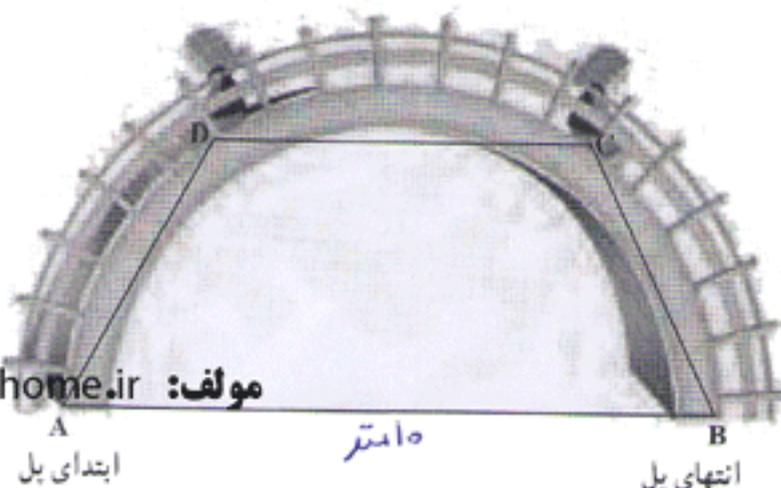
۴- زاویه دلخواه \hat{xOy} را در نظر می گیریم و شعاع ساز آن را رسم می کنیم. نقطه ی C را به دلخواه روی آن در نظر می گیریم و از نقطه ی C دو عمود بر اضلاع Ox و Oy را رسم می کنیم

چون نقطه ی C دلخواه است بنا بر این نتیجه می گیریم برای هر نقطه ی دلخواه روی نیم سازه این خاصیت برقرار است پس هر نقطه روی نیم سازه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است

۴۳/۱

در نزدیکی منزل ترانه و شهرزاد، پارکی هست که در آن یک پل فلزی به شکل نیم دایره هست که بچه ها برای بازی از پله های آن بالا می روند. می دانیم فاصله ابتدای پل (نقطه A) از انتهای آن (نقطه B) ۱۰ متر است. ترانه روی پله C نشسته است که از انتهای پل ۶ متر فاصله دارد (BC=۶) و شهرزاد روی پله D نشسته است که از ابتدای پل همین مقدار فاصله دارد. آنها حدس می زنند که باید فاصله شان از پایه های مقابل برابر باشد؛ یعنی $AC=BD$. درستی حدس آنها را به دو روش ثابت کنید.

math-home.ir مولف:



صغیر ۴۵/۱

۴۵

۱- نشان دهید زاویه های \hat{C} و \hat{D} در شکل، قائمه است. طول های AC و BD را به کمک

صغیر ۴۵/۱

قضیه فیثاغورس محاسبه کنید و نشان دهید: $AC=BD$

۲- به کمک همنهشتی مثلث های ACB و ADB، نشان دهید $AC=BD$. صغیر ۴۵/۱

فعالیت

$$\hat{C} = \hat{D} = \frac{180}{2} = 90^\circ \quad (1)$$

می دانیم زاویه های محاطی نصف کمان مقابل به آن می باشد بنابراین داریم

$$\hat{C} = 90^\circ \Rightarrow AC^2 = AB^2 - BC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{10^2 - 6^2} \Rightarrow AC = 8$$

$$\hat{D} = 90^\circ \Rightarrow BD^2 = AB^2 - AD^2 \Rightarrow BD = \sqrt{10^2 - 6^2} \Rightarrow BD = 8 \text{ cm}$$

روش دوم:

می دانیم کمان های نظیر وترهای مساوی با هم مساوی اند بنابراین داریم

$$(BC = AD = 4 \text{ cm}) \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD} \Rightarrow \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \quad (2)$$

$$(\hat{A}_1, \hat{B}_1 \text{ دوزاویه محاطی روی دو کمان های BC و AD است}) \quad \widehat{CAB} = \widehat{DBA}$$

از طرفی با توجه به قسمت اول (سؤال ۱) داریم $\hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$ بنابراین داریم

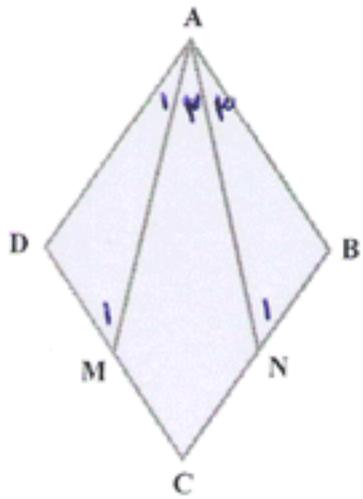
$$\left. \begin{array}{l} (1) \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \\ (2) \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \\ AB = AB = 10 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(وز)}} \widehat{ABC} \cong \widehat{ABD} \xrightarrow{\text{اجزاء متساوی}} AC = AD$$

math-home.ir **مؤلف:**

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض: } CD = BC \Rightarrow \frac{CD}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow DM = BN \\ \text{فرض (خواص لوزی): } \vec{D} = \vec{B} \\ \text{فرض: } AD = AB \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(من زین)}} \triangle ADM \cong \triangle ABN$$

سؤال ۲

فعالیت



در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه‌های M و N وسط‌های

اضلاع CD و CB هستند. می‌خواهیم نشان دهیم $\triangle ADM \cong \triangle ABN$

۱- با توجه به ویژگی‌های لوزی، تساوی‌های زیر را کامل کنید:

$$\text{فرض} \begin{cases} AD = AB = CD = BC, & BN = \frac{BC}{2} \\ \hat{A} = \hat{C}, \hat{B} = \hat{D}, & DM = \frac{CD}{2} \end{cases}$$

حکم: $\triangle ADM \cong \triangle ABN$

۲- با توجه به نتیجه قسمت (۱) و تساوی‌های قسمت اول ثابت کنید مثلث‌های ADM و ABN

همنهشت‌اند.

همنهشت‌اند.

۳- حال با توجه به همنهشتی دو مثلث ADM و ABN، اجزای متناظر آنها را بنویسید.

$$\triangle ADM \cong \triangle ABN \Rightarrow \begin{cases} AM = AN \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ و } \hat{DAM} = \hat{BAN} \\ \hat{M}_1 = \hat{N}_1 \text{ و } \hat{AMD} = \hat{ANB} \end{cases}$$

درسی



می‌خواهیم ثابت کنیم که در هر متوازی‌الاضلاع مانند شکل روبه‌رو، ضلع‌های مقابل، همواره با هم برابر است. مفروضات و داده‌های مسئله چیست؟ تمام آنها را بنویسید؛ حکم مسئله چیست؟ برای حل این مسئله در ادامه، نظر چند دانش‌آموز را ببینید و با توجه به سؤال‌ها پاسخ دهید.

فرض $\left\{ \begin{array}{l} AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{array} \right.$

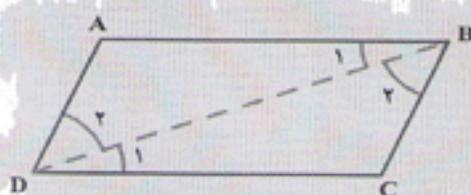
حکم $\left\{ \begin{array}{l} AB = DC \\ AD = BC \end{array} \right.$

math-home.ir مؤلف:

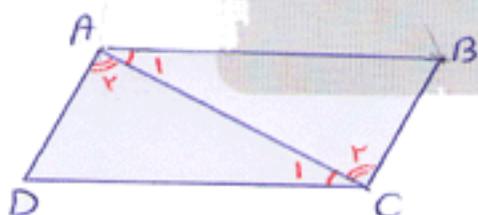
نیشم: در تعریف متوازی‌الاضلاع، برابری ضلع‌های روبه‌رو را می‌دانستیم. علاوه بر آن با اندازه‌گیری هم می‌توانیم این موضوع را نشان دهیم.

شهرزاد: معلوم است که ضلع‌های روبه‌رو با هم مساوی است، با چشم هم می‌توان دید!

- آیا می‌توانیم در حل مسائل هندسه فقط به چشم‌هایمان اعتماد کنیم؟ چرا؟ **خیر، زیرا خطا داریم**
- به تعریف متوازی‌الاضلاع در کتاب سال گذشته مراجعه کنید. آیا برابری اضلاع مقابل در این تعریف وجود داشت؟ آیا اگر با اندازه‌گیری اضلاع مقابل، برابری آنها را ببینیم، درستی حکم را ثابت کرده‌ایم؟ چرا؟ **خیر، زیرا اندازه‌گیری همواره ناخطا دارد (خطای انسانی، خطای ابزار)**



ترانه: به نظر من باید دو مثلث هم‌نهشت بیابیم و با اثبات هم‌نهشتی آنها به برابری اضلاع مقابل در متوازی‌الاضلاع برسیم، اما در شکل دو مثلث نداریم، پس با اضافه کردن یک خط، یعنی یکی از قطر‌ها، دو مثلث ایجاد می‌کنیم.



اثبات را به صورت زیر کامل کنید:

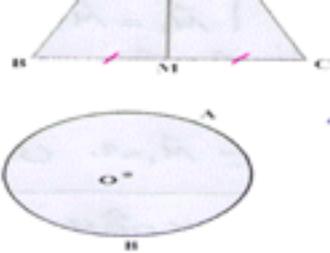
$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD, \text{ مورب } BD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ AD \parallel BC \text{ و مورب } BD \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \\ BD = BD \text{ (ضلع مشترک)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle CBD \text{ (ز ض ز)} \xrightarrow{\text{اجزاء متساوی}} \left\{ \begin{array}{l} AB = CD \\ \hat{A} = \hat{C} \\ AD = BC \end{array} \right.$$

با توجه به هم‌نهشتی دو مثلث ABD و CBD، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\triangle ABD \cong \triangle CBD \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AD = BC \\ AB = DC \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{خودشود دیدیم که } \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \text{ بنابراین داریم:} \\ \text{و } \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \text{ بنابراین داریم:} \end{array}$$

- چرا برای اثبات هم‌نهشتی مثلث‌های ایجاد شده، نمی‌توانیم از حالت‌های (ض ز ض) و (ض ض ض) استفاده کنیم؟ چون ما فقط یک ضلع برابر داریم **نیاز به دو ضلع برابر داریم**
- با توجه به مباحث درس قبل (هندسه و استدلال) بگویید آیا می‌توانستیم همین نتیجه را با رسم قطر AC به دست آوریم؟ **بله**

$$\left. \begin{array}{l} (AB \parallel CD, \text{ مورب } AC) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ (AD \parallel BC, \text{ مورب } AC) \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \\ AC = AC \text{ ضلع مشترک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \triangle ADC \cong \triangle CBA \xrightarrow{\text{اجزاء متساوی}} \left\{ \begin{array}{l} AD = BC \\ \hat{B} = \hat{D} \\ AB = CD \end{array} \right.$$



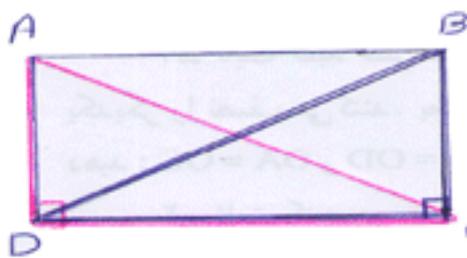
۴- از نقطه M خارج از دایره، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم کنید. آیا اندازه این دو مماس با هم برابر است؟ آری برابر است
 درستی ادعای خود را نشان دهید. (راهنمایی: از مرکز دایره به نقطه های A، M و B وصل کنید.)
 ۵- در شکل مقابل خط d از وسط پاره خط AB گذشته و از B و A از d به یک فاصله اند (AH=BH') ثابت کنید OH=OH'. در مورد درستی یا نادرستی استدلال زیر برای تساوی OH=OH' بحث کنید:

math-home.ir مولف:

۴۸ اثبات نادرست است، زیرا زاویه \hat{O} بین OA و AH ثابت و زاویه \hat{O} بین OH و OB نیست

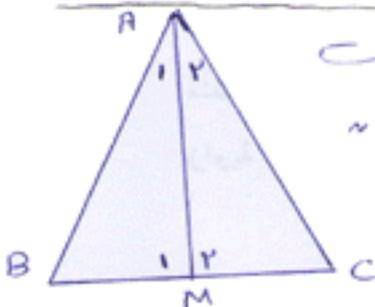
عبرین \perp
 $(AB \parallel CD, \text{ مورد } AC) \implies \hat{A}_1 = \hat{D}_1$
 $(AB \parallel CD, \text{ مورد } BD) \implies \hat{B}_1 = \hat{C}_1$
 $AB = DC$ (خواص قبلی متوازی الاضلاع)
 $\implies \triangle ADB \cong \triangle DCA \implies OA = OC$ وسط AC است
 $\implies \triangle AOB \cong \triangle DOC \implies OB = OD$ وسط BD است

نتیجه: بنابراین قطرهای یکدیگر را نصف می کنند



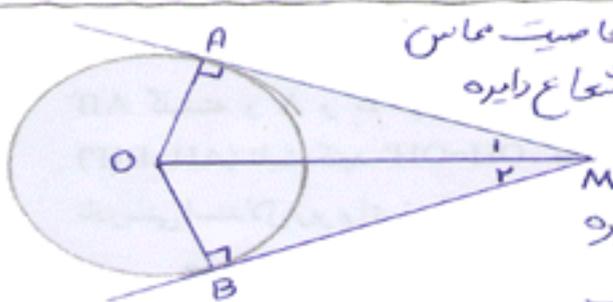
۲- چون مستطیل نوعی متوازی الاضلاع می باشد پس داریم

$AD = BC$ است
 فرض $AD = BC$
 $\hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$
 $DC = DC$ ضلع مشترک
 $\implies \triangle ADC \cong \triangle BCD$
 $\implies AC = BD$



۳- $ABC: AB = AC$ متساوی الساقین است
 $\hat{B} = \hat{C}$
 $AM: BM = CM$ میانه است
 $\implies \triangle ABM \cong \triangle ACM$
 $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (۱)
 $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (۲)

از تساوی $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ نتیجه می گیریم که AM نیم سازه زاویه A است
 $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^\circ$ ضوئ رابطی ۲
 $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$
 $\implies 2\hat{M}_1 = 180^\circ \implies \hat{M}_1 = 90^\circ$
 از تساوی $\hat{M}_1 = 90^\circ$ نتیجه می گیریم $AM \perp BC$



۴- $A = B = 90^\circ$ خاصیت مماس
 $OA = OB$ شعاع دایره
 $OM = OM$
 $\implies \triangle OAM \cong \triangle OBM$
 $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$
 $AM = BM$

از تساوی $AM = BM$ نتیجه می گیریم اگر از نقطه ای خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم طول دو مماس با هم برابر است

۵- $OA = OB$ از وسط AB گذرسته است
 $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ متقابل در رأس
 $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$
 $\implies \triangle AHO \cong \triangle BHO \implies OH = OH'$
 ۴۸/۱

صحنه ۱۰۵



فرض: $AB = CD$

۱- نشان دهید کمان های \widehat{AB} و \widehat{CD} مساوی است.

حکم: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

۲- در شکل مقابل کمان های \widehat{AB} و \widehat{CD} مساوی است. نشان

دهید وترهای AB و CD با هم برابرند.

حکم: $AB = CD$

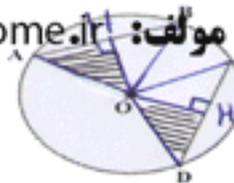
فرض $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آنها با هم برابرند و اگر دو وتر

برابر باشند، کمان های نظیر آنها نیز با هم برابرند.

مؤلف: math-home.ir

صحنه ۱۰۵



۳- از سال گذشته می دانید خطی که از مرکز دایره بر هر وتر عمود

شود، وتر را نصف می کند. با توجه به این موضوع، نشان دهید مرکز دایره

از دو وتر مساوی به یک فاصله است.

۵۰ نکته: مرکز هر دایره از دو وتر مساوی آن دایره، به یک فاصله است

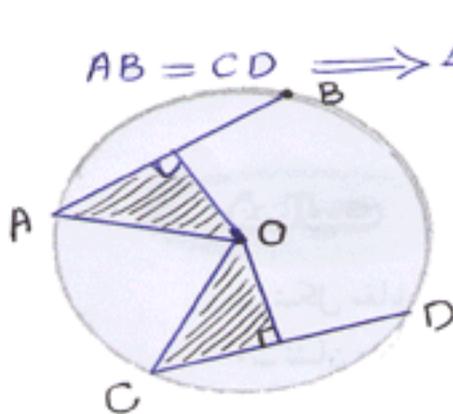
$AB = CD$ (فرض)
 $OA = OD$ (شعاع دایره)
 $OB = OC$ (شعاع دایره)

$\triangle OAB \cong \triangle OCD$ (اجزاء متناظر)
 $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$
 $\hat{O}_1 = \widehat{AB}$
 $\hat{O}_2 = \widehat{CD}$
 $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$
 $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

کاربرد مکالمات

نتیجه: کمان های نظیر وترهای مساوی از یک دایره با هم مساوی اند -
برابر می باشند (از نظر درجه)

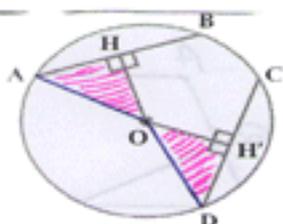
$\widehat{AB} = \widehat{CD}$ فرض $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$
 $OA = OD$ (شعاع دایره)
 $OB = OC$ (شعاع دایره)
 $\triangle OAB \cong \triangle OCD$ (فرض)
 $AB = CD$
نتیجه: وترهای نظیر کمان های مساوی از یک دایره با هم برابرند.



$AB = CD \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} \Rightarrow AH = DH'$
 $OA = OD$ (شعاع دایره)
 $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$
 $\triangle OAH \cong \triangle ODH'$ (وجه)

اجزاء متناظر
 $OH = OH'$

نتیجه: مرکز هر دایره از دو وتر مساوی آن، به یک فاصله است



$OA = OD$ شعاع

$\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$

$OH = OH'$ (فرض)

$\triangle OAH \cong \triangle ODH' \Rightarrow AH = DH'$

$\sphericalangle AH = \sphericalangle DH' \Rightarrow AB = CD$

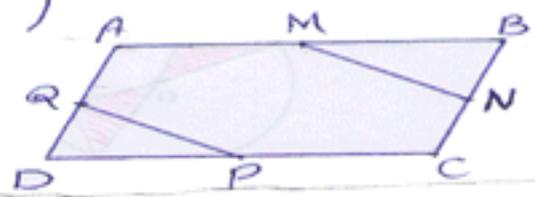
۴- در شکل مقابل می دانیم مرکز دایره از دو وتر AB و CD به

یک فاصله است ($OH = OH'$). مرکز دایره را به A و D وصل کنید و

با برگردن جاهای خالی نشان دهید که طول های دو وتر AB و CD با

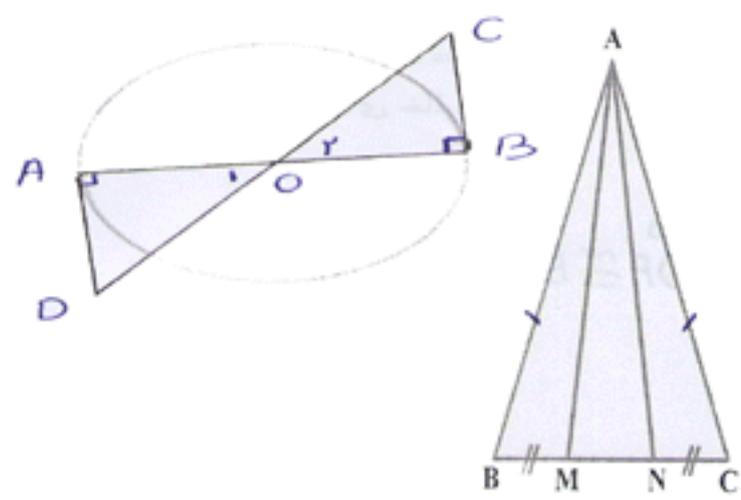
هم برابر است:

فرض $AD = BC \Rightarrow \frac{AD}{\gamma} = \frac{BC}{\gamma} \Rightarrow DR = BN$
 فرض $CD = AB \Rightarrow \frac{CD}{\gamma} = \frac{AB}{\gamma} \Rightarrow DP = BM$
 خواص متواری الاضلاع: $\hat{D} = \hat{B}$
 $\Rightarrow \triangle DRP \cong \triangle BNM$ (تساوی اجزای متساوی)
 $PR = MN$



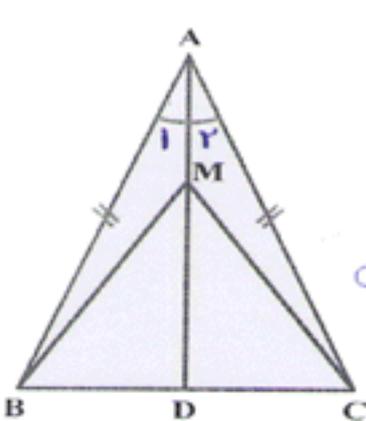
مولف: math-home.ir
 $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$
 $OA = OB$
 $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (مقابل براس)
 فرض (Z)
 $\triangle OAD \cong \triangle OBC$ (تساوی اجزای متساوی)
 $AD = BC$

نکته: هر دایم خط عماس بر پایه در نقطه می تقاس بران، بر شعاع دایره عمود است



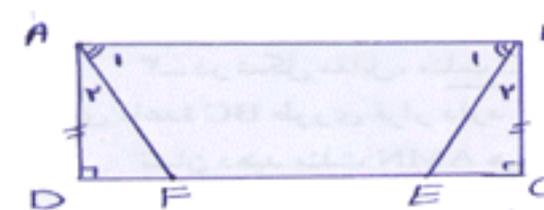
۳- در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی الساقین است و M و N روی قاعده BC طوری قرار دارد که $BM = CN$.

نشان دهید مثلث AMN هم متساوی الساقین است.
 $\textcircled{1} \Rightarrow AB = AC$
 $\textcircled{1} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$
 فرض $BM = CN$
 $\triangle ABM \cong \triangle ACN$ (فرض فرض)
 تساوی اجزاء
 $AM = AN$ (متساوی)
 متساوی AM, AN نتیجی می گیریم مثلث AMN متساوی الساقین است



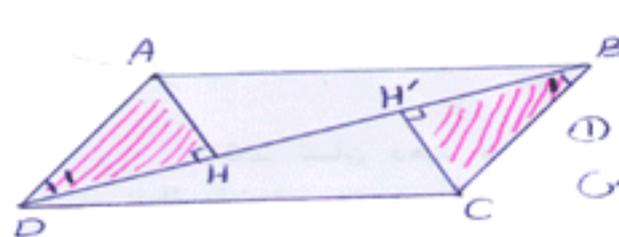
۵- نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین، فاصله هر نقطه دلخواه روی نیمساز زاویه رأس از دو سر قاعده، برابر است:

$\textcircled{1} AB = AC$ (فرض فرض)
 AD نیمساز است $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$
 $AM = AM$ ضلع مشترک
 $\triangle ABM \cong \triangle ACM$ (فرض فرض)
 $MB = MC$
 $BM = CM$ (تساوی اجزای متساوی)



فرض: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow 90 - \hat{A}_1 = 90 - \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}_2$
 $\textcircled{1} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}_2$
 $\hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$ (تقریب مستطیل)
 $AD = BC$ (طبق فرض)
 $\triangle ADF \cong \triangle BCE$ (فرض فرض)

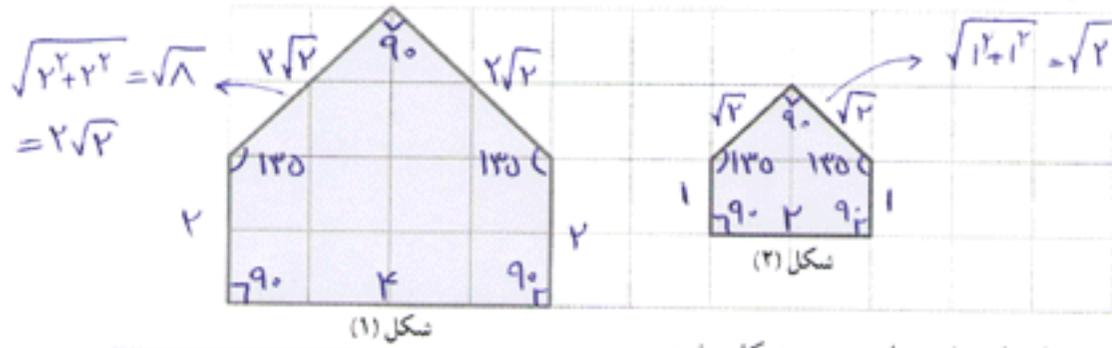
تساوی اجزای متساوی
 $AF = BE$



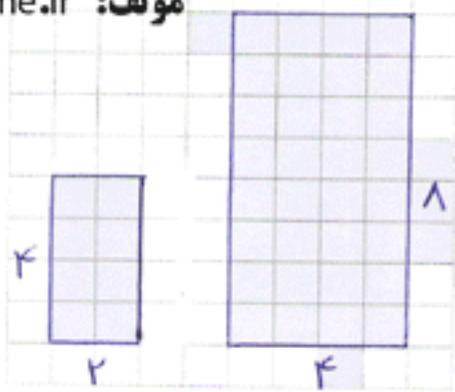
$(AD \parallel BC, \text{خط } BP) \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_1$ (فرض فرض)
 $\textcircled{1} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_1$
 فرض $AD = BC$
 $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$
 $\triangle ADH \cong \triangle B'CH'$ (فرض فرض)

تساوی اجزای متساوی
 $AH = CH'$

۱- مربع های صفحه شطرنجی زیر به ضلع یک سانتیمتر است:

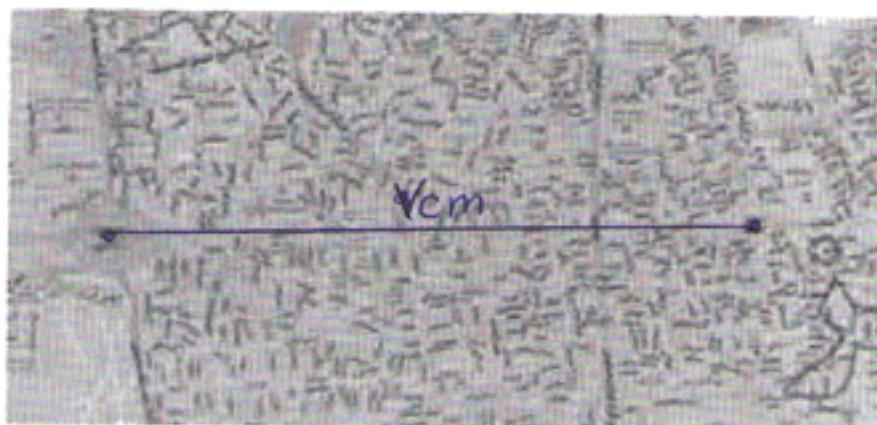


math-home.ir **مؤلف:**



بالا → اندازه ضلع ها و زاویه های هر دو شکل را بنویسید :
 چه رابطه ای بین ضلع های متناظر دو شکل وجود دارد؟
 برابر باشند → چه رابطه ای بین زاویه های متناظر دو شکل وجود دارد؟
 اندازه ضلع های شکل (۱) چند برابر اندازه ضلع های شکل (۲) است؟ دو برابر
 در صفحه شطرنجی مقابل یک چند ضلعی رسم کنید و چند ضلعی دیگری مانند آن بکشید به طوری که اندازه ضلع هایش ۲ برابر شکل اول باشد.

۲- در تصویر زیر، نقشه قسمتی از شهر تهران را می بینید. مقیاس نقشه ۱ به ۱۰۰,۰۰۰ است؛ یعنی هر یک سانتیمتر روی نقشه با ۱۰۰,۰۰۰ سانتیمتر مقدار واقعی برابر است. فاصله دو میدان انقلاب و آزادی را پیدا کنید. *فاصله در کتابم حدود ۷ کیلومتر است*



$$7 \times 100,000 = 700,000 \text{ سانتی متر}$$

$$700,000 \div 100 = 7000 \text{ متر}$$

$$7000 \div 1000 = 7 \text{ کیلومتر}$$

۵۴

۳- شکل زیر را با دستگاه کپی کوچک کرده ایم. عدد روی دستگاه ۵۰٪ را نشان می داد. تصویر خروجی را شما رسم کنید.

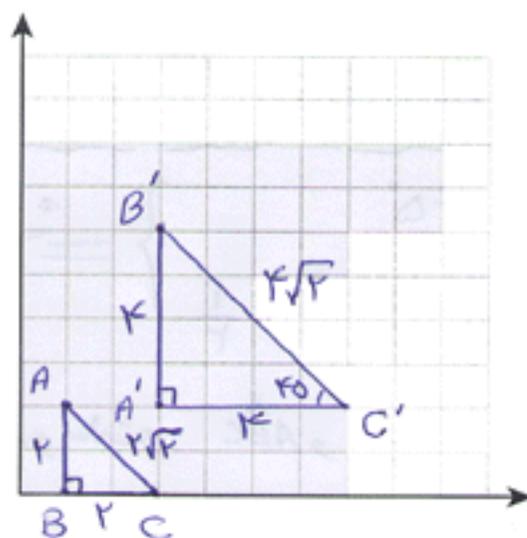
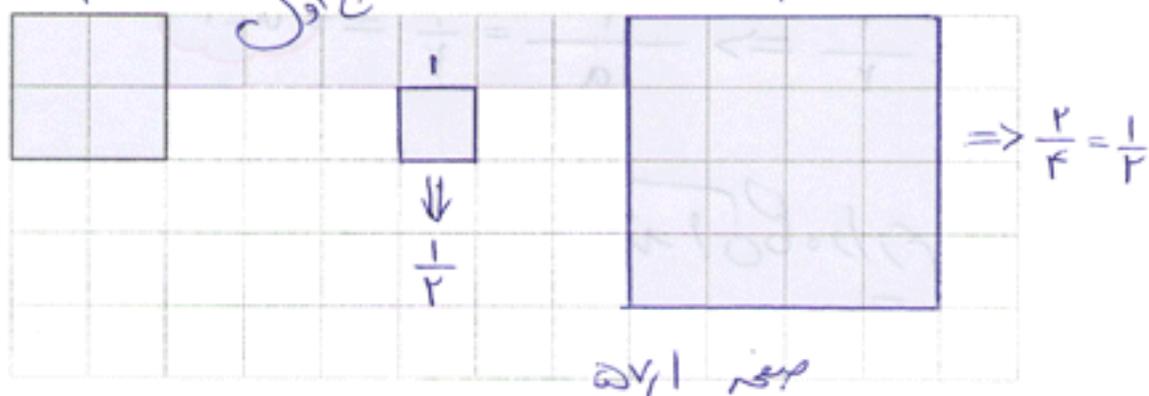


هرگاه در دو چند ضلعی همه ضلع ها به یک نسبت تغییر کرده باشد (کوچک یا بزرگ شده، و یا بدون تغییر باشد)، و اندازه زاویه ها تغییر نکرده باشد، آن دو چند ضلعی با هم مشابهند. فرض کنیم دو مربع دگوا به اضلاع a و b داریم چون همه ی زاویه ها برابر ۹۰ درجه و نسبت اندازه های اضلاع آن ها برابر $\frac{a}{b}$ می باشد پس این دو مربع دگوا مستطین ها هستند

۱- با توجه به مربع صفحه بعد، مربع دیگری رسم کنید به گونه‌ای که نسبت تشابه دو مربع $\frac{1}{4}$ باشد. این سؤال چند پاسخ دارد؟ چرا؟ دو پاسخ دارد می‌توانیم ضلع مربع دوم را برابر یا نصف کنیم در هر صورت نسبت تشابه دو مربع برابر $\frac{1}{4}$ است

$$\frac{1}{4} = \frac{a}{2} \Rightarrow a=1 \quad \frac{1}{4} = \frac{2}{a} \Rightarrow a=8$$

مؤلف: math-home.ir



۲- در صفحه مختصات، نقاط زیر را پیدا کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{مثلث } ABC$$

$$A' = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad C' = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{مثلث } A'B'C'$$

طول ضلع‌های دو مثلث را بنویسید و تشابه آنها را بررسی کنید، در صورت متشابه بودن، نسبت تشابه را پیدا کنید.

کاردر طول $\frac{1}{4}$ اگر نسبت تشابه مربع اول به دوم $\frac{1}{4}$ باشد آنگاه داریم

$$\frac{\text{طول مربع اول}}{\text{طول مربع دوم}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{4} \Rightarrow a=8$$

اگر نسبت تشابه مربع دوم به مربع اول برابر $\frac{1}{4}$ باشد آنگاه داریم

$$\frac{\text{طول مربع دوم}}{\text{طول مربع اول}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow a=1$$

$$\hat{A} = \hat{A}' = 45^\circ, \hat{B} = \hat{B}' = 90^\circ, \hat{C} = \hat{C}' = 45^\circ$$

$$\frac{AB}{BA'} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{BC}{AC'} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{AC}{B'C'} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه می‌باشند و نسبت تشابه آنها

برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد

تمرین درایع تعداد زیاری مثلث و دوزنقه و متواری الاضلاع متساویه وجود دارد

۱- مثلث های متساویه مانند: $\triangle ADB$ ، $\triangle BEC$ و $\triangle AHF$ و ...

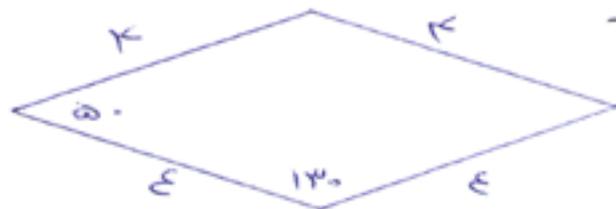
۲- لوزی های متساویه مانند $BEHD$ ، $ACJH$ و $CJPH$ و ...

۳- دوزنقه های متساویه مانند: $LMPQ$ و $IJCE$ و $HINL$ و ... **مؤلف:** math-home.ir

۴- متواری الاضلاع های متساویه مانند: $ABIH$ و $ABNM$ و ...

۲- آیا هر دو شکل همنهشت با هم، متشابه نیز هستند؟ **بله**
در صورت متشابه بودن نسبت تشابه چند است؟ **نسبت تشابه برابر نیست**

تمرین ۱۳



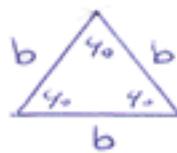
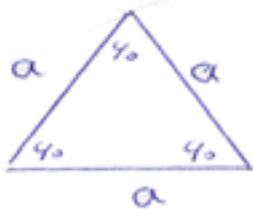
در دوزنقه دایره نسبت اضلاع نظیر با هم برابر است ولیکن اندازه ی زاویه های نظیر لزوماً یکی نیست

۱۴

$$\frac{\text{مقدار واقعی}}{\text{مقدار نظری}} = \frac{1}{200} = \frac{3,5}{x} \Rightarrow x = 3,5 \times 200 = 700 \text{ CM}$$

۵ در دو مثلث متساوی الاضلاع دایره به اضلاع a و b اندازه ی تمام زاویه ها

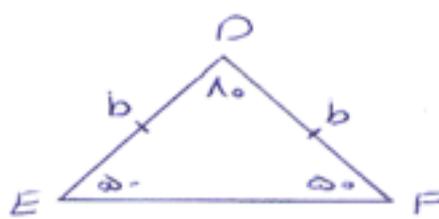
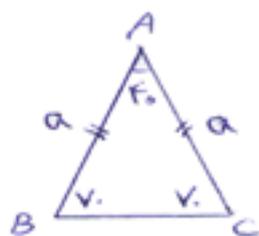
برابر 60° است و نسبت اضلاع نظیر $\frac{a}{b}$ یا $\frac{b}{a}$ می باشد لذا دو مثلث متساوی الاضلاع دایره همیشه متشابه می باشند



۶ خیر برابر نمی است زاویه های نظیر با هم

$$\hat{A} \neq \hat{D}$$

برابر نمی باشد



۷

$$\text{دو مثلث متشابه اند} \Rightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{10}{5} = \frac{x+7}{8}$$

$$\frac{x-1}{4} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1} \Rightarrow x-1=8 \Rightarrow x=9$$

$$\frac{10}{5} = \frac{x+7}{8} \Rightarrow 10 = 5x+35 \Rightarrow 45=9x \Rightarrow 5=x$$

۵۸/۱

نویسنده: سعید جعفری صربی

فصل چہارم

۱- با توجه به مثال‌های حل شده زیر، پاسخ موارد بعدی را به صورت یک عدد توان‌دار با توان

طبیعی بنویسید :

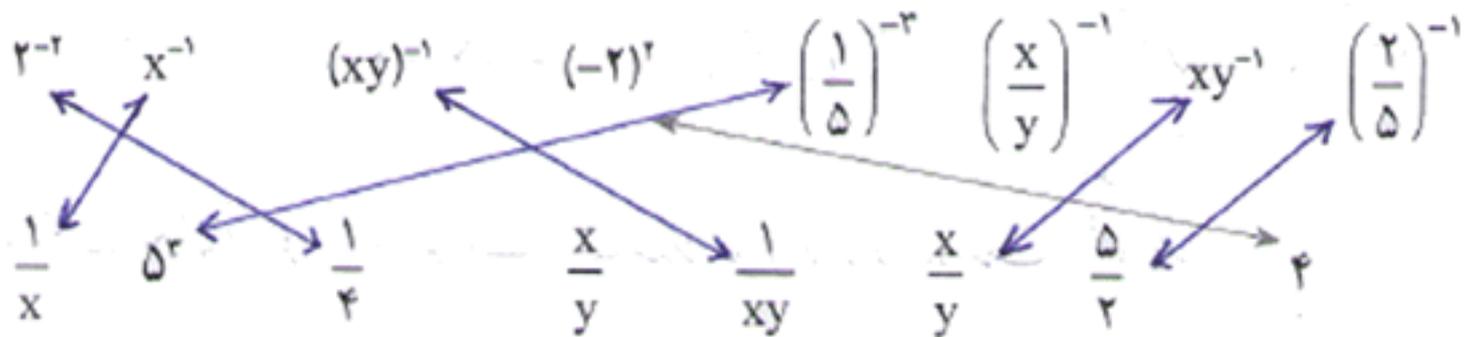
مؤلف: math-home.ir

الف) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$ ب) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

ج) $(-6)^{-2} = \frac{1}{(-6)^2} = \frac{1}{36} = \left(-\frac{1}{6}\right)^2$ د) $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{49}} = \frac{49}{4} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \left(-\frac{7}{2}\right)^2$

به طور کلی اگر n یک عدد طبیعی و $a \neq 0$ آن گاه: $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

۲- عبارتهای برابر را مانند نمونه به هم وصل کنید: $(x \neq 0, y \neq 0)$



۳- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید:

الف) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{1}\right)^2 = 3^2 = 9$ و) $1^{-2} = \frac{1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1$

ب) $2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12}$ ز) $\frac{(-3)^1}{3} = \frac{-3}{3} = -1$

ج) $-(-5)^1 = -5^1 = -5$

ح) $-\frac{1}{2^{-2}} = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4$

د) $-(-5)^{-2} = -\frac{1}{(-5)^2} = -\frac{1}{25}$

ط) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$

ه) $-5^{-2} = -\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25}$

ی) $2^0 - 2^{-1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

به حاصل ضرب‌های زیر توجه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$3^{-2} \times 3^6 = \frac{1}{3^2} \times 3^6 = \frac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4$$

$$2^{-5} \times 2^{-2} = \frac{1}{2^5} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{5+2}} = \frac{1}{2^7} = 2^{-7}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = (-2)^3 \times (-2)^5 = (-2)^8 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-8}$$

حاصل ضرب مقابل را نیز به همین روش به دست آورید:

$$5^2 \times 5^{-7} = 5^{-5}$$

math-home.ir **مؤلف:**

در حالت کلی اگر m و n دو عدد صحیح باشد و a یک عدد دلخواه (غیر صفر)، رابطه

زیر برقرار است:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

صفحه ۲۲۱

مثال:

$$2^3 \times 2^{-5} \times 2^{-2} = 2^{-5-2} = 2^{-7}$$

$$(2x^{-1}) \times (3x^2) \times (4x^3) = 24x^{-1+2+3} = 24x^4 \quad (x \neq 0)$$

کار در کلاس

حاصل هر یک از عبارات زیر را به صورت یک عبارت توان دار بنویسید: ($b, x, y \neq 0$)

$$5^3 \times 5^{-10} = 5^{-7}$$

$$(-4)^{-3} \times (-4)^{-7} = (-4)^{-10} = 4^{-10} = \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$

$$\left(\frac{-3}{8}\right)^2 \times \left(\frac{-3}{8}\right)^{-4} = \left(\frac{-3}{8}\right)^{-2} = \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{9}$$

$$b^5 \times b^{-2} = b^{-3} = \left(\frac{1}{b}\right)^3$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-7} \times \left(\frac{x}{y}\right)^{11} = \left(\frac{x}{y}\right)^4$$

۶۲

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

چرا m و n باید عدد صحیح باشد

$$(-5)^{\frac{1}{2}} \times (-5)^{\frac{1}{2}} = (-5)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = (-5)^1 = -5$$

مثال ۱:

$$(-5)^{\frac{1}{2}} \times (-5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-5} \times \sqrt{-5} \quad \sqrt{-5} \notin \mathbb{R}$$

$$(-5)^{\frac{1}{2}} \times (-5)^{\frac{1}{2}} = (-5 \times (-5))^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

اگر m و n متعلق به اعداد صحیح نباشند نمی‌توانیم از این دستور استفاده کنیم

نتیجه سوم

$$(-3)^{\frac{1}{2}} \times (-3)^{\frac{3}{2}} = (-3)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = (-3)^2 = (-3)^2 = 9$$

مثال ۲

در صورتی که $(-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3}$ که در مجموعه اعداد حقیقی تعریف نشده است

حاصل عبارات‌های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$(-7)^{12} \times (-7)^4 \times (-7)^5 = (-7)^{12+4+5} = (-7)^{21}$$

$$(-7^3)^6 \times \left(-\frac{3}{10}\right)^4 = \left(-\frac{3}{10}\right)^{10} = \left(\frac{3}{10}\right)^{10} = \frac{3^{10}}{10^{10}}$$

$$\left(-1\frac{4}{5}\right)^7 \times \left(-\frac{9}{5}\right)^7 \times (-1/8)^{12} = (-1/8)^{7+7+12} = (-1/8)^{26} = \frac{1}{8^{26}}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad a \neq 0, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

چرا m و n باید عدد صحیح باشد

$$\left((-4)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (-4)^{2 \times \frac{1}{2}} = (-4)^1 = -4 \quad \times \quad \text{(با استفاده از دستور بالا)}$$

$$\left((-4)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (34)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{34} = 6 \quad \checkmark$$

الف) $\frac{v^2}{v^5} = v^{2-5} = v^{-3} = (\frac{1}{v})^3$ ب) $2^{-2} \times 5^{-2} = (2 \times 5)^{-2} = 10^{-2} = (\frac{1}{10})^2$

ج) $(\frac{-2}{3})^{-2} \times 12^{-2} = (-\frac{2}{3} \times 12)^{-2} = (-8)^{-2} = [(\frac{-2}{5})^{-2}]^{-1} = (-\frac{2}{5})^{(-2) \times (-1)} = (-\frac{2}{5})^2 = (\frac{2}{5})^2$
 $= (-\frac{1}{8})^2$

د) $\frac{2^8 \times 5^{10}}{2^2 \times 5^6} = \frac{2^8}{2^2} \times \frac{5^{10}}{5^6} = 2^6 \times 5^4 = 10^4$

و) $\frac{x^5 \cdot y^2 \cdot z}{x^{-2} \cdot y^v \cdot z^r} = x^{5-(-2)} \cdot y^{2-v} \cdot z^{1-r} = x^7 y^{-v} z^{-r}$ $x, y, z \neq 0$

math-home.ir

مؤلف:

$\frac{x^7}{y^v z^r}$

تمرین

۱- برای هر عبارت دو پاسخ داده شده است. پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید.

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
 الف) 3^{-2} $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{9} \text{ (✓)} \\ -9 \end{array} \right.$

$3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$
 ب) 3^{-1} $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \text{ (✓)} \\ -\frac{1}{3} \end{array} \right.$

$3^{-1} \times 4^{-1} = \frac{1}{3^1} \times \frac{1}{4^1} = \frac{1}{12^1} = 12^{-1}$
 ج) $3^{-1} \times 4^{-1}$ $\left\{ \begin{array}{l} 12^{-1} \text{ (✓)} \\ 12 \end{array} \right.$

$3^{-1} + 4^{-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$
 د) $3^{-1} + 4^{-1}$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \text{ (✓)} \\ 7 \end{array} \right.$

$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$
 ه) 5^{-2} $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{25} \text{ (✓)} \end{array} \right.$

$3^{-1} \times 4^{-1} = (3 \times 4)^{-1} = 12^{-1}$
 و) $(-2)^2$ $\left\{ \begin{array}{l} 3^{-2} \\ -8 \text{ (✓)} \end{array} \right.$

$3^{-1} + 4^{-1} = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{4^1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$
 ۶۳

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

حاصل عبارات های زیر را بصورت یک عدد توان دار بنویسید

$[12^9 \div (\frac{4}{3})^9] \div 2^9 = (12 \times \frac{3}{4})^9 \div 2^9 = 18^9 \div 2^9 = 9^9$

$\frac{(8^7 \times 3^7) \div 24^2}{(2^3 \div 725^2) \times 3^2} = \frac{24^7 \div 24^2}{8^3 \times 3^2} = \frac{24^5}{24^2} = 24^3$

$4^7 \times 20^4 \times 15^7 \times 3^4 = (4^7 \times 15^7) \times (20^4 \times 3^4) = 60^7 \times 60^4 = 60^{11}$

$\frac{17^{15} \times 15^{13}}{15^{20} \times 17^8} = \frac{17^{15} \times 15^{13}}{17^8 \times 15^{20}} = \frac{17^{15}}{17^8} \times \frac{15^{13}}{15^{20}} = 17^7 \times 15^{-7} = \frac{17^7}{15^7}$

$= \frac{17^7}{15^7} = (\frac{17}{15})^7$

$\frac{17^{15} \times 15^{13}}{15^{20} \times 17^8} = \frac{17^7}{15^7} = (\frac{17}{15})^7$

$(0.05)^{-4} = \frac{1}{(0.05)^4} = \frac{1}{(\frac{5}{100})^4} = (\frac{1}{\frac{5}{100}})^4 = 20^4 = 160,000$

$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0.0001$

توان منفی از اعداد کوچک نسبت به اعداد بزرگس سازد و از اعداد بزرگ نسبت به اعدادی کوچک بین ۱ و صفر تولید می کند

نتیجه مهم

اگر $2^a = 10$ باشد حاصل عبارات زیر را بدست آورید
 ا) $2^{a+3} = 2^a \times 2^3 = 10 \times 8 = 80$ ب) $2^{a-1} = \frac{2^a}{2^1} = \frac{10}{2} = 5$

$100 \text{ Kg} = 100 \times 1000 \text{ g} = 10^2 \times 10^3 = 10^5 \text{ گرم}$
 $10^5 \div 10^{-24} = 10^{29} = 10^{24+5} = 10^{29}$

۲- جرم یک اتم هیدروژن حدود 10^{-22} گرم است. جرم یک وزنه 100 کیلوگرمی چند برابر جرم یک اتم هیدروژن است؟

۳- عددهای 16^2 و 8^4 و 2^{11} را با یکدیگر مقایسه کنید. صحیح ۲۴/۱

۴- در جاهای خالی علامت $<$ ، $>$ یا $=$ قرار دهید:

الف) $3^{-1} \otimes 3^{-2}$ ب) $2^0 \otimes 2^{-5}$ ج) $(-0.5)^{-2} \otimes (-0.6)^{-2}$
 $\frac{1}{3} > \frac{1}{9}$ $1 > \frac{1}{32}$ $(\frac{5}{10})^{-2} = (\frac{1}{2})^{-2} = 2^2 = 4 \otimes (\frac{6}{10})^{-2} = (\frac{5}{3})^2 = \frac{25}{9}$

د) $5^{-1} \otimes 5^{-2}$ ه) $(\frac{-8}{15}) \otimes 1$ و) $-5^{-2} \otimes (-5)^{-2}$
 $\frac{1}{5} > \frac{1}{25}$ عددهای مثبت و منفی

۵- در هر یک از تساوی‌های زیر x چه عددی است؟

الف) $5^x \times 5^{-2} = 5^2 \Rightarrow x = 7$ ب) $5^x + 5^{-2} = 5^2 \Rightarrow x - (-3) = 4 \Rightarrow x = 1$

math-home.ir : مولف

۶- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

الف) $a^2 \times a^5 = a^7$ ب) $1 + 3 = 4$ درست
 ب) $a^2 \times a^5 = a^7$ درست ج) $3^{-1} \times 4^{-1} = 12^{-2}$ نادرست
 ج) $(a^m)^n = (a^n)^m$ $a > 0$ درست د) $3^{-1} < 3^{-2}$ درست
 د) $3^{-2} = -9$ نادرست

۷- حاصل هر عبارت را به دست آورید. صحیح ۲۴/۱

الف) $(\frac{1}{3})^{-10} \times 27^{-3} = 3^{10}$ ب) $(-0.2)^{-2} \times 25^{-2}$
 ج) $(\frac{15}{14})^{-2} \times (\frac{45}{28})^2$ د) $(-5^{-2})^{-1}$

۸- عددهای داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

2^{-2} و 1^{-10} و $(-1)^{11}$ و $(-7)^2$ و $(-\frac{1}{2})^{-2}$ و 2^2 و 5^{-2} و 2^{-2}

۹- عبارت نادرست را مشخص کنید.

$(0.987)^{10} < 10^0$ درست $(1/2)^2 < (1/0.2)^2$ نادرست $(\frac{5}{4})^2 < (0.7)^2$ نادرست $(\frac{3}{4})^2 > (0.75)^2$ درست

۱۰- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{(\frac{2}{3})^2 \times (\frac{8}{3})^{-2}}{-2^5 \times 2^{-8}}$ ب) $\left[-(\frac{2}{3})^{-2}\right]^{-1} = \left[-(\frac{3}{2})^2\right]^{-1} = \left[-\frac{9}{4}\right]^{-1} = -\frac{4}{9}$
 $= \frac{(\frac{2}{3})^2 \times (\frac{3}{8})^2}{-(2^5 \times 2^{-8})} = \frac{(\frac{2}{3} \times \frac{3}{8})^2}{-2^{-3}} = \frac{(\frac{1}{2})^2}{-2^{-3}} = -2^3 \times (\frac{1}{2})^2 = -(2 \times \frac{1}{2})^2 = -1$
 $= -(\frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{4}$

$8^4 = (2^3)^4 = 2^{12}$, $14^3 = (2^7)^3 = 2^{21} \Rightarrow 2^{12} < 2^{21} = 14^3$ ۳

۶- به طور کلی نمی‌توانیم اعداد کنیم

$(a^m)^n = (a^n)^m$ است

زیرا: $((-3)^{\frac{1}{2}})^2 \neq ((-3)^2)^{\frac{1}{2}}$

طرف اول (سمت چپ) در مجموعی اعداد حقیقی تعریف نشده است

$(-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$

زیرا عدد -3 در مجموعی اعداد حقیقی ریشه دوم ندارد و سمت راست برابر 3 می‌شود

$((-3)^2)^{\frac{1}{2}} = (+9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

$((-3)^{\frac{1}{2}})^2 = -3$

حاصل سمت چپ برابر -3 می‌شود

درسا‌های آینده علت این که حاصل برابر -3 می‌شود را می‌خواهید

۷- الف) $(\frac{1}{3})^{-10} \times 27^{-3} = 3^{10} \times (3^3)^{-3} = 3^{10} \times 3^{-9} = 3^1 = 3$
 ب) $(0.2)^{-4} \times 25^{-2} = (\frac{2}{10})^{-4} \times (\frac{1}{25})^2 = (\frac{5}{2})^4 \times (\frac{1}{5})^2 = (5 \times \frac{1}{5})^2 = 1^2 = 1$
 ج) $(\frac{15}{14})^{-4} \times (\frac{45}{28})^4 = (\frac{14}{15})^4 \times (\frac{45}{28})^4 = (\frac{14}{15} \times \frac{45}{28})^4 = (\frac{3}{2})^4$
 د) $(-5^{-2})^{-1} = (-\frac{1}{5^2})^{-1} = (-\frac{1}{25})^{-1} = (-25)^1 = -25$

$(-1)^{11} = -1 < -2^{-4} = -\frac{1}{16} < 5^{-3} = \frac{1}{125} < 2^{-3} = \frac{1}{8} < 1^{-90} = 1 < (-\frac{1}{2})^{-2} = 4 < 2^2 = 4 < (-7)^2 = 49$ ۱

$(0.987)^{10} < 10^0 \Rightarrow (0.987)^{10} < 1$ $1/2 > 1/0.2 \Rightarrow (1/2)^2 > (1/0.2)^2$ ۹
 $\frac{5}{4} > 0.7 \Rightarrow (\frac{5}{4})^2 > (0.7)^2$ $\frac{3}{4} = 0.75 \Rightarrow (\frac{3}{4})^2 > (0.75)^2$

۱- حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید:

الف) $\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 25}{4^{-5} \times 15^{-5}}$

ب) $\frac{8^{-1} \times 4^2}{2^{-2} \times \frac{1}{8}}$

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$1/0.2 \times 10^{-3} = 0/000000102$ ❌

$5/9 \times 10^{-1} = 0/59$ ✅

$1/2 \times 10^2 = 4300$ ❌

$7/004 \times 10^{-2} = 0/7004$ ❌

$6/18 \times 10^7 = 61800000$ ✅

$8/2570 \times 10^4 = 82570$ ❌

math-home.ir مولف:

۳- شعاع خورشید تقریباً ۶۹۵۰۰۰ کیلومتر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید. 6.95×10^5

۴- اندازه یک باکتری ۰/۰۰۰۰۰۰۵ متر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید. 5×10^{-7}

الف) $\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 25}{4^{-5} \times 15^{-5}} = \frac{3^{-5} \times 5^2}{4^{-5} \times 15^{-5}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-5} \times 5 = \left(\frac{4}{3}\right)^{-5} \times 25 = \frac{1}{1}$

$= 2^5 \times 25 = 32 \times 25 = 100$

ب) $\frac{8^{-1} \times 4^2}{2^{-2} \times \frac{1}{8}} = \frac{2^3 \times (2^2)^2}{8 \times 8^{-1}} = \frac{2^3 \times 2^4}{8^0} = \frac{2^7}{1} = 256$

$\frac{\text{قطر فوریسید}}{\text{قطر زمین}} = \frac{1.4 \times 10^9}{1.3 \times 10^7} = \frac{14 \times 10^8}{13 \times 10^6} = \frac{14}{13} \times 10^2 \approx 1.07 \times 10^2 = 107$
قطر فوریسید ۱۰۷ برابر زمین است

$2 \times 10^{-2} \times 4 \times 10^9 = 8 \times (10^{-2} \times 10^9) = 8 \times 10^7$
 $\frac{12.5 \times 10^{-3}}{25 \times 10^{-19}} = \frac{125 \times 10^{-5}}{25 \times 10^{-19}} = 5 \times \frac{10^{14}}{10^5} = 5 \times 10^9$

$9,287 \times 10^8 = 92,87 \times 10^7 \Rightarrow 9,17 \times 10^7$ \Rightarrow میخ در زمین نزدیک تر است

$0.02 < 2.7 \times 10^{-2} < 2.7 \times 10^{-1} < 2.7 \times 10^0 < 2.7 \times 10^1 < 2.7 \times 10^2 < \dots$
 $0.0003 > 0.003 \times 10^0 > 0.003 \times 10^{-1} > 0.003 \times 10^{-2} > 0.003 \times 10^{-3} > \dots$

$1.5 \times 10^{-2} = 15 \times 10^{-3}$, $1.2 \times 10^6 = 1,200,000$, 5.35×10^{-3}
 $3.7 \times 10^{-2} = 37 \times 10^{-3}$

$5.35 \times 10^{-3} < 15 \times 10^{-3} < 37 \times 10^{-3} < 1,200,000$
 $\Rightarrow 5.35 \times 10^{-3} < 1.5 \times 10^{-2} < 3.7 \times 10^{-2} < 1.2 \times 10^6$

۱- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را مانند نمونه‌ها به دست آورید :

$$\begin{aligned} (-3)^2 &= 9 & (\sqrt{5})^2 &= 5 & \left(\frac{1}{7}\right)^2 &= \frac{1}{49} & \left(-\frac{2}{3}\right)^2 &= \frac{4}{9} \\ (-\sqrt{5})^2 &= 5 & \left(-\frac{1}{7}\right)^2 &= \frac{1}{49} & 4^2 &= 16 & (-4)^2 &= 16 \end{aligned}$$

مربع (توان دوم) عددها ۳ و -۳ برابر ۹ است. اعداد ۳ و -۳ را ریشه‌های دوم **مؤلفه** می‌نامند. همان گونه که در سال‌های گذشته دیده‌اید، ریشه‌های دوم ۹ را با $\sqrt{9}$ و $-\sqrt{9}$ نمایش می‌دهند و داریم : $\sqrt{9} = 3$ و $-\sqrt{9} = -3$.

۲- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید :

عدد	۳	-۳	۴	-۴	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\sqrt{4}$	$-\sqrt{4}$
مربع عدد (توان دوم)	۹		۱۶		$\frac{4}{9}$		۵		$\frac{1}{49}$		۶	

ریشه‌های دوم عدد $\frac{4}{9}$ ، اعداد $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ هستند. ریشه‌های دوم ۷، عددهای $\sqrt{7}$ و $-\sqrt{7}$ هستند. ریشه دوم صفر، همان صفر است و داریم $\sqrt{0} = 0$.

به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی مثبت باشد، \sqrt{b} و $-\sqrt{b}$ را ریشه‌های دوم b می‌نامند. همان طور که می‌دانید عددهای منفی ریشه دوم ندارند.

۳- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید.

عدد	۲	-۲	۳	-۳	۴	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	۵	$-\frac{2}{3}$	۰
مکعب عدد (توان سوم)	۸	-۸	۲۷	-۲۷	۶۴	$\frac{1}{125}$	$-\frac{1}{125}$	۱۲۵	$-\frac{8}{27}$	۰

مکعب (توان سوم) عدد ۲ برابر ۸ است؛ یعنی $2^3 = 8$. ریشه سوم عدد ۸ عددی است که وقتی به توان ۳ برسد، برابر ۸ می‌شود؛ پس، ریشه سوم عدد ۸ برابر ۲ است و می‌نویسیم $\sqrt[3]{8} = 2$. همچنین چون $(-2)^3 = -8$ ریشه سوم عدد -۸ برابر -۲ است و می‌نویسیم $\sqrt[3]{-8} = -2$ ؛ به عبارت دیگر با اینکه عددهای منفی ریشه دوم ندارند، ولی ریشه سوم دارند. به کمک جدول قبل دیده می‌شود که ریشه سوم عدد ۶۴ برابر ۴ است... و ریشه سوم عدد $-\frac{8}{27}$ عدد $-\frac{2}{3}$ است.

۴- طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید :

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{8})^3 &= 8 & \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} &= -\frac{1}{2} & \sqrt[3]{125} &= 5 & \sqrt[3]{-27} &= -3 \end{aligned}$$

۱- حاصل هر عبارت را به دست آورید:

$$\sqrt{81} = 9 \quad \sqrt{4^2} = 4 \quad \sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4 \quad \sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5} \quad \sqrt[3]{6^3} = 6 \quad \sqrt[3]{-\frac{8}{1000}} = -\frac{2}{10} \quad \sqrt[3]{(-7)^3} = -7$$

۲- به کمک رابطه $\sqrt{x^2} = |x|$ ، که در فصل ۲ آموخته‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید: math-home.ir **مؤلف:**

$$\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6 \quad \sqrt{8^2} = |8| = 8 \quad \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$$

$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1 \quad \sqrt{(2-9)^2} = |2-9| = |-7| = 7 \quad \sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \left|1-\frac{1}{3}\right| = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

۳- حاصل عبارت $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$ را در هر یک از حالت‌های زیر به دست آورید؛ یکی از حالت‌ها

حل شده است.

الف) $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = x + y$ (الف) x و y هر دو مثبت هستند ($x > 0, y > 0$).

ب) $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = x - y$ (ب) x مثبت و y منفی است ($x > 0, y < 0$).

ج) $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = -x + y$ (ج) x منفی و y مثبت است ($x < 0, y > 0$).

د) $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = -x - y$ (د) x و y هر دو منفی هستند ($x < 0, y < 0$).

ع.ا

۱- حاصل را به دست آورید

الف) $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = \underbrace{|\sqrt{3}-\sqrt{2}|}_{\text{مثبت}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

ب) $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = \underbrace{|\sqrt{2}-\sqrt{3}|}_{\text{منفی}} = -(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = -\sqrt{2}+\sqrt{3} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

ج) $\sqrt[3]{(2-\sqrt{5})^3} = 2-\sqrt{5}$

د) $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -(x-1) = -x+1 & x < 1 \end{cases}$

۲- حاصل را به دست آورید

۱) $\sqrt[4]{5^4} = |5| = 5$

۳) $\sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = 5$

۲) $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$

۴) $\sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^6} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$

۱- ریشه‌های دوم عددهای زیر را بیابید :

$$\frac{49}{16}, \frac{1}{81}, 15, 144, 12, 18$$

۲- ریشه سوم عددهای زیر را به دست آورید :

$$216, 7^3, -5, -\frac{1}{216}, 10$$

مؤلف: math-home.ir

۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟ صحیح ۷/۱

$\otimes \sqrt{(-1)^2} = -1$	$\checkmark \sqrt[3]{(-1)^3} = -1$	$\checkmark \sqrt{(-5)^2} = -5 = 5$	$\checkmark \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$
$\checkmark -\sqrt{\frac{49}{256}} = -\frac{7}{16}$	$\checkmark \sqrt{1/44} = 1/2$	$\otimes (\sqrt{-1})^2 = 1$	$\checkmark \sqrt{-64} = -4$

تعریف نشده $\sqrt{-1}$

۴- حاصل هر عبارت را به عدد مساوی آن در سطر دوم، وصل کنید :

$\sqrt[3]{125} \times \sqrt{36}$	$\sqrt{-1} \times \sqrt{81}$	$\sqrt[3]{\frac{81}{3}}$	$\sqrt{-25} \times \sqrt[3]{5}$
→ ۳۰	→ ۹	→ ۳	→ -۵

$\sqrt[3]{125} \times \sqrt{36} = 5 \times 6 = 30$, $\sqrt{-1} \times \sqrt{81} = (-1) \times 9 = -9$, $\sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$
 $\sqrt{-25} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt{-125} = -5$

تمرین

$\frac{49}{14} \xrightarrow{\text{ریشه‌ی دوم}} \frac{7}{4}, -\frac{7}{4}$, $\frac{1}{81} \xrightarrow{\text{ریشه‌ی دوم}} \frac{1}{9}, -\frac{1}{9}$

$\frac{1}{9}$

$15 \xrightarrow{\text{ریشه‌ی دوم}} \pm\sqrt{15}$, $12 \xrightarrow{\text{ریشه‌ی دوم}} \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$, $144 \xrightarrow{\text{ریشه‌ی دوم}} \pm\sqrt{144} = \pm 12$
 $144 \xrightarrow{\text{ریشه‌ی دوم}} \pm\sqrt{144} = \pm 12$, $18 \xrightarrow{\text{ریشه‌ی دوم}} \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$

$216 \xrightarrow{\text{ریشه‌ی سوم}} 6$, $\sqrt[3]{-5} \xrightarrow{\text{ریشه‌ی سوم}} -5$, $7 \xrightarrow{\text{ریشه‌ی سوم}} 7$

$-\frac{1}{216} \xrightarrow{\text{ریشه‌ی سوم}} -\frac{1}{6}$, $10 \xrightarrow{\text{ریشه‌ی سوم}} \sqrt[3]{10}$

$\sqrt{(-3)^2} = 3$, $(\sqrt{-3})^2 =$ تعریف نشده

$\frac{3}{11}$

$\sqrt{(-3)^2} \neq (\sqrt{-3})^2$

نتیجه

۵- حداقل سه عدد صحیح مختلف مثال بزنید که اگر به جای a قرار دهیم، نامساوی زیر درست

باشد:

$$\sqrt{a} < \sqrt{4} \Rightarrow \sqrt[3]{a} < 2 \Rightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{8} \Rightarrow a < 8$$

۶- رابطه $\sqrt{(-x)^2} = x$ به چه شرطی درست است؟ مثال بزنید. $\sqrt{2/1}$

۷- اگر مساحت کل یک مکعب $96a^2$ باشد، حجم آن را بر حسب a به دست آورید.

۸- اگر $x > 0$ و $y < 0$ باشد، حاصل $\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$ را ساده کنید و بدون قدرمطلق بنویسید.

۹- عبارت های زیر را مانند نمونه ساده کنید: $\sqrt{90} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{10} = 3\sqrt{10}$

math-home.ir مولف:

$$\sqrt{80}$$

$$\sqrt{24}$$

$$\sqrt[3]{125^2}$$

۱۰- آیا تساوی های زیر درست است؟

$$(\sqrt{-2})^2 = -2$$

$$\sqrt{-4} = -\sqrt{4}$$

۱۱- حاصل را به دست آورید:

$$2\sqrt[3]{16} \times 3\sqrt[3]{4} = \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{18} \times \sqrt[3]{60}}{\sqrt[3]{5}}$$

$$2\sqrt[3]{14} \times 3\sqrt[3]{4} = 6 \times \sqrt[3]{14 \times 4} = 6\sqrt[3]{44} = 6 \times (+4) = 24$$

$$\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{8 \times 5}{10}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\frac{\sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{18 \times 40}{5}} = \sqrt[3]{214} = 6$$

$$\sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = |x|, \quad \sqrt{(-x)^2} = x \quad \underline{\underline{4}}$$

$$\sqrt{(-2)^2} = 2, \quad \sqrt{(-(-2))^2} = -2 \text{ باشد } x \geq 0 \text{ در صورتی } |x| = x$$

$$S = 96a^2 \Rightarrow S \text{ مکعب } = 96a^2 \div 6 = 14a^2 \quad \underline{\underline{5}}$$

$$\text{بنی تا نیم که مقدار } a \text{ مثبت است یا منفی} \quad \sqrt{14a^2} = 4|a|$$

$$V = (\text{اندازه ی یک ضلع})^3 = (4|a|)^3 = 64a^2|a| \xrightarrow{a > 0} V = 64a^3$$

$$x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x$$

$$y < 0 \Rightarrow \sqrt{y^2} = |y| = -y$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = |x| - |y| = x - (-y) \quad \underline{\underline{1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = x + y$$

$$\sqrt{150} = \sqrt{2 \times 3 \times 5^2} = \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{5^2} = \sqrt{6} \times 5 = 5\sqrt{6} \quad \underline{\underline{9}}$$

$$\sqrt{80} = \sqrt{2^4 \times 5} = \sqrt{2^4} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

$$\sqrt{24} = \sqrt{2^3 \times 3} = \sqrt{2^2 \times 2 \times 3} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt[3]{125^2} = \sqrt[3]{(5^3)^2} = \sqrt[3]{5^6} = \sqrt[3]{(5^2)^3} = 5^2 = 25$$

$$(\sqrt[3]{-2})^3 = (\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{-2}) = \sqrt[3]{(-2)(-2)(-2)} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2 \quad \underline{\underline{10}}$$

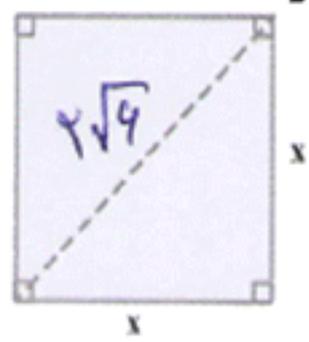
$$\sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{(-1) \times 4} = \sqrt[3]{-1} \times \sqrt[3]{4} = -1 \times \sqrt[3]{4} = -\sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt[3]{0} = 0, \quad \sqrt[3]{-1} = -1, \quad \sqrt[3]{1} = 1 \quad \text{صورتی}$$

فعالیت

زمینی به شکل مربع داریم که طول قطر آن $2\sqrt{6}$ متر است. می‌خواهیم مساحت و محیط این زمین را به دست آوریم. راه حل ارائه شده را توضیح دهید و در صورت لزوم آن را کامل کنید.

مؤلف: math-home.ir



حل: به کمک رابطه **پیتاگورس** داریم: $x^2 + x^2 = (2\sqrt{6})^2$

در نتیجه: $2x^2 = 24$ و از آنجا $x^2 = 12$

بنابراین **مساحت** این زمین ۱۲ متر مربع است.

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که **اندازه ضلع** مربع $\sqrt{12}$ متر یا $2\sqrt{3}$

متر است.

همچنین: متر $8\sqrt{3} = 4 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} =$ **محیط** مربع

اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده کردن کاملاً یکسان باشد، می‌توان آنها

را با هم جمع یا تفریق کرد؛ مثلاً دو عبارت $3\sqrt{2}$ و $7\sqrt{2}$ دارای قسمت‌های رادیکالی

یکسان هستند و داریم: $7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ و $7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

همچنین:

$\sqrt{12} + 9\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$

اما قسمت‌های رادیکالی عبارات $2\sqrt{5}$ و $\sqrt{2}$ یا عبارات $7\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$ یکسان نیستند.

کار در کلاس

حاصل جمع هر ستون را مانند نمونه‌ها در سطر آخر بنویسید:

$3\sqrt{7}$	$\frac{3}{2}\sqrt{4}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$3\sqrt{a}$	\sqrt{xy}	$\sqrt{4}$
$-4\sqrt{5}$	$\sqrt{4}$	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{b}$	$2\sqrt{x}$	$\sqrt{4}$
$8\sqrt{7}$	$8\sqrt{4}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{10}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{a}$	$-7\sqrt{x}$	$\sqrt{5}$
$2\sqrt{5}$	$-5\sqrt{4}$	$-2\sqrt{10}$	$-7\sqrt{b}$	$2\sqrt{xy}$	$6\sqrt{4}$
$11\sqrt{7} - 2\sqrt{5}$	$\frac{9}{2}\sqrt{4} + \sqrt{4}$	$\frac{5}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{10}$	$\frac{14}{5}\sqrt{a} - 5\sqrt{b}$	$5\sqrt{xy} - 5\sqrt{x}$	$7\sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{5}$

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید. صفحه ۷۵/۱

۱) $\sqrt{98} - \sqrt{50} + \sqrt{128}$

۴) $\sqrt{4 + \frac{1}{81} + \frac{4}{9}}$

۲) $\sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48}$

۵) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$

۳) $5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{128}$

گویا کردن مخرج کسرها: وقتی مخرج کسرها را با آسازیم کنیم کار با آن‌ها آسانتر می‌شود. موافق: math-home.ir

گاهی اوقات برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی و یا آسان‌تر کردن محاسبات، لازم است مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم؛ به‌طور مثال برای محاسبه $\frac{20}{\sqrt{2}}$ باید عدد ۲۰ را بر $\sqrt{2}$ تقسیم کنیم در حالی که می‌توانیم مخرج کسر را به‌صورت زیر گویا کنیم:

$$\frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

فعالیت

توضیح دهید که مخرج هر یک از کسرهای زیر چگونه گویا شده است. هر جا لازم است حل را کامل کنید.

الف) $\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$

ب) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$

ج) $\frac{4}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{4}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{2}$

د) $\frac{2\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{2^2}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{14}}{2}$

ه) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2x}}{x}$
($x > 0$)

و) $\frac{5}{\sqrt[3]{z^2}} \times \frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{z}} = \frac{5\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{z^3}} = \frac{5\sqrt[3]{z}}{z}$
($z \neq 0$)

کار در کلاس

۱) $\sqrt{98} - \sqrt{50} + \sqrt{128} = \sqrt{7^2 \times 2} - \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt{8^2 \times 2} = 7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

۲) $\sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48} = \sqrt{3^2 \times 3} - \sqrt{2^2 \times 3} - \sqrt{5^2 \times 3} + \sqrt{4^2 \times 3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 0$

۳) $5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{128} = 5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{3^3 \times 2} - 4\sqrt[3]{2^7} = 5\sqrt[3]{2} + 3 \times 2\sqrt[3]{2} - 4 \times 2\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2} - 8\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

۴) $\sqrt{4 + \frac{1}{81} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{324 + 1 + 36}{81}} = \sqrt{\frac{361}{81}} = \frac{19}{9}$

۵) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3}) = 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{3} + 3\sqrt{2} \times \sqrt{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{3}$
 $= 3\sqrt{2^2} - \sqrt{6} + 3\sqrt{6} - \sqrt{3^2} = 6 - \sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 3 = 3 + 2\sqrt{6}$

۱- عبارتهای زیر را ساده کنید.

الف) $2\sqrt{50} + \sqrt{32} + 2\sqrt{72}$ ج) $\sqrt[3]{27^3}$ د) $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2})$

ب) $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50}$ و) $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27}$ د) $\sqrt[3]{\frac{-27}{64}}$

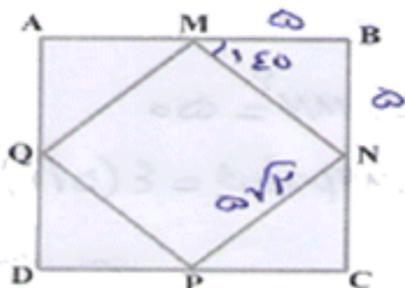
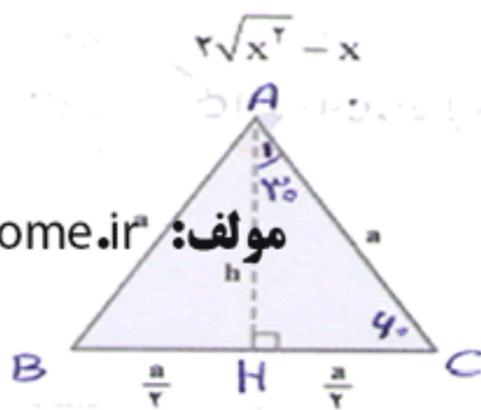
۲- اگر $x < 0$ باشد حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

۳- محیط و مساحت مربعی به طول ضلع $3\sqrt{5}$ سانتیمتر را به دست آورید.

۴- شکل مقابل یک مثلث متساوی الاضلاع را به ضلع a نشان می دهد. اندازه ارتفاع h را بر حسب a به دست آورید؛ سپس مساحت آن را بر حسب a بنویسید.

math-home.ir

مؤلف:



۵- نقاط M, N, P, Q وسطهای اضلاع مربع $ABCD$ هستند. اگر مساحت مربع $ABCD$ 100 متر مربع باشد، محیط مربع $MNPQ$ چقدر است؟

تعمیر

الف) $2\sqrt{50} + \sqrt{32} + 2\sqrt{72} = 2\sqrt{25 \times 2} + \sqrt{16 \times 2} + 2\sqrt{36 \times 2} = 10\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$

ب) $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50} = \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{64 \times 2} - \sqrt{25 \times 2} = 2\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

ج) $\sqrt[3]{27^3} = \sqrt[3]{(3^3)^3} = \sqrt[3]{(3^3)^3} = \sqrt[3]{9^3} = 9$

د) $\sqrt[3]{\frac{-27}{64}} = \sqrt[3]{\frac{(-3)^3}{4^3}} = \sqrt[3]{(-\frac{3}{4})^3} = -\frac{3}{4}$

ه) $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2}) = \sqrt{20} + \sqrt{4} - \sqrt{50} - \sqrt{10} = \sqrt{4 \times 5} + 2 - \sqrt{25 \times 2} - \sqrt{10} = 2\sqrt{5} + 2 - 5\sqrt{2} - \sqrt{10}$

و) $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27} = 2\sqrt{16 \times 3} - 3\sqrt{9 \times 3} = 2 \times 4\sqrt{3} - 3 \times 3\sqrt{3} = 8\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

$2\sqrt{x^2} - x = 2|x| - x \stackrel{x < 0}{=} -2x - x = -3x$

محیط = $4 \times 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$ ، مساحت = $3\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 9\sqrt{25} = 9 \times 5 = 45$

$AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

$\Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ ($\hat{H} = 90^\circ, \hat{A}_1 = 30^\circ$) $\Rightarrow CH = \frac{1}{2}AC$ نتیجتاً

($\hat{H} = 90^\circ, \hat{C} = 40^\circ$) $\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$

$ABCD$ مساحت $S = 100 \Rightarrow AB = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow BM = AM = \frac{10}{2} = 5$

$\hat{B} = 90^\circ \Rightarrow MN^2 = BM^2 + BN^2 \Rightarrow MN^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow MN^2 = 50$

$\Rightarrow MN = \sqrt{50} \Rightarrow MN = \sqrt{25 \times 2} \Rightarrow MN = 5\sqrt{2} \Rightarrow$ محیط $MNPQ = 4(5\sqrt{2}) = 20\sqrt{2}$

($\hat{B} = 90^\circ, \hat{M}_1 = \hat{N}_1 = 45^\circ$) $\Rightarrow MN = \sqrt{2} BM$

نتیجتاً

فصل پنجم

x	x ²	6x	x ² +6x+9	(x+3) ²
-2	4	-12	4-12+9=1	(-2+3) ² =1
0	0	0	9	9
5	25	30	25+30+9	44
$\frac{2}{2}$	$\frac{4}{4}$	$4 \times \frac{2}{2} = 4$	$\frac{4}{4} + 4 + 9 = \frac{41}{4}$	$(\frac{2}{2} + 3)^2 = \frac{41}{4}$

مقدارهای دو ستون آخر جدول را با هم مقایسه کنید؛ نتیجه چیست؟ برابرند
حاصل عبارت‌های جدول را برای چند مقدار دیگر x ادامه دهید.

با توجه به مقادیر به دست آمده در دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟ دو ستون آخر با هم برابرند.
حاصل عبارت جبری (x+3)² را به دست آورید و آن را با عبارت جبری x²+6x+9 مقایسه کنید. **مؤلف:** math-home.ir

$$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$$

اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشد که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل یکسانی داشته باشد، برابری جبری حاصل از آنها را اتحاد جبری می‌نامیم.

بنابراین برابری $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ یک اتحاد است.

برابری $3x-2 = x+1$ را در نظر بگیرید. مقدار دو طرف تساوی را به ازای $x=2$ ، به دست آورید.

$$3 \times 2 - 2 = 2 + 1$$

آیا این برابری یک اتحاد است؟ برقراری این تساوی را به ازای چند مقدار دیگر برای x بررسی کنید. نتیجه
همان طور که می‌دانید به چنین برابری‌هایی معادله گفته می‌شود.

۲- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف) $(a+4)^2 = (a+4)(a+4) = a^2 + 4a + 4a + 16 = a^2 + 8a + 16$

ب) $(5x+2)^2 = (5x+2)(5x+2) = 25x^2 + 10x + 10x + 4 = 25x^2 + 20x + 4$

ج) $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

۲- با دقت در برابری $(5x+2)^2 = 25x^2 + 20x + 4$ ، که در فعالیت ۲ به دست آمده است به

سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

- جمله اول سمت راست برابری یعنی $25x^2$ چه رابطه‌ای با $5x$ دارد؟ مربع $5x$ می‌باشد.
- جمله دوم سمت راست برابری یعنی $20x$ چه رابطه‌ای با $5x$ و 2 دارد؟ در برابر حاصل ضرب آنها است.
- جمله سوم سمت راست برابری یعنی 4 چه رابطه‌ای با 2 دارد؟ مربع 2 .

عبارت جبری $5x+2$ دو جمله‌ای و $(5x+2)^2$ را مربع دو جمله‌ای می‌نامیم و برای سرعت بخشیدن

به عملیات جبری می‌توان مربع دو جمله‌ای را به صورت زیر محاسبه کرد:

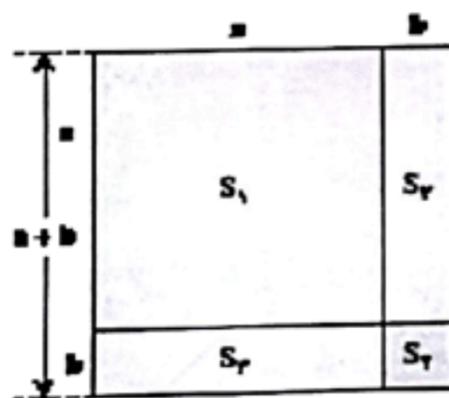
$$(5x+2)^2 = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 2 + 2^2$$

↓ مربع جمله اول
↓ مربع جمله دوم
↓ مربع
↓ دو برابر حاصل ضرب دو جمله

برای هر دو عدد مثبت a و b، به کمک مساحت‌های مشخص شده در شکل زیر، درستی اتحاد

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مقابل را نشان دهید.



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = S_1 + 2S_2 + S_3$$

مساحت کل شکل

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

۴- مانند سؤال ۲ فعالیت، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

الف) $(5x-2)^2 = (5x-2)(5x-2) = 25x^2 - 10x - 10x + 4 = 25x^2 - 20x + 4$

ب) $(3x-5x)^2 = (3x-5x)(3x-5x) = (-2x)(-2x) = 4x^2$

ج) $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

نوعی عدد زوج بود

۱- مربع دو جمله‌ای‌های زیر را با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست آورید.

الف) $(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

ب) $(4a+3b)^2 = 16a^2 + 24ab + 9b^2$

ج) $(x^2 - \frac{1}{2})^2 = x^4 - x^2 + \frac{1}{4}$

د) $(2xy - \frac{1}{2}x^2)^2 = 4x^2y^2 - 2x^3y + \frac{1}{4}x^4$

ه) $(\sqrt{2} + 3\sqrt{3})^2 = 29 + 6\sqrt{6}$

و) $(5 - 2\sqrt{2})^2 = 25 - 20\sqrt{2} + 8 = 33 - 20\sqrt{2}$

۲- جاهای خالی را با توجه به نمونه پُر کنید.

الف) $(2a+3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$

مربع جمله دوم دو برابر حاصل ضرب جمله اول
 مربع جمله دوم دو برابر حاصل ضرب جمله اول
 مربع جمله دوم دو برابر حاصل ضرب جمله اول
 جمله ها

جمله اول = $2a \Rightarrow (2a)^2 = 4a^2 =$ مربع جمله اول

$2(2a)(3b) = 12ab^2 =$ دو برابر حاصل ضرب جمله ها

$(2a+3b)^2 = 4a^2 + 12ab^2 + 9b^2$

در نتیجه داریم:

الف) $(1+b)^2 = 1 + 2b + b^2$

ب) $(xy - \frac{1}{2})^2 = x^2y^2 - xy + \frac{1}{4}$

ج) $(x^2 - \frac{1}{x})^2 = x^4 - 2 + \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$

د) $(4x - \frac{1}{2})^2 = 16x^2 - 4x + \frac{1}{4}$

فعالیت

در سال گذشته خاصیت بخشی عمل ضرب نسبت به عمل جمع را در چند جمله‌ای‌ها مطالعه کرده‌اید.

حاصل ضرب
 $a(b+c) = ab+ac$

اکنون اگر این برابری را مانند زیر به صورت حاصل ضرب دو عبارت بنویسیم، دو جمله‌ای $ab+ac$ را به حاصل ضرب عبارت‌ها تجزیه کرده‌ایم:

تجزیه
 $ab+ac = a(b+c)$

Scanned by CamScanner

(م.م.ب) بزرگ‌ترین مقسوم علیه (عامل) مشترک

چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید:

الف) $8x^2 + 12x = 4x \cdot 2x + 4x \cdot 3$

$= 4x(2x + 3)$
 (م.م.ب) = $4x$
 (با توجه به خاصیت بخشی)

ب) $4a^3x - 4a^3x^3 = 4a^3(x - x^3)$

ج) $7x^2 - 14x^2 + 21x^2 = 7x^2(x - 2x + 3)$

د) $5x^2y - 10xy^2 + 15x^2y = 5xy(x - 2y + 3x)$

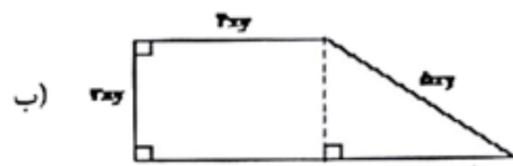
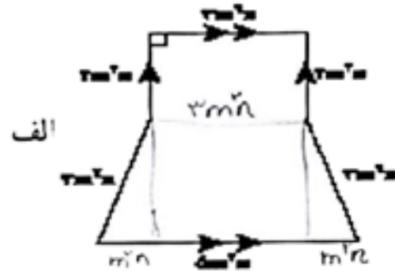
$5xy \cdot x - 5xy \cdot 2y + 5xy \cdot 3x = 5xy(x - 2y + 3x)$

۱- عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $(-5m)^2(-2m)^2 - (\frac{1}{2}m)^2(-2m)^2$ ب) $7a^2 - 4b^2 + 5c^2 - (a^2 - 9b^2 - 11c^2)$

ج) $(x^m - 1)(x^m - 1)$ د) $x - [(y-x) - (y-1)]$

۲- محیط و مساحت هر شکل را بیابید.



ارتفاع $= 9m^2n^2 - m^2n^2 = 8m^2n^2$
 ارتفاع $= \sqrt{8} m'n$

۳- طرف دیگر عبارت های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

الف) $(5y - 2x)^2 =$

ب) $(-3a^2 - a)^2 =$

ج) $(8x - \frac{1}{3})^2 =$

د) $(2/7)^2 + 2(2/7)(3/3) + (3/3)^2 =$

۴- به کمک اتحاد مربع دو جمله ای، درستی تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

ب) $a^2 + \frac{1}{a^2} = (a + \frac{1}{a})^2 - 2 \quad (a \neq 0)$

۵- عبارت های جبری زیر را تجزیه کنید.

الف) $2x^2 + 8x + 8 = 2x(x + 2 + \frac{4}{x})$ ب) $2a^2b - 12ab^2 + a^2b^2 = ab(2a - 12b + ab)$

ج) $a(x+1) + b(x+1) = (x+1)(a+b)$ د) $a^2 - 2a + 1 = a(a - 2 + 1) = a(a-1)$

ه) $x^2y^2 - 4xy + 4 = (xy - 2)^2$ و) $25x^2 + 30x^2 + 9x^2 = x^2(25 + 30 + 9)$

۶- با تبدیل b به -b در اتحاد $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ طرف دوم تساوی زیر را کامل کنید.

$\frac{(a+(-b))^2}{(a-b)^2} = a^2 + 2(a)(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

سوال

پاسخ تقریباً ۸۴

① $2am^2x(-1m^2) - \frac{1}{2}m^2x(-1m^2) = -2am^2x + \frac{1}{2}m^2x = -\frac{3}{2}m^2x$

② $\sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2} + 5c^2 - a^2 + 9b^2 + 11c^2 = 4a^2 + 5b^2 + 14c^2$

③ $x^2 - 2x + 1$

④ $x - [y - x - y + 1] = x + x - 1 = 2x - 1$

$h^2 = 9m^2n^2 - m^2n^2 = 8m^2n^2$
 $h = m'n\sqrt{8}$
 ارتفاع ذوزنقه

Scanned by CamScanner

① $\frac{1}{2} = 2m^2n + 2m^2n + am^2n + 2m^2n + 2m^2n + 2m^2n = 11m^2n$

مساحت = $2m^2n \times 2m^2n + \frac{m'n\sqrt{8}(2m^2n + am^2n)}{2} = 4m^4n^2 + 2m^3n^2\sqrt{8}$

ابتدا با استفاده از رابطه فیثاغورس ضلع مثلث را محاسبه می کنیم

② $25x^2y^2 - 9x^2y^2 + (\text{ضلع مجهول})^2$
 $(\text{ضلع مجهول})^2 = 25x^2y^2 - 9x^2y^2 = 16x^2y^2 \rightarrow \text{ضلع مجهول} = 4xy$

مساحت = $2xy + 2 \times 2xy + 4xy + 4xy = 12xy$

مساحت = $2xy \times 2xy + 2xy \times 2xy \times \frac{1}{2} = 4x^2y^2 + 2x^2y^2 = 6x^2y^2$

- سوال ۳
- ۱) $25x^2 - 30xy + 9x^2$
 - ۲) $9a^2 + 4a^2 + a^2$
 - ۳) $25x^2 - \frac{17}{3}x + \frac{1}{9}$
 - ۴) $(2,7 + 3,4)^2 = 9^2 = 81$

مربع دوم طرف اول = $x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 4xy$

مربع اول = $a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$

۱- حاصل عبارت زیر را به دو روش انجام داده ایم؛ آنها را کامل کنید.

روش اول درجین بودیم درج اضافه کردیم

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ac + bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

روش دوم:

$$((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

به کمک نتیجه این فعالیت، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$$

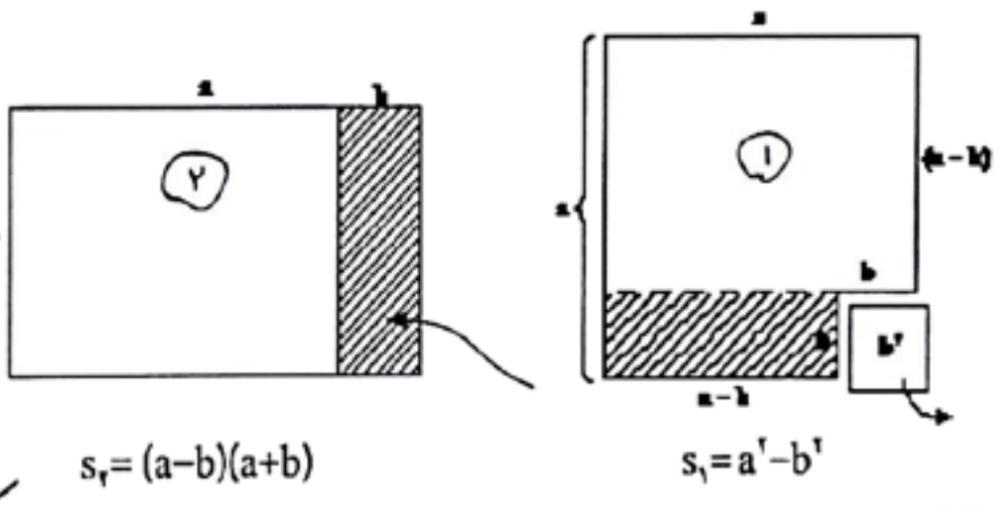
۲- با استفاده از ضرب عبارات های جبری، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

اتحاد مزدوج $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

این اتحاد را به صورت کلامی بیان کنید. مربع جمله اول منهای مربع جمله دوم اگر a و b مثبت و $b < a$ باشد به کمک شکل های زیر درستی اتحاد $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ را

تقسیم هاشور خورده از شکل ۱ را برداریم و به سمت راست آن اضافه می کنیم تا شکل ۲ حاصل شود. مساحت شکل ۲ را بدست می آوریم. کم مساحت هر دو برابر است.



کار در کلاس

۱- تساوی های زیر را با استفاده از اتحاد مناسب کامل کنید.

- ۱) $(1+a)(1-a) = 1 - a^2$
- ۲) $(2a+5)(2a-5) = 4a^2 - 25$
- ۳) $(t+\frac{3}{t})(t-\frac{3}{t}) = t^2 - 9$
- ۴) $(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

۲- حاصل عبارت های زیر را مانند نمونه با استفاده از اتحاد مزدوج به دست آورید.

- ۱) $(10-x)(x+10) = (10-x)(10+x) = 100 - x^2$
- ۲) $(-y-2z)(-2z+y) = (-2z-y)(-2z+y) = 4z^2 - y^2$
- ۳) $(-7y+t)(t+7y) = (t-7y)(t+7y) = t^2 - 49y^2$
- ۴) $(-4y-2z)(2z-4y) = (-4y-2z)(-4y+2z) = 16y^2 - 4z^2$
- ۵) $(x-2y+5)(x+2y-5) = [x-(2y-5)][x+(2y-5)] = x^2 - (2y-5)^2 = x^2 - (4y^2 - 20y + 25) = x^2 - 4y^2 + 20y - 25$

اتحاد مزدوج در تجزیه عبارت‌های جبری نیز استفاده می‌شود.

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

با توجه به این تساوی، جای خالی را پر کنید.

$$1) x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

$$2) 4y^2 - \frac{1}{4}z^2 = \left(2y + \frac{1}{2}z\right)\left(2y - \frac{1}{2}z\right)$$

$$3) (2x+1)^2 - y^2 = [(2x+1) - \frac{y}{2}][\frac{y}{2} + (2x+1)]$$

$$4) 1 - (3a+z)^2 = [1 - (3a+z)][1 + (3a+z)]$$

$$= (1-3a-z)(1+3a+z)$$

$$5) (2x+1)^2 - (3x+4)^2 = [(2x+1) - (3x+4)][(2x+1) + (3x+4)]$$

$$= (-x-3)(5x+5)$$

$$6) x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$$

$$= (x^2 + y^2)(x+y)(x-y)$$

نفسه کار فرست

کار در کلاس

۱- محسن قصد دارد عبارت جبری زیر را تجزیه کند.

$$4x^2 - (7-3y)^2$$

محسن با توجه به شکل عبارت جبری به فکر استفاده از اتحاد مزدوج می‌افتد و این عبارت را به کمک این اتحاد به صورت زیر تجزیه می‌کند.

$$(2x-7+3y)(2x+7-3y)$$

۸۷

$$A = 2x, B = 7-3y \Rightarrow (2x - (7-3y))(2x + (7-3y))$$

Scanned by CamScanner

به نظر شما، محسن در استفاده از اتحاد مزدوج، A و B را چگونه انتخاب کرده است؟
۲- استفاده از اتحادها، می‌تواند بعضی از محاسبات به ظاهر مشکل را به راحتی امکان‌پذیر کند.

به کمک اتحادها، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$98 \times 102 = (100-2) \times (100+2) = 100^2 - 2^2 = 10000 - 4 = 9996$$

$$497 \times 503 = (500-3) \times (500+3) = 500^2 - 9 = 250000 - 9 = 249991$$

$$(1001)^2 = (1000+1)^2 = 1000^2 + 2 \times 1000 + 1 = 1000000 + 2000 + 1 = 1002001$$

۱- حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

$$(3x+y)^2 - z^2 = 9x^2 + 6xy + y^2 - z^2$$

د) $(3x+y-z)(3x+y+z) =$

الف) $(\frac{1}{4} - x)(\frac{1}{4} + x) = \frac{1}{16} - x^2$

ب) $(5x+4)(5x+2) = 25x^2 + 30x + 8$

ه) $(x-1)(x+1)(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+1) = x^4 - 1$

ج) $(z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3}) = z^2 - 3$

و) $(x-2)(x+2)(x^2+3) = (x^2-4)(x^2+3) = x^4 - x^2 - 12$

۲- در قسمت‌های نقطه چین، با استفاده از اتحادها، عبارت‌های مناسب بگذارید.

الف) $(xy-z)(xy+z) = x^2y^2 - z^2$

ج) $(x+a)(x-b) = x^2 - bx + ax - ab$

ب) $(\frac{1}{4}y + \sqrt{5})(\frac{1}{4}y - \sqrt{5}) = \frac{1}{16}y^2 - 5$

د) $(x^2 + \sqrt{5})(x^2 - 5) = x^4 + 2x^2 - 5$

۳- عبارات زیر را به کمک اتحادها، تجزیه کنید.

الف) $a^2 - 8a + 15 = (a-3)(a-5)$

و) $x^2 - 13x + 36 = (x-4)(x-9)$

ب) $x^2 + x + \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2$

ز) $x^2 - 12x + 36 = (x-6)(x-6) = (x-6)^2$

ج) $x^2 + 10x + 24 = (x+4)(x+6)$

ح) $(x+y)^2 - 9 = (x+y-3)(x+y+3)$

د) $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$

ط) $bx^2 - 5bx - 50b = b(x^2 - 5x - 50) = b(x-10)(x+5)$

ه) $4ax^2 - a$

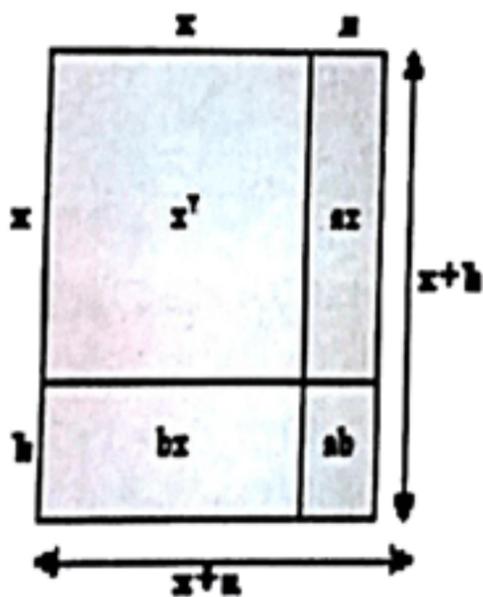
ی) $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2-1)(x^2-4) = (x+1)(x-1)(x-2)(x+2)$

۴- در اتحاد جمله مشترک اگر $a=b$ باشد، چه اتحادی به دست می‌آید؟ اگر a و b قرینه باشد،

کدام اتحاد به دست می‌آید؟ در پاسخ

۵- به کمک مساحت‌ها در شکل روبه‌رو، اتحاد

جمله مشترک را به دست آورید.



$$S = (x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab$$

$$= x^2 + x(a+b) + ab$$

$$(n+a)(n+b) \xrightarrow{a=b} (n+a)(n+a) = (n+a)^2$$

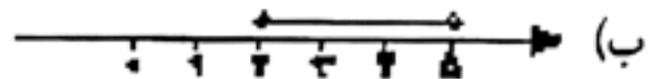
$$(n+a)(n+b) \xrightarrow{a=-b} (n+a)(n-a) = n^2 - a^2$$

۱- متناظر با هر یک از ناحیه‌های مشخص شده روی محور، یک نابرابری بنویسید.

$$-3 \leq x \leq 5$$



$$2 \leq x < 5$$



۲- درستی یا نادرستی هر یک از عبارات‌های زیر را بررسی کنید.

الف) اگر $a+b > 0$ آنگاه، a و b هر دو مثبت هستند. \times

ب) اگر $ab > 0$ آنگاه، a و b هم علامت هستند. \checkmark

ج) اگر $\frac{ab}{c} < 0$ آنگاه، a و b و c منفی هستند. \times

د) اگر $a'b < 0$ آنگاه، b منفی است. \checkmark

۳- عبارات‌های کلامی را به صورت جبری بنویسید.

• ۳ برابر عددی منهای یک از ۷ بزرگ‌تر است. $3x - 1 > 7$

• ۸ از قرینه دو برابر عددی به علاوه ۳ بزرگ‌تر است. $8 > -(2x + 3)$

فعالیت

۱- به دو طرف نابرابری زیر، عددهایی را مانند نمونه اضافه کنید. آیا نابرابری باز هم برقرار است؟

$$-3 < 1 \xrightarrow{+3} -3 + 3 < 1 + 3 \rightarrow 0 < 4$$

$$-3 < 1 \xrightarrow{-7} -3 - 7 < 1 - 7 \rightarrow -10 < -6$$

$$-3 < -2 \xrightarrow{-100} -3 - 100 < -2 - 100 \rightarrow -103 < -102$$

خاصیت ۱: اگر دو طرف یک نابرابری را با عددی مانند c جمع کنیم، نابرابری همچنان برقرار است؛ یعنی اگر $a > b$ آنگاه $a+c > b+c$.

۲- دو طرف نابرابری زیر را در عددهای مختلف ضرب کنید؛ آیا نابرابری باز هم برقرار است؟

$$-7 > -9 \xrightarrow{\times 3} -21 > -27$$

$$-7 > -9 \xrightarrow{\times (-3)} 21 < 27$$

۱- در جاهای خالی نمادهای < یا > را جایگزین کنید.

الف) $a-b=1$ در این صورت $a \square b$. ج) اگر $2(p-1)=2q-3$ در این صورت $p \square q$. *روشن حل*

ب) اگر $u-v=-2$ در این صورت $u \square v$. د) اگر $\frac{a-b}{4} = -3$ در این صورت $a \square b$.

۲- علامت عددهای حقیقی a, b, c را طوری تعیین کنید که نابرابری‌های زیر برقرار باشد:

در صفحه قبل

د) $\frac{a^2}{bc} > 0$ ج) $ab > 0$ ب) $\frac{a}{bc} > 0$ الف) $\frac{ac}{b^2} < 0$

۳- مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را به دست آورید.

در صفحه قبل

الف) $2(x-3)+5 < 5-x$ ج) $\frac{y-3}{4} - 1 > \frac{y}{2}$

ب) $3-2x \geq 5(3-2x)$ د) $-2 - \frac{q}{4} \leq \frac{1+q}{3}$

۴- اگر $a' > b'$ آیا همواره می‌توان نتیجه گرفت، $a > b$ ؟ *نه حذر*

۵- اگر $a, b > 0$ و $a' > b'$ نشان دهید $a > b$ (از اتحاد مزدوج کمک بگیرید). *در صفحه بعد*

۶- عبارتهای کلامی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) اگر پول علی را سه برابر کنیم، حداقل ۳۰۰ تومان از دو برابر پولش بیشتر می‌شود. $3x \geq 2x + 300$
 ب) مجموع نصف عدد a و چهار برابر عدد b ، حداکثر ۶ واحد است.

۹۳ $\frac{a}{2} + 4b \leq 6$

سوال ۲ و ۳

الف) $\frac{ac}{b^2} < 0$
 الف) $\begin{cases} a > 0, c < 0 \rightarrow \frac{ac}{b^2} < 0 \\ a < 0, c > 0 \rightarrow \frac{ac}{b^2} < 0 \end{cases}$

ب) $\frac{a}{bc} > 0$
 ب) $\begin{cases} a > 0, b < 0, c < 0 \\ a < 0, b < 0, c > 0 \\ a < 0, b > 0, c < 0 \\ a > 0, b > 0, c > 0 \end{cases}$

ج) $ab > 0$
 ج) $\begin{cases} a > 0, b > 0 \\ a < 0, b < 0 \end{cases}$

د) $\frac{a^2}{bc} > 0$
 د) $\begin{cases} b > 0, c > 0 \\ b < 0, c < 0 \end{cases}$

الف) $2(x-3)+5 < 5-x \rightarrow 2x-6+5 < 5-x \rightarrow 2x-1 < 5-x \rightarrow 3x < 6 \rightarrow x < 2$
 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

ب) $3-2x \geq 5(3-2x) \rightarrow -2x+10 \geq 15-10x \rightarrow 8x \geq 5 \rightarrow x \geq \frac{5}{8}$
 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{5}{8}\}$

ج) $\frac{y-3}{4} > \frac{y}{2} \rightarrow y-3 > 2y \rightarrow -y > 3 \rightarrow y < -3$
 $D = \{y \in \mathbb{R} \mid y < -3\}$

د) $-2 - \frac{q}{4} \leq \frac{1+q}{3} \rightarrow -24-3q \leq 4+4q \rightarrow -28 \leq 7q \rightarrow -4 \leq q$
 $D = \{q \in \mathbb{R} \mid q \geq -4\}$

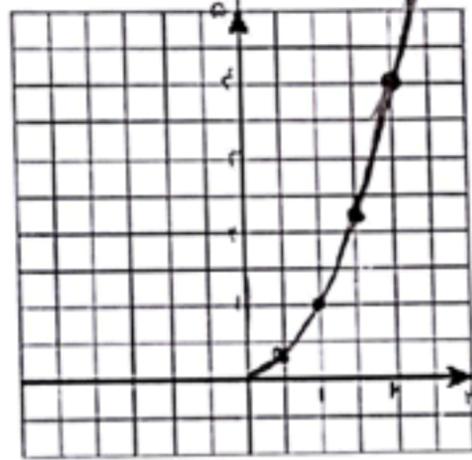
فصل ششم

۱- اگر طول ضلع یک مربع را با x و محیط آن را با y نشان دهیم، چه رابطه‌ای بین x و y هست؟ *چهار برابر x است.*

ضلع (x)	1	2	3	4	100	x
محیط (y)	4	8	12	16	400	$4x$

$y = 4x$

۲- اگر طول ضلع یک مربع را با x و مساحت مربع را با y نشان دهیم، بین x و y چه رابطه‌ای *مساوی با مجذور x است.* هست؟ پس از کامل کردن جدول زیر، هر نقطه را روی نمودار پیدا کنید.



ضلع x (سانتی‌متر)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
مساحت y (مربع سانتی‌متر)	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9
نقطه‌ها	$[0, 0]$	$[0.5, 0.25]$	$[1, 1]$	$[1.5, 2.25]$	$[2, 4]$	$[2.5, 6.25]$	$[3, 9]$

*
محورهای مختصات
متناسب با اعداد
جدول نموده‌باش

آیا این نقطه‌ها هم روی یک خط راست قرار گرفتند؟ *نه خیر.*

فعالیت

۱- معادله $y = -x + 10$ چند پاسخ دارد؟ پنج پاسخ آن را به صورت زیر بنویسید:

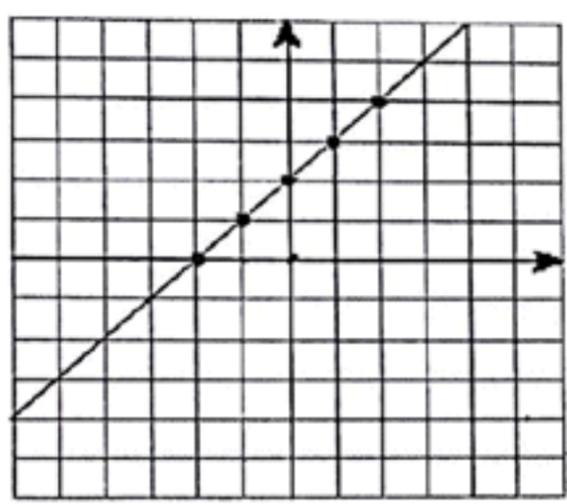
$$\begin{cases} x=1 \\ y=9 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=9 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=10 \\ y=0 \end{cases}$$

توضیح دهید چگونه پاسخ‌های مختلف این معادله را می‌توان پیدا کرد. *در هر نقطه x برابر با قرینه x به اضافه ۱۰*
آیا تساوی برای $x=2$ و $y=5$ برقرار است؟ *نه خیر.*
توضیح دهید چرا این تساوی معادله است و اتحاد نیست؟

$$5 \neq -2 + 10$$

چون به ازای مقادیر x مساوی برقرار است.

۲- در شکل زیر نمودار یک خط داده شده است. جدول زیر را با توجه به نمودار خط کامل کنید.



x (طول نقطه)	0	1	-1	2	-2
y (عرض نقطه)	2	3	1	4	0
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

عرض با طول به اضافه ۲ برابر است.

بین طول و عرض نقطه‌ها چه رابطه‌ای هست؟ این رابطه را به صورت یک معادله بنویسید. $y = x + 2$

۳- پنج جواب برای هر یک از معادله‌های زیر بنویسید.

$$2x - 4y = 7$$

$$y = 2x - 1$$

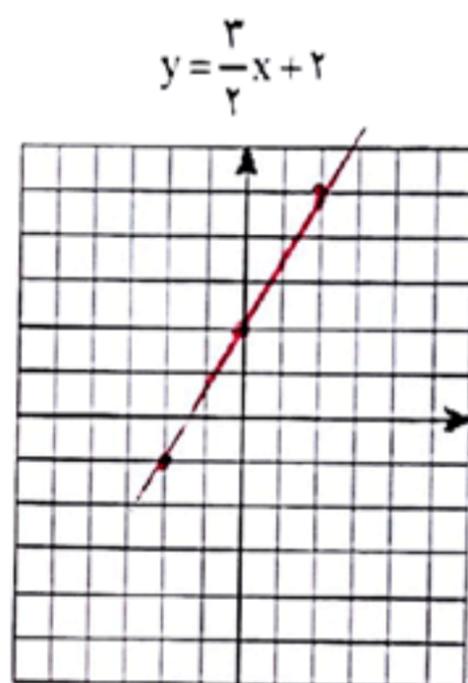
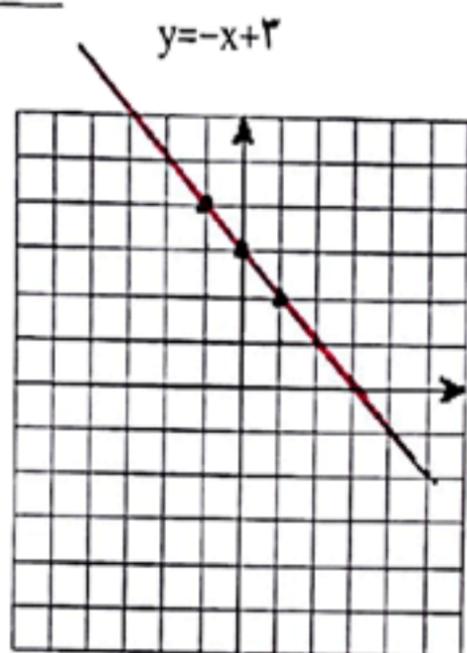
$$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=-1/2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=1/2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=-3/2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=-5/2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$$

توضیح دهید که پیدا کردن جواب در معادله سمت راست راحت‌تر و سریع‌تر است یا در معادله سمت چپ. *سمت راست.*

۱- نمودار خط‌های با معادله زیر را رسم کنید.

x	۰	۱	-۱
y	۳	۲	۴

$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$
--	--	---



x	۰	۲	-۲
y	۲	۵	-۱

$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$
--	--	--

۲- آیا خط $y = 2x$ از مبدأ مختصات (یعنی نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$) می‌گذرد؟ چرا؟ بله چون برای $x = 0$ $y = 0$ هم برقرار است.

۳- اگر در معادله $y = ax$ به جای a عددهای مختلفی قرار دهیم، به‌شمار معادله خطی مانند $y = 2x$ ، $y = -x$ ، $y = 2x$ و ... به دست می‌آید. آیا می‌توان گفت تمام این خط‌ها از مبدأ مختصات می‌گذرند؟ بله

$y = ax$ صورت کلی معادله خط‌هایی است که از مبدأ مختصات می‌گذرند.

فعالیت

۱- در هر مورد دو نقطه از یک خط داده شده است؛ ابتدا خط را رسم کنید و سپس مانند نمونه

با توجه به مختصات هر نقطه معادله خط را حدس بزنید.



$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
--	--

$y = 2x$



الف)

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
--	---

$y = -x$

ب)

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$
--	--

$y = \frac{1}{3}x$



۲- در فعالیت ۱ برای هر مورد مختصات دو نقطه دیگر را روی هر خط به دست آورید.

۹۹

$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$
--	--

$\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

۳- در قسمت (ب) کدام یک از نقطه‌ها با مختصات $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 6 \\ 20 \end{bmatrix}$ روی خط قرار دارد؟

x	0	-2
y	4	3
	[0]	[-2]
	[4]	[3]



۱- خط به معادله $y = \frac{1}{2}x + 4$ را رسم کنید.

$$-1 \neq \frac{1}{2}x + 4 = 5$$

الف) آیا نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ روی این خط است. خیر

[0]	[-1]
[4]	[0]

ب) مختصات نقطه‌های برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

ج) نقطه‌ای از خط به طول ۱- را پیدا کنید.

$$y = \frac{1}{2}x(-1) + 4$$

۱۰۰

$$y = -\frac{1}{2} + 4 = \frac{7}{2}$$

۲- طول یک فنر ۱۰ سانتیمتر است. وقتی وزنه‌ای به جرم x به آن وصل شود، طول فنر از رابطه

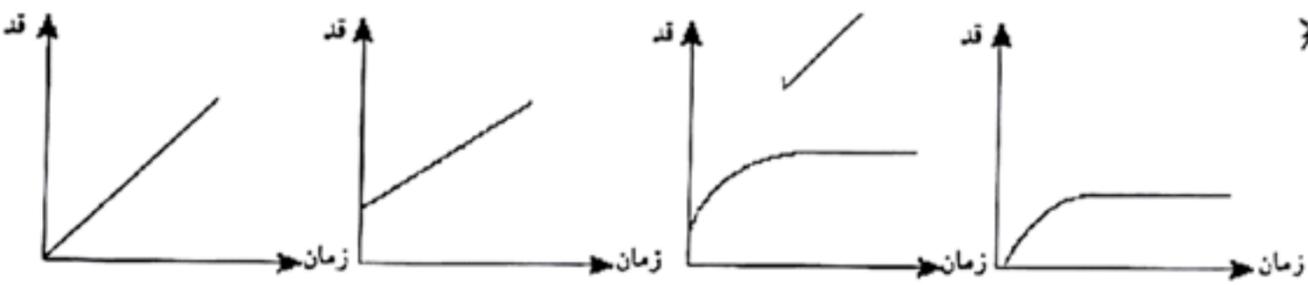
$y = 0.8x + 10$ پیدا می‌شود. اگر وزنه‌ای به جرم ۵ کیلوگرم به آن وصل شود، طول فنر چقدر می‌شود؟

۳- کدام یک از نمودارهای زیر رابطه رشد قد انسان را از هنگام تولد تا بزرگسالی نشان می‌دهد؟

با توجه به وضعیت‌های مختلف، نمودار آن را توصیف کنید؛ برای مثال بگویید محل برخورد نمودار

با محور y به چه معنا است. یعنی زمان تولد دایم قدر هم کم است. بعد از مدتی قد انسان دایم ثابت می‌ماند و افزایش

نمیدارد.



$$y = 0.8 \times 5 + 10 = 14$$

Sc

۴- دو نقطه از یک خط داده شده است؛ معادله خط را حدس بزنید. دو برابر در این سبب بهتر است با

$$y = 3x$$

الف) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$y = 3x + 1$$

تست ب و ج *

۵- مختصات محل برخورد خط به معادله $y = -x + 2$ را با محورهای مختصات بیابید.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

۶- مختصات نقطه‌ای از خط به معادله $y = -\frac{3}{5}x + 4$ را بیابید که طول آن نقطه ۵ باشد.

$$y = -\frac{3}{5} \times 5 + 4 = 1$$

۷- خط $y = -\frac{1}{2}x + 2$ را رسم کنید.

آیا نقطه $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد؟ نقطه‌ای به طول ۱- از این خط پیدا کنید.

نقطه‌ای به عرض ۲- از این خط پیدا کنید.

محل برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

$$3 = -\frac{1}{2}x(-2) + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x(-1) + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$-2 = -\frac{1}{2}x + 2 \rightarrow \frac{1}{2}x = 2 + 2 = 4 \rightarrow x = 8$$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$

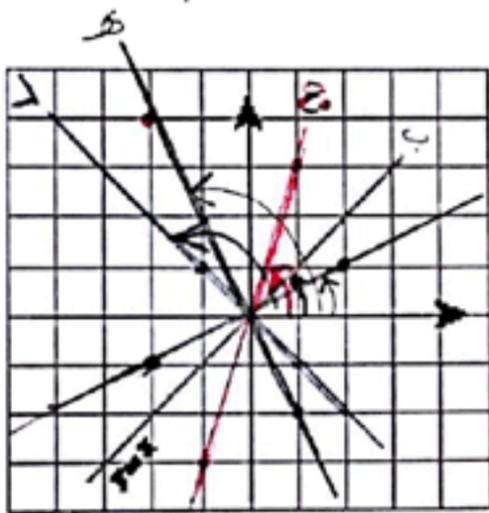
x	0	2
y	2	1
	[0]	[2]
	[2]	[1]



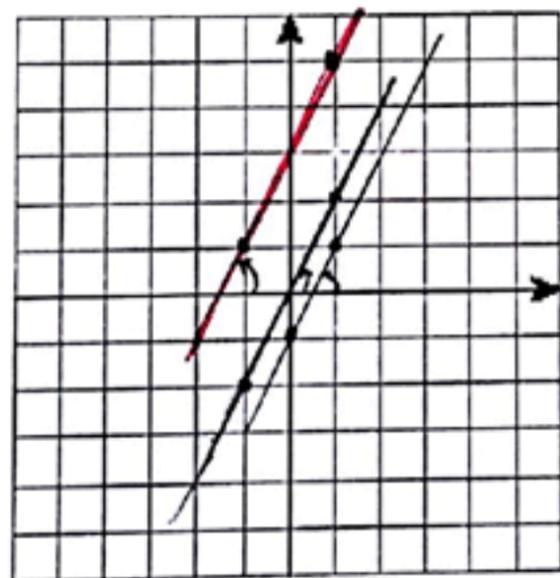
۱۰۱

۱- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه محور مختصات رسم کنید؛ هر خط را با یک رنگ بکشید.

الف) $y = \frac{1}{2}x$ ب) $y = x$ ج) $y = 2x$ د) $y = -x$ ه) $y = -2x$



در ضرب x یا زاویه 90° با محور x ها درست می‌کنند. در چیست؟ زاویه هر خط را مانند نمونه با قسمت مثبت محور x و y طول‌ها مشخص کنید. در خط‌های الف، ب و ج چه رابطه‌ای بین ضرب x و این زاویه وجود دارد؟ ضرب x مثبت است. زاویه درست شده زاویه تند است. خط‌های د و ه چه نوع زاویه‌ای با جهت مثبت محور x می‌سازد؟ زاویه باز.



۲- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید؛ هر خط را با یک رنگ بکشید.

$y = 2x - 1$, $y = 2x$, $y = 2x + 3$

در معادله این خط‌ها ضرب x برابر با ۲ است که به آن شیب خط می‌گوییم. تفاوت خط‌ها در چیست؟ زاویه خط‌ها را با محور x ها با هم مقایسه کنید؛ چرا این خط‌ها با هم موازی هستند؟ چون شیب‌ها برابر هستند. بین محل برخورد خط با محور عرض‌ها و عدد ثابت معادله چه رابطه‌ای می‌بینید؟ در همان عدد ثابت محور عرض‌ها را قطع کرده.

فاصله خطوط زیاد شود

در معادله خط $y = ax + b$ ، عدد a ، شیب خط نامیده می‌شود. با تغییر a زاویه خط با محور طول‌ها تغییر می‌کند. عدد b نشان‌دهنده محل برخورد خط با محور عرض‌ها است؛ به همین دلیل به آن عرض از مبدأ می‌گویند.

کار در کلاس

۱- در هر یک از معادله‌های زیر، شیب و عرض را از مبدأ خط مشخص کنید.
 $y = 2x - 4$ (شیب ۲، عرض از مبدأ -۴)
 $y = -\frac{2}{3}x$ (شیب -۲/۳، عرض از مبدأ ۰)
 $y = -2x + 1$ (شیب -۲، عرض از مبدأ ۱)
 ۲- معادله خطی بنویسید که:

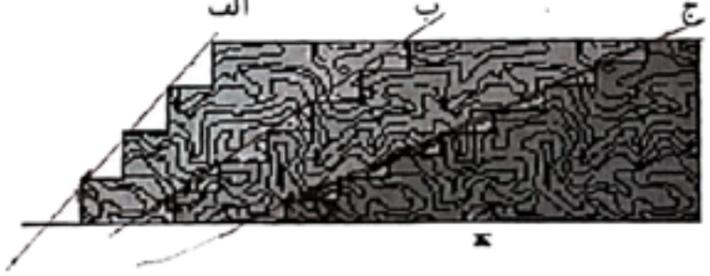
الف) شیب آن ۲- و عرض از مبدأ آن ۱- باشد. $y = -2x - 1$

ب) شیب آن ۱/۲ باشد و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند. $y = \frac{1}{2}x + 3$

ج) با خط $y = 2x + 1$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ بگذرد. $y = 2x + 4$

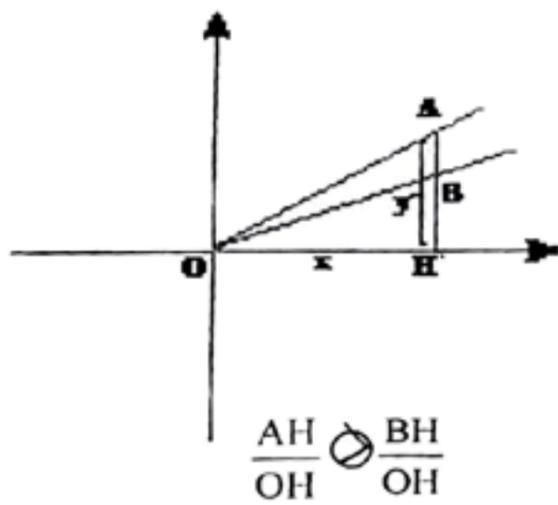
۳- معادله خطی بنویسید که شیب آن ۲ باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ بگذرد.

معادله خط $y = ax + b \rightarrow y = 2x + b \rightarrow 2 = 2 \times 1 + b \rightarrow b = 0 \rightarrow y = 2x$



۱- در این تصویر، سه نوع راه پله می بینید؛ در هر سه مورد ارتفاعی که بالا می روید یکسان است.

کدام راه پله شیب بیشتری دارد؟ الف
کدام یک، تعداد پله بیشتری دارد؟ ب
بالا رفتن از کدام یک راحت تر است؟ ج



۲- در محورهای مختصات مقابل، کدام خط شیب بیشتری دارد؟ OA
نقطه های A و B طول ثابتی دارند ولی عرض آنها متفاوت است.

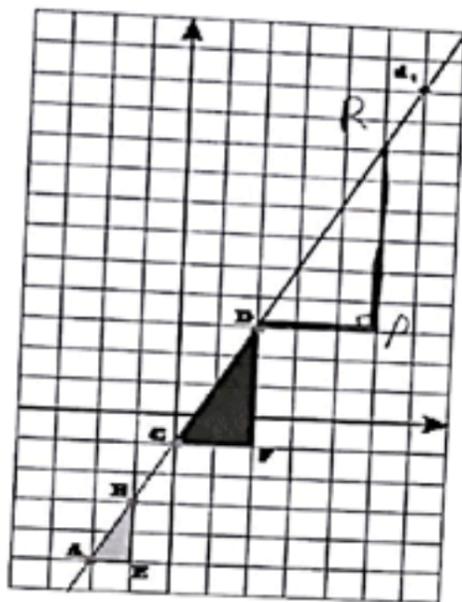
کدام یک از دو نسبت زیر بزرگ تر است؟ چرا؟
این دو نسبت چه ارتباطی با شیب خطها دارد؟

$$\frac{AH}{OH} \text{ و } \frac{BH}{OH}$$

۱۰۳

چون نقطه A بالا تر از نقطه B است.

AH بیشتر است مقدار شیب آن خط هم بیشتر است.
 BH کمتر است مقدار شیب آن هم کمتر است.



۳- روی خط d_1 به معادله $y = 2x - 1$ دو نقطه دلخواه مثل A و B در نظر گرفته ایم. با توجه به مثل قائم الزاویه ایجادشده، شیب خط را به دست آورده ایم.

$$\text{شیب خط } d_1 = \frac{EB}{EA} = \frac{2}{1} = 2$$

برای دو نقطه C و D نیز با توجه به مثل رسم شده، شیب خط را پیدا کنید. $\frac{FD}{CF} = \frac{2}{1} = 2$
دو نقطه دلخواه دیگر روی خط در نظر بگیرید و با رسم یک مثل قائم الزاویه شیب خط را دوباره پیدا کنید.

$$\frac{PR}{DP} = \frac{2}{1} = 2$$

۴- خط d_2 با محور طول، زاویه بزرگ تر از 90° می سازد؛ پس شیب خط، منفی می شود. با توجه به مثل های رسم شده مقدار شیب خط d_2 را پیدا کنید.

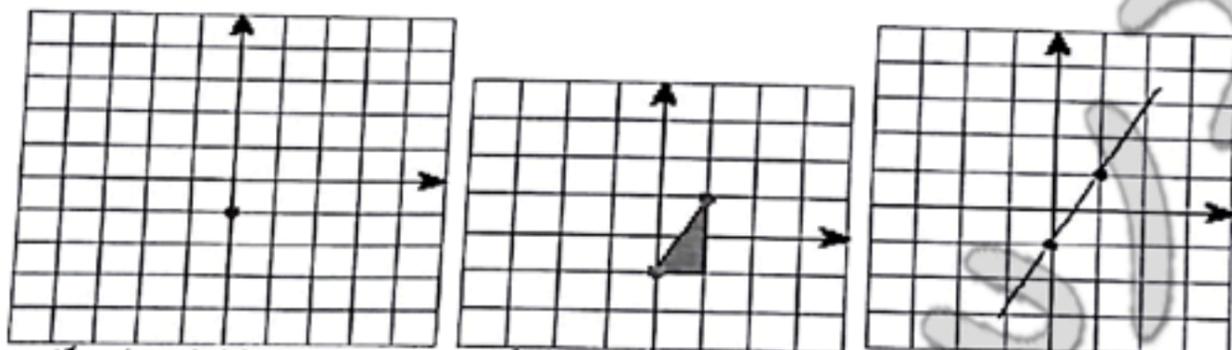
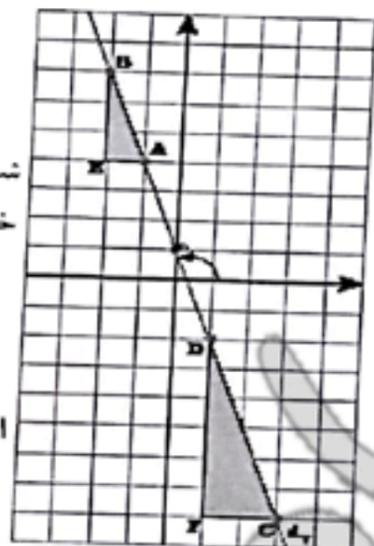
$$\text{شیب خط } d_2 = -\frac{EB}{EA} = -\frac{3}{1} = -3$$

خط d_2 محور عرض ها را در نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ قطع کرده است یا عرض از مبدأ آن ۱ است. معادله خط d_2 را بنویسید.

$$y = -3x + 1$$

۵- با توجه به این بیان از شیب خط در زیر مراحل رسم معادله خط

$y = 2x - 1$ با روش دیگری مشخص شده است؛ این روش را توضیح دهید. لطفاً رسم می باشد.



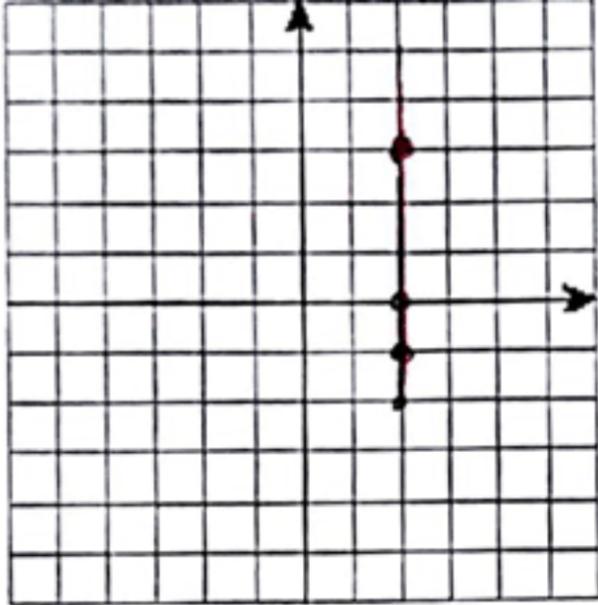
(۱) خط از این نقطه می گذرد. (۲) با توجه به مقدار شیب نقطه دیگر پیدا می شود. (۳) با داشتن دو نقطه خط رسم می شود.

۱۰۴

(۱) عرض از مبدأ مشخص می کند

(۲) شیب خط مشخص می شود و نقطه درست می آید.

(۳) دو نقطه درست آمده را بهم وصل و مقدار شیب ناحیه درست می آید.



۱- نقطه های $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ را در دستگاه مختصات نشان دهید و خطی را رسم کنید که از این دو نقطه می گذرد.

روی خط، دو نقطه انتخاب کنید و مختصات آنها را بنویسید. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

اگر نقطه دیگری روی این خط در نظر بگیریم، طول آن برابر است با: $\sqrt{2}$ خواهد بود.

یک نقطه دلخواه به طول $\sqrt{2}$ بنویسید و روی محور مختصات نشان دهید: $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
 تمام نقطه ها به طول $\sqrt{2}$ روی خط بالا قرار می گیرد و معادله آن به صورت $x=2$ است.
 ۲- صورت کلی معادله های خطی به صورت $ax+by=c$ است.

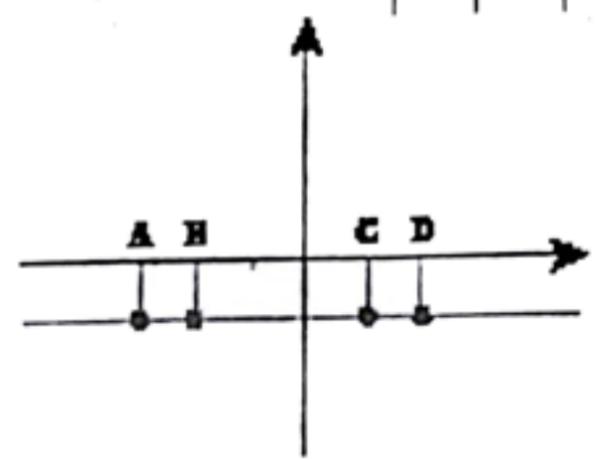
الف) با توجه به مقادیر نوشته شده، معادله خط را بنویسید: کدام خط از مبدأ می گذرد؟ خط دوم چون عرض

از مبدأ آن صفر است. $a=2, b=3, c=4 \rightarrow 2x+3y=4$
 $a=-1, b=2, c=0 \rightarrow -x+2y=0$

ب) با توجه به خط های داده شده، مقادیر a, b, c را پیدا کنید.
 $-2x+2y=2 \rightarrow a=-2, b=2, c=2$

ج) برای خط $x=2$ مقادیر a, b, c را بنویسید. $a=2, b=-k=-1, c=+1$
 $\alpha = -2, b = 1, c = +1$
 $2x - y = -1 \rightarrow y = 2x + 1$ یا $y - 2x = 1$

$ax + by = c \rightarrow x = 2$
 $a = 1, b = 0, c = 2$



۳- مختصات نقطه های مشخص شده را روی خط

$A = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$
 $C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

۱۰۵

این نقطه ها چه ویژگی مشترکی دارند؟ $y = -1$

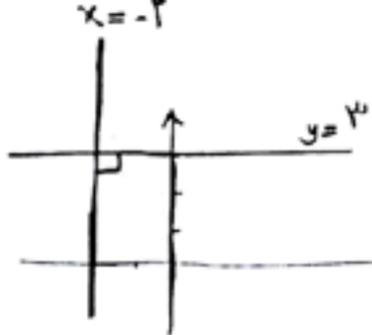
معادله خط رسم شده را بنویسید. در فرم کلی معادله های خطی به جای a, b, c چه عدد هایی قرار دهیم تا معادله خط رسم شده به دست آید؟

$ax + by = c$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 صغر ۱ -۱

۴- مانند نمونه برای خط های داده شده شیب و عرض از مبدأ را پیدا کنید.



شیب عرض از مبدأ
 $2y - 4x = 8 \rightarrow 2y = 4x + 8 \rightarrow y = \frac{4}{2}x + \frac{8}{2} \rightarrow y = 2x + 4$
 $2x - 2y = 6 \rightarrow -2y = -2x + 6 \rightarrow y = \frac{-3}{-2}x + \frac{6}{-2} \rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3$
 $x + 2y - 9 = 0 \rightarrow 2y = -x + 9 \rightarrow y = \frac{-1}{2}x + \frac{9}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

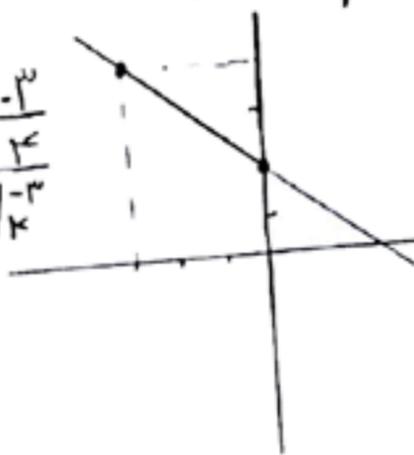


۱- خط‌های به معادله $x = -2$ و $y = 3$ را رسم و مختصات محل برخورد آنها را پیدا کنید. زاویه بین این دو خط چند درجه است؟ 90° درجه

۲- معادله محور طول‌ها و محور عرض‌ها را بنویسید؛ محل برخورد آنها چه نقطه‌ای است؟
 ۳- شیب و عرض از مبدأ خط‌های زیر را پیدا و سپس آن خط‌ها را رسم کنید.

$$3y = 2x + 4 \rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

x	0	-3
y	2	0
	1/2	1/3



$$2x - 2y = 8$$

$$-2y = -2x + 8$$

$$y = \frac{1}{2}x - 4$$

x	0	1
y	-4	-2
	1/2	1/2



$$2x - y = 3$$

$$-y = -2x + 3$$

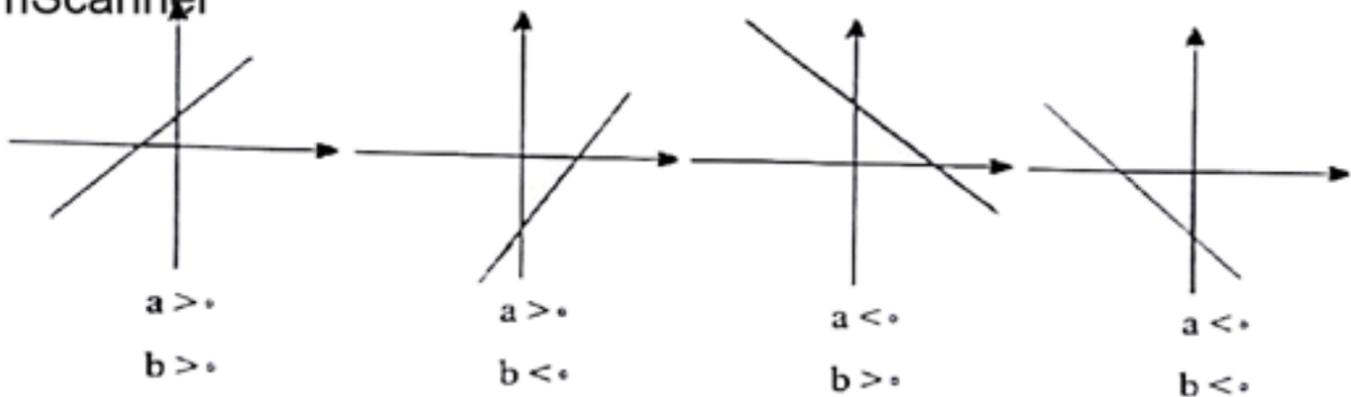
$$y = 2x - 3$$

x	0	1
y	-3	-1
	1/2	1/2

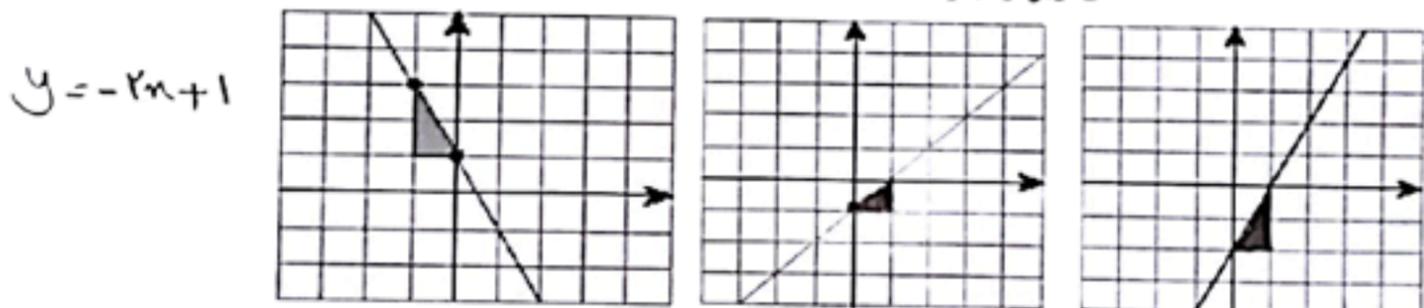


۴- خط $y = ax + b$ را در نظر بگیرید. در هر یک از حالت‌های مورد نظر، خط را مانند نمونه در دستگاه مختصات رسم کنید.

Scanned by CamScanner



۵- معادله خط‌های زیر را بنویسید.



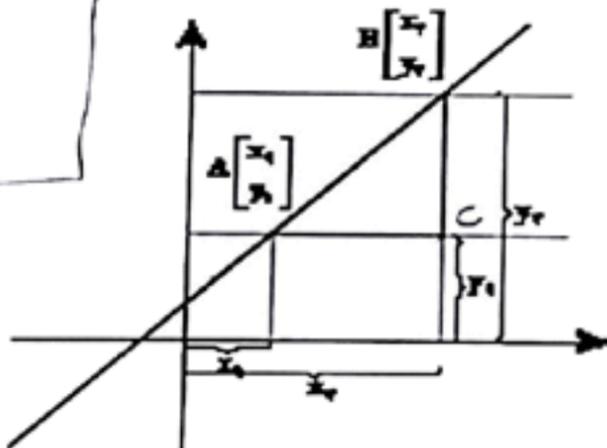
$$2y = 5x + 5 \rightarrow y = \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$y = 2x + b \xrightarrow{1-1} -1 = 2x + b$$

$$b = -1 - 2 = -3$$

$$y = 2x - 3$$

۶- معادله خطی بنویسید که با خط $2y - 4x = 5$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ بگذرد.
 ۷- با توجه به شکل مقابل نشان دهید.



$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{شیب خط} = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

۸- دو نقطه از یک خط هستند؛ شیب خط را پیدا کنید و معادله خط را بنویسید.
 $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
 $\text{شیب} = \frac{2 - (-1)}{3 - 4} = \frac{3}{-1} = -3$

$$1.7 \quad y = -3x + b$$

$$\xrightarrow{1/2} 2 = -3 \times 3 + b \rightarrow 2 + 9 = b \rightarrow b = 11$$

با رسم خط‌ها، دستگاه معادله‌های خطی زیر را حل کنید؛ یعنی یک جواب مشترک برای دو معادله پیدا کنید.

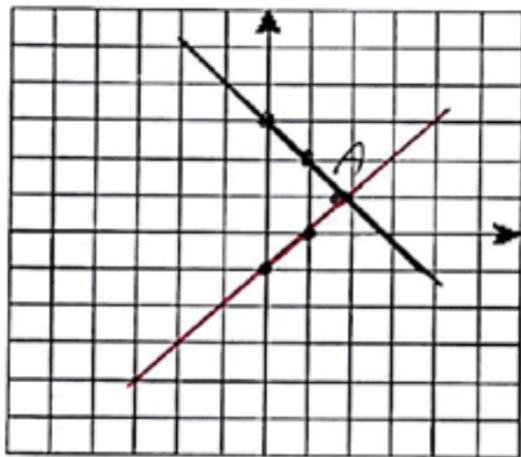
$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x-y=1 \rightarrow y=x-1 \\ x+y=3 \rightarrow y=-x+3 \end{cases}$$

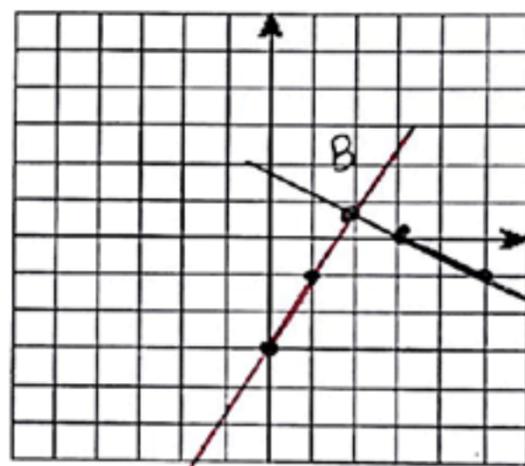
$$\begin{cases} 2x-y=3 \rightarrow y=2x-3 \\ x+2y=3 \rightarrow y=-\frac{x}{2}+\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & -3 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 3 & 2 \end{array}$$



$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

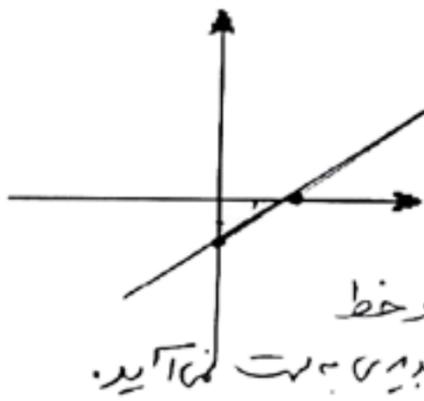


$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 3 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$$

فعالیت

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & -\frac{x}{2} & 0 \end{array}$$



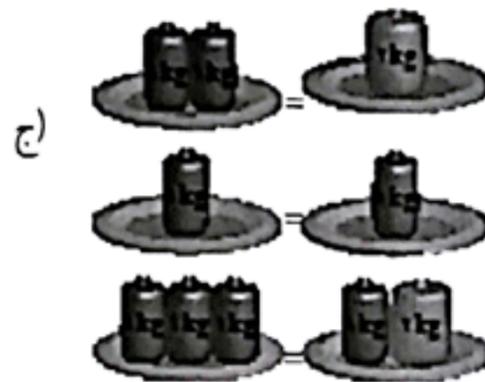
۱- خط $2x-2y=4$ را رسم کنید. خط به معادله $4x-6y=8$ که در آن تمام عددهای معادله بالا دو برابر شده است را رسم کنید. الف) آیا خط جدیدی به دست آمد؟ خیر ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر تمام ضرایب‌های عددی یک معادله خط را در یک عدد ضرب کنیم دو خط برهم منطبق خواهند بود و خط ج) آیا می‌توان گفت این دستگاه معادله خطی بی‌شمار جواب جدید به دست می‌آید. دارد؟ چرا؟ بله. چون دو خط برهم منطبق شده و بی‌شمار نقطه مشترک خواهند داشت.

۱۰۹

$$\begin{array}{r} 2=2 \\ + 5=5 \\ \hline 7=7 \end{array} \text{ الف)}$$

$$\begin{array}{r} x=x \\ + 2x=2x \\ \hline 3x=3x \end{array} \text{ ب)}$$

۲- به مثال‌های زیر توجه کنید:



Scanned by CamScanner

از این مثال چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر دو طرف دو تساوی را با هم جمع کنیم، باز نیز تساوی خواهیم داشت.

۳- با توجه به نتیجه‌هایی که از سوال‌های بالا گرفتید، توضیح دهید که چگونه دستگاه معادله‌های

زیر حل شده است. در هر قسمت مشخص کنید از کدام نتیجه استفاده شده است.

با جمع طرفین یکی از مجهولات حذف می‌شوند

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=3 \end{cases} \text{ الف)} \\ + \\ \hline 2x=4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \times \begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2y=4 \end{cases} \text{ ب)} \\ + \\ \hline \begin{cases} 4x-2y=6 \\ x+2y=4 \end{cases} \\ \hline 5x=10 \end{array}$$

با ضرب عددی طرفین تساوی یکی از ضرایب‌ها برابر می‌شود و با جمع طرفین یکی از مجهولات حذف می‌شود و مانند قسمت الف حل می‌شود.

$$x=2 \text{ و } x+y=3$$

$$x=2 \text{ و } x+2y=4$$

$$2+2y=4$$

$$2y=2 \rightarrow y=1$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ : جواب دستگاه}$$

$$2+y=3 \rightarrow y=1$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ : جواب دستگاه نیز بدست می‌آید}$$

و تساوی‌ها هم برقرار است و یکی از مجهولات محاسب می‌شود پس با جای‌گذاری مجهول دوم جواب دستگاه نیز بدست می‌آید.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + 4y = 14 \end{cases}$$

$$x = \frac{34}{5} - 7 = \frac{1}{5}$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 5 & 18 \end{array}$$

$$y = \frac{18}{5}$$

۱- دستگاه‌های زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{3} = \frac{1}{6} \rightarrow 3x - 3 - 2y + 2 = 1 \rightarrow 3x - 2y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

در با ۸

دو عدد تواندار با پایه‌های مختلف ۲- یک جواب برای x و y لطوری تعیین کنید که تساوی زیر برقرار باشد.

برابر صفت باشد پس $x+y-1=0$ و $2x-7-2=0$ خواهد بود

۳- معادله خطی بنویسید که از محل برخورد دو خط $x-y=1$ و $x+y=1$ بگذرد و شیب آن $-\frac{2}{3}$ باشد.

$$y = -\frac{2}{3}x + b \rightarrow 0 = -\frac{2}{3}x + b \rightarrow b = \frac{2}{3}$$

۴- در معادله $y=ax+1$ اگر به جای a عددکهای مختلفی قرار دهیم، معادله خط‌های زیادی به دست می‌آید.

به ازای $a=1$ و $a=2$ و $a=-1$ این خط‌ها را رسم کنید؛ این خطوط چه ویژگی مشترکی دارد؟

۵- در یک مزرعه، ۲۰ شترمرغ و گاو وجود دارد. باهای آنها ۵۶ عدد است. همه از نظم

$$\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 4x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

سوال ۱) $\begin{cases} 2x - 7 - 2 = 0 \rightarrow 2x = 9 \rightarrow x = \frac{9}{2} \\ x + y - 1 = 0 \rightarrow \frac{9}{2} + y - 1 = 0 \rightarrow y = 1 - \frac{9}{2} \end{cases}$

$$\begin{array}{r|l} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array}$$



سوال ۲

هر سه خط یک جواب مشترک دارند

چند شتر مرغ و چند گاو وجود دارد؟ (شتر مرغ ۲ پا و گاو ۴ پا دارد)

پاسخ در صفحه قبل

۶- دستگاه معادله خطی زیر را از دو روش حذفی و ترسیمی حل کنید.

صفحه قبل

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$$

آیا این دستگاه جواب دارد؟

شیب هر دو خط را به دست آورید. توضیح دهید چرا نقطه مشترکی به عنوان جواب معادله به دست نمی آید.

۷- مجموع سن علی و پدرش ۷۰ سال و اختلاف آنها ۲۶ سال است. سن هر یک را با تشکیل دستگاه معادلات به دست آورید.

۱۱۲

سن علی = x

سن پدر = y

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ y - x = 26 \end{cases}$$

$$x + y = 70$$

$$x = 70 - 48 = 22$$

سن علی

$$2y = 96$$

$$y = 48$$

سن پدر

شتر مرغ x و گاو

پاسخ ۱۱۲

سوال ۵

$$-2x \begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 2y = 54 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 2y = -40 \\ 4x + 2y = 54 \end{cases}$$

$$\hline 2x = 14$$

$$x = 7$$

$$x + y = 20$$

$$y = 20 - 8 = 12$$

$$-2x \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x + 6y = 14 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$$

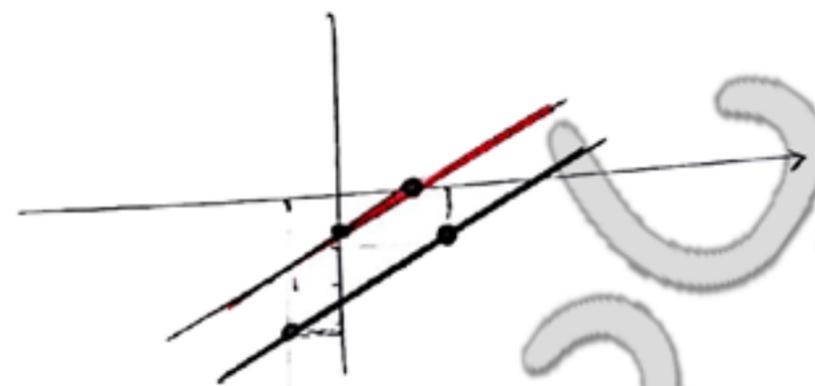
سوال ۶ دستگاه معادله جواب ندارد.

$$2x - 3y = 7$$

x	-1	2
y	-3	-1
	-1	2
	-3	-1

$$4x - 6y = 5$$

x	0	$\frac{5}{4}$
y	$-\frac{5}{6}$	0
	0	$\frac{5}{4}$
	$-\frac{5}{6}$	0



دو خط با هم موازیند و محل برخورد ندارند

$$2x - 3y = 7 \rightarrow -3y = -2x + 7 \rightarrow y = \frac{-2}{-3}x + \frac{7}{-3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$$

$$4x - 6y = 5 \rightarrow -6y = -4x + 5 \rightarrow y = \frac{-4}{-6}x + \frac{5}{-6} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$$

شیب خطها برابرند پس خطوط موازیند و هرگز تقاطع نمی کنند

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$$

در نتیجه معادله جواب ندارد

فصل ہفتم

هر یک از عبارت های زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف شده است؟

عصا کاغذی

الف) $\frac{8x+5}{2}$

ب) $\frac{7+x}{x} \quad x \neq 0$

ج) $\frac{2b+1}{2b-1} \quad 2b-1=0 \rightarrow b = \frac{1}{2}$

د) $\frac{3x}{x^2+4}$

ه) $\frac{x}{x^2-1} \rightarrow x^2-1=0$
 $x_1 = -1$
 $x_2 = 1$

و) $\frac{a+5}{a^2-5a+6} \quad a^2-5a+6=0$
 $(a-2)(a-3)=0$
 $a=2$ یا $a=3$

ساده کردن یک عبارت گویا

کسر $\frac{36}{48}$ با کسرهای $\frac{9}{12}$ ، $\frac{6}{8}$ ، $\frac{18}{24}$ و $\frac{3}{4}$ مساوی است. بین این کسرها $\frac{3}{4}$ کسری است که

دیگر قابل ساده شدن نیست؛ در واقع:

$$\frac{36}{48} = \frac{3 \times 12}{4 \times 12} = \frac{3}{4}$$

در ساده کردن هر عدد گویا می توان صورت و مخرج را به عددی غیر صفر تقسیم کرد؛ یعنی

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0, c \neq 0)$$

به همین ترتیب برای عبارت گویای $\frac{AC}{BC}$ داریم:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0 \text{ و } C \neq 0 \text{ و } C \text{ چند جمله ای هستند})$$

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از عبارت های گویای زیر چگونه ساده شده است؟ هر جا لازم است حل را کامل کنید (چگونگی استفاده از اتحادها و تجزیه را در هر مورد توضیح دهید).

الف) $\frac{18y^3}{60y^5} = \frac{3}{10y^2}$

الف) $\frac{4x^4y^3}{10y^4x^6y^3} = \frac{2}{5x^2y}$

ب) $\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+3} = \frac{(x+3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x+3}{x+1}$

۱۱۶

از تجزیه صورت و مخرج استفاده شده است
 سپس عبارت مشترک با هم ساده شده است

از ب. م. م. صورت و مخرج استفاده شده است

ج) $\frac{y^2-9}{3y+9} = \frac{(y+3)(y-3)}{3(y+3)} = \frac{y-3}{3}$

د) $\frac{8ab^2}{20a^2b^2} = \frac{2b^2 \times 4ab^2}{5a \times 4ab^2} = \frac{2b^2}{5a}$

ه) $\frac{b-5}{5-b} = \frac{b-5}{-(b-5)} = -1$

فضا کاغذی

کار در کلاس

۱- عبارت های گویای زیر را ساده کنید:

الف) $\frac{m^2-16}{4-m} = -\frac{(m-4)(m+4)}{-(m-4)}$

ب) $\frac{6m+18}{7m+21} = \frac{6(m+3)}{7(m+3)} = \frac{6}{7}$

ج) $\frac{(a+2)(a-7)}{(a+2)(a-1)} = \frac{a-7}{a-1}$

د) $\frac{x^2-y^2}{y-x} = \frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{-(x-y)} = \frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}{-(x-y)}$

۲- عبارت $\frac{a+ax}{a}$ به دو شکل ساده شده؛ کدام درست و کدام نادرست است؟

الف) نادرست $\frac{a+ax}{a} = a+x$

ب) درست $\frac{a+ax}{a} = \frac{a(1+x)}{a} = 1+x$

$$r \cdot b^r = \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

الف) $\frac{5x}{3ab^r}$

د) $\frac{2x+5}{x}$

$x=5$

ب) $\frac{2y}{y(2y-6)}$ $\begin{cases} y=0 \\ 2y-6=0 \\ y=3 \end{cases}$

ه) $\frac{x^2-1}{x+5}$ $\begin{cases} x+5=0 \\ x=-5 \end{cases}$

ج) $\frac{2p}{p^2-p-12}$

و) $\frac{a+3}{2a+1}$

$p^2-p-12=0$

$(p-4)(p+3)=0$

$p=4$ یا $p=-3$

$2a+1=0 \rightarrow a=-\frac{1}{2}$

۲- حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید:

الف) $\frac{3-x}{x^2-5x+6} = \frac{-1}{x-2}$

ب) $\frac{4x^2+8x}{12x+24}$

ج) $\frac{24x^2}{12x^2-6x}$

د) $\frac{y^2-2y^2-3y}{y^2+y}$

ه) $\frac{1-t^2}{t^2+1}$

و) $\frac{16x^2-9y^2}{8x-6y}$

ب) $\frac{4x(x+2)}{12(x+2)} = \frac{x}{3}$

ح) $\frac{24x^2}{4x(2x-1)} = \frac{6x}{2x-1}$

د) $\frac{y(y^2-2y-3)}{y(y+1)} = \frac{y^2-2y-3}{y+1}$

ه) $\frac{(1-t^2)(1+t^2)}{(1+t^2)}$

و) $\frac{(4x-3y)(4x+3y)}{2(4x-3y)} = \frac{4x+3y}{2}$

ز) $\frac{6a^2b^2}{2ab^2} = \frac{3a^2}{b^2}$

ح) $\frac{-2a-8}{a^2+2a-8} = \frac{-2(a+4)}{(a+4)(a-2)} = \frac{-2}{a-2}$

۳- عبارتهایی را که حاصل آنها ۱ و یا -۱ است، معلوم کنید.

الف) $\frac{2y+3}{2y-3}$

ب) $\frac{2y-3}{3-2y} = \frac{-(3-2y)}{3-2y} = -1$

ج) $\frac{2y+3}{3+2y} = \frac{3+2y}{3+2y} = 1$

د) $\frac{2y+3}{-2y-3} = \frac{2y+3}{-(2y+3)} = -1$

سوال خرد خوب - هر یک از عبارتهای داده شده در سطر اول را به عبارت مساوی آن در سطر دوم وصل کنید.

- ۱ → ۹
- ۲ → ۷
- ۳ → ۱۰
- ۴ → ۶
- ۵ → ۸

۱) $\frac{a-2}{a+5}$	۲) $\frac{a+2}{a-5}$	۳) $\frac{a-2}{a-5}$	۴) $\frac{a+2}{a+5}$	۵) $\frac{2-a}{a+5}$
۶) $\frac{-a-2}{-a-5}$	۷) $\frac{-a-2}{5-a}$	۸) $\frac{a-2}{-a-5}$	۹) $\frac{2-a}{-a-5}$	۱۰) $\frac{-a+2}{-a+5}$

۵- در جای خالی چه عبارتی باید نوشت؟

ب) $\frac{3x}{x-3} = \frac{\boxed{}}{x^2-x-6} = \frac{3x(x+2)}{(x-3)(x+2)}$

د) $\frac{(x-5)(\boxed{(x-2)(x+1)})}{(x-2)(x-5)} = x+1$

الف) $\frac{1-z}{z} = \frac{\boxed{(1-z)(z+1)}}{z^2+z}$

ج) $\frac{3y+2}{5} = \frac{1}{5}(\boxed{3y+2})$

۶- از عبارتهای زیر، هر کدام را که با عبارت $\frac{z(x+y)}{t}$ برابر است، مشخص کنید.

الف) $\frac{z}{t}(x+y)$

ب) $\frac{zx+y}{t}$

ج) $\frac{1}{t} \times z(x+y)$ ✓

د) $z \times \frac{x+y}{t}$

ه) $\frac{zx}{t} + \frac{zy}{t}$

و) $\frac{zx}{t} + y$

توضیح دهید که هر یک از ضرب‌ها و یا تقسیم‌های زیر چگونه انجام شده است. هر جا لازم است حل را کامل و حاصل عبارت را ساده کنید.

الف) $\frac{xy^3}{x^2z^2} \times \frac{yz^2}{5y^2} = \frac{yz}{3x}$

ب) $\frac{x+3}{x} \times \frac{x^2}{x^2-2x-15} = \frac{x+3}{x} \times \frac{x^2}{(x+3)(x-5)} = \frac{x^2}{x-5}$

ج) $\frac{x-6}{x^2-12x+36} \times \frac{x^2-3x-18}{x^2+7x+12} = \frac{x-6}{(x-4)(x-4)} \times \frac{(x+3)(x-4)}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{x+4}$

د) $\frac{4x^2}{3xy} \div \frac{8x}{y^2} = \frac{4x^2}{3xy} \times \frac{y^2}{8x} = \frac{y^2}{6}$

ه) $\frac{a^2-4a-5}{a^2-4a} \div \frac{a^2+3a+2}{a-4} = \frac{a^2-4a-5}{a^2-4a} \times \frac{a-4}{a^2+3a+2} = \frac{(a-5)(a+1)}{a(a-4)} \times \frac{a-4}{(a+1)(a+2)}$

$= \frac{(a+1)(a-5)}{a(a-4)} \times \frac{a-4}{(a+1)(a+2)} = \frac{a-5}{a(a+2)}$

کار در کلاس

عصا کافور

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$\frac{(a+2)(a-3)(a+3)}{(a+3)(a-2)(a+2)}$

الف) $\frac{a^2-a-6}{a+2} \times \frac{a+2}{a^2-4} = \frac{a-3}{a-2}$

ب) $\frac{a^2b+ab^2}{a} \times \frac{2ab}{(a+b)^2} = \frac{ab(a+b)}{a(a+b)(a+b)} \times \frac{2ab}{(a+b)} = \frac{2ab}{(a+b)}$

$\frac{(x+1)(x+2)}{x+2} \times \frac{x+5}{x+1}$

ج) $\frac{x^2+3x+2}{x+2} \div \frac{x+1}{x+5} = \frac{x+5}{1}$

د) $\frac{4x^2}{3xy} \div \frac{8x}{y^2} = \frac{4x^2}{3xy} \times \frac{y^2}{8x} = \frac{y^2}{6}$

جمع و تفریق عبارت‌های گویا

جمع و تفریق عبارت‌های گویا مشابه جمع و تفریق عددهای گویا است؛ در مورد عددهای گویا داریم:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
($b \neq 0$)

و $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
($b, d \neq 0$)

به طریق مشابه می‌توان دو عبارت گویا را جمع یا تفریق کرد.

توضیح دهید که هر یک از محاسبات زیر چگونه انجام شده است. هر جا لازم است حل را کامل، و مانند نمونه یک جمع و تفریق عددی مشابه آن ارائه کنید.

<p>الف) $\frac{3x+7}{x+2} + \frac{2x-3}{x+2} = \frac{3x+7+2x-3}{x+2} = \frac{5x+4}{x+2}$</p> <p>ب) $\frac{3x+7}{x+2} - \frac{2x-3}{x+2} = \frac{3x+7-(2x-3)}{x+2} = \frac{3x+7-2x+3}{x+2} = \frac{x+10}{x+2}$</p> <p>ج) $\frac{a^2-20}{a^2-4} + \frac{a-2}{a+2} = \frac{a^2-20+(a-2)^2}{a^2-4} =$ $= \frac{a^2-20+a^2-4a+4}{a^2-4} = \frac{2a^2-4a-16}{a^2-4} = \frac{2(a^2-2a-8)}{a^2-4}$ $= \frac{2(a-4)(a+2)}{(a+2)(a-2)} = \frac{2(a-4)}{a-2}$</p> <p>د) $\frac{a+1}{a} - \frac{3a+2}{a(a+2)} = \frac{(a+1)(a+2)-(3a+2)}{a(a+2)} = \frac{a^2+a^2+2a-3a-2}{a(a+2)} = \frac{2a^2-a-2}{a(a+2)}$ $= \frac{a^2}{a(a+2)} = \frac{a}{a+2}$</p>	<p>$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$</p> <p>$\frac{7}{3} - \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$</p> <p>$\frac{7}{10} - \frac{912}{5210} = \frac{18}{10} = \frac{-11}{10}$</p> <p>$\frac{22}{324} - \frac{1}{12} = \frac{1-1}{12} = \frac{0}{12}$</p>
---	--

۱۲۰

الف) $\frac{x^2}{x-y} - \frac{y^2}{x-y} = \frac{x^2-y^2}{x-y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = x+y$

ج) $\frac{2m^2-14-(m+4)(m-2)}{(m-2)(m+2)} = \frac{2m^2-14-m^2-2m+8}{(m-2)(m+2)} = \frac{m^2-2m-6}{(m-2)(m+2)} = \frac{(m-4)(m+2)}{(m-2)(m+2)} = \frac{m-4}{m-2}$

د) $\frac{\sqrt{x+21+x^2}-2x}{(x-2)(x+1)(x+3)} = \frac{x^2+5x+21}{(x-2)(x+1)(x+3)} \quad *$

کار در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. اصلاً فضای کافی برای پاسخ‌دهی نماند.

الف) $\frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{y-x}$

ب) $\frac{6}{x} + \frac{4}{-x} = \frac{6}{x} - \frac{4}{x} = \frac{2}{x}$

ج) $\frac{2x^2-16}{x^2-4} - \frac{(x+4)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x^2-16}{(x-2)(x+2)} - \frac{(x+4)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$
 (دقت کنید!) $= \frac{2x^2-16-(x+4)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x^2-16-x^2-2x+8}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2-2x-8}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-4}{x-2}$

د) $\frac{2}{3y(x-y)} + \frac{x+1}{x(x-y)^2} = \frac{2x(x-y) + 3y(x+1)}{3xy(x-y)^2} = \frac{2x^2-2xy+3xy+3y}{3xy(x-y)^2} = \frac{2x^2+xy+3y}{3xy(x-y)^2}$

ساده کردن عبارت‌های مرکب

هنگام ساده کردن هر عبارت گویای مرکب، همانند کسرهای مرکب می‌توان صورت و مخرج را جداگانه ساده و سپس آنها را برهم تقسیم کرد و یا از همان ابتدا صورت و مخرج را در عبارتی مناسب (و غیر صفر) ضرب کرد.

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از روش‌های ارائه شده برای ساده کردن کسر مرکب با روش دیگر چه تفاوتی دارد؛ هر جا لازم است حل را کامل کنید. ($x \neq 0$)

صورت و مخرج در عبارتی مناسب و غیر صفر ضرب شده
ابتدا صورت و مخرج هر مخرج مشترک گرفته
پس ساده شده اند.

الف)
$$\frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2})}{x^2(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2})} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x+2}{x-1}$$

ب)
$$\frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{\frac{x^2 - x - 6}{x^2}}{\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2} \div \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$$

$$= \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x+2}{x-1}$$

ب)
$$\frac{-x^2 - y^2}{(x+y)(x-y)} \times \frac{(x+y)(x-y)}{x^2 + y^2} = \frac{-(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = -1$$

به مخرج مشترک هر کس ضرب شده
ابتدا صورت مشترک گیری کرده ام از صورت و مخرج پس تبدیل به ضرب و ساده شدن

الف)
$$\frac{\frac{2}{a} - \frac{3}{a+1}}{\frac{2}{a+1} - \frac{3}{a}} = \frac{a(a+1)(\frac{2}{a} - \frac{3}{a+1})}{a(a+1)(\frac{2}{a+1} - \frac{3}{a})} = \frac{2(a+1) - 3a}{2a - 3(a+1)} = \frac{2a+2-3a}{2a-3a-3} = \frac{2-a}{-a-3} = \frac{a-2}{a+3}$$

ب)
$$\frac{\frac{2}{a} - \frac{3}{a+1}}{\frac{2}{a+1} - \frac{3}{a}} = \frac{2(a+1) - 3a}{a(a+1)} \div \frac{2a - 3(a+1)}{a(a+1)} = \frac{2a+2-3a}{a(a+1)} \times \frac{a(a+1)}{2a-3a-3} = \frac{-a+2}{-a-3} = \frac{-a+2}{-a-3}$$

$a \neq 0$ و $a \neq -1$

کار در کلاس

حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید.

الف)
$$\frac{\frac{n}{1} - \frac{n^2}{n-m}}{1 + \frac{m^2}{n^2 - m^2}} = \frac{\frac{n(n-m) - n^2}{n-m}}{\frac{n^2 - m^2 + m^2}{n^2 - m^2}} = \frac{n^2 - mn - n^2}{n-m} \div \frac{n^2}{n^2 - m^2} = \frac{-mn}{n-m} \times \frac{(n-m)(n+m)}{n^2} = \frac{-m(n+m)}{n}$$

ب)
$$\frac{\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}}{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}} = \frac{\frac{y(x-y) - x(x+y)}{(x+y)(x-y)}}{\frac{x(x-y) + y(x+y)}{(x+y)(x-y)}} = \frac{xy - y^2 - x^2 - xy}{(x+y)(x-y)} \div \frac{x^2 - xy + xy + y^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{-x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{(n-4)(n+5)}{(n+5)} \times \frac{a+2}{(a-4)(a-4)} = \frac{a+2}{a-4}$$

الف) $\frac{a^2-16}{a+4} \times \frac{a+2}{a^2-8a+16}$

ج) $\frac{x^2-4x+4}{4x^2y-8xy} \div \frac{x^2+x-6}{6x^2+18}$

ع) $\frac{(n-2)(n-2)}{2ny(n-2)} \times \frac{y(n^2+3)}{(n-2)(n+3)} = \frac{y(n^2+3)}{2ny(n+3)}$

۱- ضرب و تقسیم های زیر را انجام دهید.

ب) $\frac{m^2-49}{m+1} \div \frac{v-m}{m^2-1} = \frac{(m-7)(m+7)}{(m+1)} \times \frac{(m-1)(m+1)}{-(m-7)}$

د) $\frac{1-c^2}{b^2} \times \frac{b^2}{1-2c+c^2} = \frac{(1-c)(1+c)}{b(1-c)(1-c)} = \frac{1+c}{b(1-c)}$

الف) $\frac{x(x^2-y^2)-y(x-y)^2}{(x^2-y^2)(x^2-y^2)} = \frac{x(n-y)(n+y)-y(n-y)^2}{(n^2+y^2)(n-y)(n+y)} = \frac{(x-y)[x(n+y)-y(n-y)]}{(n^2+y^2)(n-y)(n+y)} = \frac{x^2+xy-xy+y^2}{(n^2+y^2)(n+y)}$

ع) $\frac{(a^2-b^2)(a+b)-(a^2-b^2)}{a^2-b^2} = \frac{a^2+a^2b-b^2a-b^2-a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2b-b^2a}{a^2-b^2} = \frac{ab(a-b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{ab}{a+b}$

۲- جمع و تفریق های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y(x-y)^2}{x^2-y^2}$

ب) $\frac{x+7}{ax-bx} + \frac{y+9}{by-ay} = \frac{x+7}{x(a-b)} - \frac{y+9}{y(a-b)} = \frac{xy+7y-xy-9x}{xy(a-b)}$

ج) $\frac{a^2-b^2}{a-b} - \frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}$

د) $\frac{2+x^2-2x}{2+x} - 2-x = \frac{x^2-2x+4-4-2x-2x-ax^2}{2+x} = \frac{-2x}{2+x}$

۳- فقط یکی از عبارات های گویای زیر قابل ساده شدن است؛ آن را مشخص و ساده کنید.

$\frac{a^2+5}{a^2}$ و $\frac{a^2+3}{3}$ و $\frac{a^2+b^2}{a^2}$ و $\sqrt{\frac{a^2-5a}{a}} = \frac{a(a-5)}{a} = a-5$

۴- از میان عبارات های زیر، هر کدام را که مساوی عبارت $\frac{x}{y}$ است، معلوم کنید.

الف) $\frac{x+3}{y+3}$ ب) $\frac{3-x}{3-y}$ ج) $\frac{3x}{3y}$ ✓ د) $\frac{x^2}{y^2}$ ه) $\frac{a^2x}{a^2y}$ ✓

۵- عبارت $\frac{-x+3}{x+5}$ با کدام یک از عبارات های زیر برابر است؟

الف) $-\frac{x+3}{x+5}$ ب) $\sqrt{\frac{x-3}{x+5}}$ ج) $\frac{x-3}{x+5}$ د) $-\frac{3-x}{x+5}$

۶- کدام یک از عبارات های زیر به درستی ساده شده است؟

الف) $\frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = a-5$ ب) $\frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = \frac{1}{a-5}$ ✓

۷- اگر $A=a^2-b^2$ و $B=a^2+b^2$ و $C=2ab$ ، حاصل عبارت $\frac{A^2-B^2}{C^2}$ را به دست آورید.

$\frac{A^2-B^2}{C^2} = \frac{(A-B)(A+B)}{C^2} = \frac{(a^2-b^2-a^2-b^2)(a^2-b^2+a^2+b^2)}{(2ab)^2} = \frac{-2b^2 \times 2a^2}{4a^2b^2} = -1$

عرض = x
طول = $2m-1$

$$\frac{\text{محیط}}{\text{مساحت}} = \frac{2(m+2m-1)}{m(2m-1)} = \frac{2(3m-1)}{m(2m-1)}$$

سوال 9 ←

۸- کدام یک از تساوی های زیر، درست و کدام یک نادرست است. موارد نادرست را اصلاح

کنید. (همه عبارات های جبری تعریف شده فرض می شود.)

الف) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{ab} \rightarrow \frac{a^2-b^2}{ab}$ ب) $\frac{x^{12}}{x^{20}} = x^y \rightarrow x^{-8} = \frac{1}{x^8}$

ج) $\frac{a}{5} - \frac{7-b}{5} = \frac{a-7-b}{5} \rightarrow \frac{a-7+b}{5}$ د) $\frac{a-b}{b-a} = 1 \rightarrow \frac{a-b}{-(a-b)} = -1$

ه) $\frac{1}{a-b} = \frac{-1}{a+b} \rightarrow \frac{-1}{b-a}$ و) $\frac{a^2-b^2}{a-b} = a+b$

ز) $\frac{ca+cb}{c+cd} = \frac{a+b}{1+d} \rightarrow \frac{a+b}{1+d}$ ح) $\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$

الف ۱۵

۹- طول مستطیلی از دو برابر عرض آن یک واحد کمتر است. نسبت محیط به مساحت این

مستطیل را به صورت یک کسر گویا (عبارت گویا) بنویسید. با \nearrow

۱۰- حاصل عبارات های زیر را به دست آورید و نتیجه را ساده کنید.

$$\frac{-a(a-1)}{(a-1)(a+1)} \div \frac{a-a(a+1)}{(a+1)}$$

$$\frac{-a}{a+1} \times \frac{a+1}{a-a^2-a} = \frac{-a}{-a^2} = \frac{a-a^2}{-a^2} = \frac{a-a^2}{a^2} = \frac{a(1-a)}{a^2} = \frac{1-a}{a}$$

$$\frac{1}{x-y} - \frac{2}{x+y} = \frac{x+y-2m+2y}{(x-y)(x+y)} \times \frac{(m-y)^2}{x^2-9y^2} = \frac{(m-y)^2}{(x-y)(x+y)(m-y)}$$

۱۱- دو عبارت گویا بنویسید که :

$$\frac{2m(m-1)+(m+1)-2(x^2-1)}{(m+1)^2(m-1)} = \frac{2x}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x+1}$$

$$= \frac{2x^2-2m+x+1-2x^2+2}{(m+1)^2(m-1)} = \frac{-x+3}{(m+1)^2(m-1)}$$

الف) حاصل ضرب آنها $\frac{a-2}{a+7}$ شود. $\frac{x-2}{m} \times \frac{m}{a+7}$

ب) حاصل جمع آنها $\frac{a-2}{a+7}$ شود. $\frac{a}{a+7} + \frac{-2}{a+7}$

۱۲- طول مستطیل مقابل را بر حسب x به دست آورید.

$A = x^2 - 9$

مساحت مستطیل x^2-9 است.
 $\frac{x^2-x-12}{x-2} = \frac{(x-4)(x+3)}{-(x-2)} = x+3$

۱۲۵ طول مستطیل = $\frac{\text{مساحت}}{\text{عرض}} = \frac{(x-4)(x+3)}{x+3} = x-4$

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید و مراحل کار را توضیح دهید. جاهای خالی را پر و حل را کامل کنید.

الف)
$$\begin{array}{r} 4x^2 - 3x^2 + x + 7 \quad | \quad x^2 - 2 \\ \underline{\pm 4x^2 \quad \mp 8x} \quad \boxed{6x} - 3 \\ -3x^2 + 9x + 7 \\ \underline{\mp 3x^2 \quad \pm 6x} \quad \boxed{6} \\ 9x + 1 \end{array}$$

$$\frac{6x^3}{x^2} = 6x$$

درجه چند جمله‌ای باقیمانده از درجه مقسوم علیه کمتر شده

باقیمانده این تقسیم چیست؟
 $9x + 1$

ب)
$$\begin{array}{r} x^2 - 5x - 24 \quad | \quad x - 8 \\ \underline{+x^2 - 8x} \quad \boxed{x} + \boxed{3} \\ -3x - 24 \\ \underline{+3x - 24} \\ -48 \end{array}$$

باقیمانده صفر است

۱۲۸

$$\frac{2x^2}{x} = 2x$$

$$\frac{3x^2 - 3}{2}$$

۲- تقسیم زیر را انجام دهید و رابطه تقسیم را بنویسید. حل را کامل کنید.

Scanned by CamScanner

$$\begin{array}{r} 10x^2 - 3x^2 + 2x - 19 \quad | \quad -3 + 2x^2 \\ \underline{+10x^2 - 15x^2} \quad \boxed{5x^2} + \boxed{6} \\ 12x^2 + 2x - 19 \\ \underline{+12x^2 - 18} \\ 2x - 1 \end{array}$$

رابطه‌های تقسیم:

$$(5x^2 + 6)(2x^2 - 3) + 2x - 1$$

$$= 10x^2 - 3x^2 + 2x - 19$$

و درجه چند جمله‌ای $2x - 1$ از

درجه $2x^2 - 3$ کمتر است.

الف)
$$\begin{array}{r} 4x^3 - 19x^2 + 14x - 8 \quad | \quad -x + 2 \\ \underline{4x^3 - 12x^2} \quad \boxed{-9x} + \boxed{4} \\ -7x^2 + 14x - 8 \\ \underline{-7x^2 + 14x} \quad \boxed{-4} \\ -4 \end{array}$$

ب)
$$\begin{array}{r} -x^3 + 8x - 12 \quad | \quad x + 4 \\ \underline{-x^3 - 4x^2} \quad \boxed{4x^2} + \boxed{4x} - 12 \\ 4x^2 + 8x - 12 \\ \underline{4x^2 + 16x} \quad \boxed{-8x} - 12 \\ -8x - 12 \\ \underline{-8x - 32} \quad \boxed{20} \end{array}$$

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{-2x^2y^2z^2}{18xz^5} = \frac{-xy^2z^2}{9}$ ب) $\frac{2a^2y - a^2y^2 + 15xy}{-5y^2} = -\frac{2a^2}{5y} + \frac{a^2}{5} - \frac{3x}{y}$

ج) $(x^2 - 27) \div (x - 2)$ د) $(2y^2 - 10y - 24) \div (2y - 4)$

ه) $2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \div x + 3$

۲- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم زیر را مشخص کنید و درستی عمل تقسیم را با نوشتن روابط

تقسیم نشان دهید. $-3x^2 + 4x^3 + x^2 + 5 \div 1 - x$ د) $3x^2 - 2x^3 + 5$

۳- حجم یک جعبه به شکل مکعب مستطیل برابر با $2x^2 + 15x^2 + 28x$ است. اگر ارتفاع این

جعبه x و طول آن $x + 4$ باشد، عرض آن را به دست آورید.

۴- اگر چند جمله‌ای $20x^2 + 23x^3 - 10x + a$ بر $2x + 3$ بخش پذیر باشد، a را به دست آورید.

۵- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم عبارت $2x^2 - 9x + 9$ را بر هر یک از عبارات زیر به دست آورید.

$x + 3$ و $x - 3$ و $2x - 3$ و $2x + 3$

$$\begin{array}{l} 2x^2 - 9x + 9 \mid x + 3 \\ \underline{2x^2 + 6x} \\ -15x + 9 \\ \underline{+15x + 45} \\ 54 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 2x^2 - 9x + 9 \mid x - 3 \\ \underline{2x^2 - 6x} \\ -3x + 9 \\ \underline{+3x + 9} \\ 18 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x^2 - 9x + 9 \mid 2x - 3 \\ \underline{2x^2 - 6x} \\ -3x + 9 \\ \underline{+3x + 9} \\ 18 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 2x^2 - 9x + 9 \mid 2x + 3 \\ \underline{2x^2 + 6x} \\ -15x + 9 \\ \underline{+15x + 45} \\ 54 \end{array} \right\}$$

تقریب ۱۲۹ سوال ۱-

۸۰

$$\begin{array}{l} x^4 - 2x^3 \mid x - 2 \\ \underline{-2x^3 + 4x^2} \\ 2x^2 - 2x \\ \underline{2x^2 - 4x} \\ 2x \\ \underline{-2x + 4} \\ -2 \end{array}$$

۸۵

$$\begin{array}{l} 2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 10 \mid x + 3 \\ \underline{2x^5 + 6x^4} \\ -x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 10 \\ \underline{+x^4 + 3x^3} \\ -x^3 + 2x^2 - 2x + 10 \\ \underline{-x^3 - 3x^2} \\ 5x^2 - 2x + 10 \\ \underline{5x^2 + 15x} \\ -17x + 10 \\ \underline{+17x + 51} \\ 61 \end{array}$$

۸۷

$$\begin{array}{l} 3y^2 - 10y - 24 \mid y - 2 \\ \underline{-3y^2 + 6y} \\ -16y - 24 \\ \underline{+16y + 32} \\ 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x^4 - 2x^3 + x^2 + 5 \mid x + 1 \\ \underline{-2x^4 - 2x^3} \\ 4x^3 + x^2 + 5 \\ \underline{-4x^3 - 4x^2} \\ 5x^2 + x + 5 \\ \underline{-5x^2 - 5x} \\ 6x + 5 \\ \underline{-6x - 6} \\ 1 \end{array}$$

رابطه $(-x+1)(-2x^4 - 2x^3 - x^2 - x - 2) + 1$

سوال ۳ $x(x+5) = x^2 + 5x$

عرفن = $\frac{مساحت}{طول \times ارتفاع}$

$$\begin{array}{l} 2x^3 + 15x^2 + 28x \mid x^2 + 5x \\ \underline{2x^3 + 10x^2} \\ 5x^2 + 28x \\ \underline{5x^2 + 25x} \\ 3x \end{array}$$

عرفن $2x + 7$

سوال ۴ شرط بخشیدگی باقیمانده برابر صفر باشد.

$$\begin{array}{l} 20x^2 + 23x^3 - 10x + a \mid 5x^2 + 2x - 4 \\ \underline{20x^2 + 10x} \\ 13x^3 - 10x + a \\ \underline{-13x^3 - 26x} \\ 14x + a \\ \underline{-14x - 28} \\ a - 28 \end{array}$$

پس $a + 28 = 0$ خواهد بود $a = -28$

فصل هشتم

$$R = 5, h = 10$$

۱- کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده و ارتفاع ۱۰ سانتیمتر محاط شده است.

الف $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \times 125 = \frac{500}{3} \pi$

حجم کره را به دست آورید.

ب) $V = S \cdot h = \pi \times 5^2 \times 2 \times 5 = 2\pi \times 5^3 = 250\pi$

حجم استوانه را به دست آورید.

ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.

ح) $V_{\text{فضا}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = 250\pi - \frac{500}{3}\pi = \frac{250}{3}\pi$

۲- حجم نیم کره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر را به دست آورید.

۱۳۲

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \pi \times 10^3 = \frac{2000\pi}{3}$$



۱- مساحت یک کلاه (عرق چین) به شکل رویه نیم کره

به شعاع ۱۰ سانتیمتر را پیدا کنید. $2\pi R^2 = 2\pi \times 10^2 = 200\pi$

۲- می خواهیم یک نیم کره جوی توپر به شعاع ۱۰ سانتیمتر را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت

رنگ شده را پیدا کنید. $S_{\text{دایره}} + S_{\text{نیم کره}} = 2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2 = 3 \times \pi \times 10^2 = 300\pi$

بین محاسبه مساحت کل نیم کره جوی توپر و مساحت رویه یک عرق چین چه تفاوتی هست؟

در مساحت نیم کره جوی توپر برابر مساحت دایره هر دو ۱۳۳ ولی در مساحت عرق چین برابر مساحت دایره محاسب می شود.

کار در کلاس

ع) $S = 4\pi R^2 = 4\pi (4,6 \times 10^3)^2 = 4\pi \times 21,16 \times 10^6 = 84,64\pi \times 10^6 = 2,67 \times 10^{11} \pi$
 کیلومتر مربع
 $S = 4\pi R^2 = 4\pi (4,6 \times 10^3)^2 = 4\pi \times 21,16 \times 10^6 = 84,64\pi \times 10^6 = 2,67 \times 10^{11} \pi$ متر مربع

$$\frac{1,448 \times 10^4}{1,728 \times 10^4 \times \pi} = \frac{1,448}{1,728 \times \pi} = 0,032 = 3,2 \times 10^{-3}$$

$$3,2 \times 10^{-3} \times 10^2 = 3,2 \times 10^{-1}$$

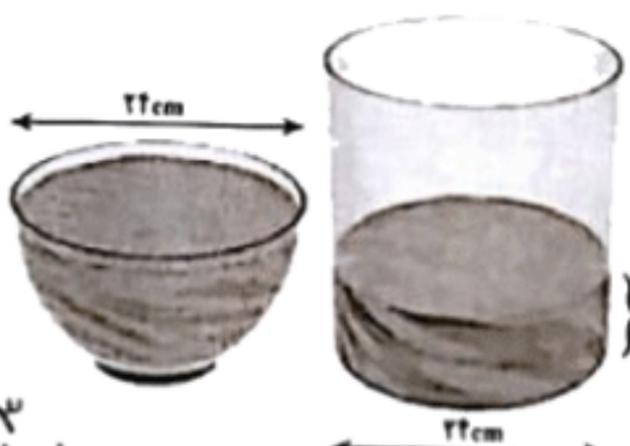
تمرین

- ۱- قطر تقریبی کره زمین حدود ۱۲۸۰۰ کیلومتر است.
 الف) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید.
 ب) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب متر با نماد علمی بنویسید.
 ج) مساحت تقریبی روزه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع و متر مربع با نماد علمی بنویسید.
 د) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود ۱/۶۴۸۰۰۰ کیلومتر مربع است. مساحت ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.

ارتفاع $h = 1 - 0,3 = 0,7 \text{ m}$
 $V = \pi \times 0,3^2 \times 0,7 = 0,42\pi$
 $V_{\text{کره}} = \frac{4}{3} \pi \times 0,3^3 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \pi \times 0,27 = 0,18\pi$
 $V = 0,42\pi + 0,18\pi = 0,6\pi$
 حجم کیسول



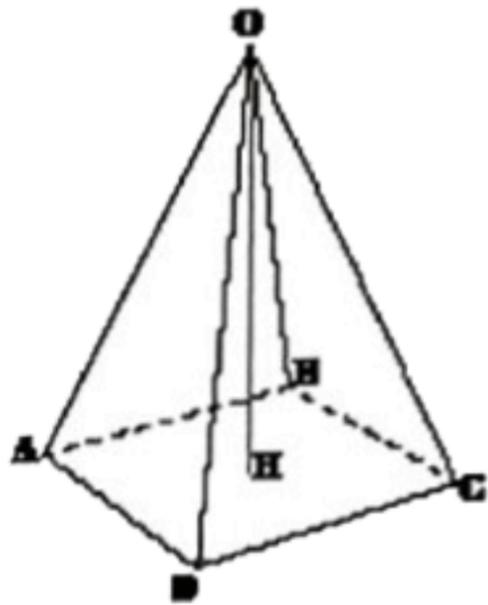
- ۲- یک کیسول گاز از قرار گرفتن یک نیم کره روی یک استوانه به صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره قاعده کیسول ۶۰ سانتیمتر و ارتفاع آن یک متر باشد، حجم کیسول را بر حسب متر مکعب به دست آورید.
 $R = 0,3 \text{ m}$
 $h = 1 \text{ m}$
 اگر بخواهیم سطح کل این کیسول را رنگ کنیم، چند کیلوگرم رنگ لازم است به شرط اینکه رنگ آمیزی هر متر مربع به ۱۰۰ گرم رنگ نیاز داشته باشد. دریا پس



- ۳- پیمانه‌ای به شکل نیم کره و به قطر دهانه ۱۲ سانتیمتر را از آب پر و آب آن را در لیوانی استوانه‌ای شکل با همان قطر خالی می‌کنیم؛ آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

شعاع آب $r = \frac{2}{3} \times 12 = 8$
 $\frac{2}{3} \pi \times 12^3 = \pi \times 12^2 \times h$
 $h = \frac{2}{3} \times 12 = 8$

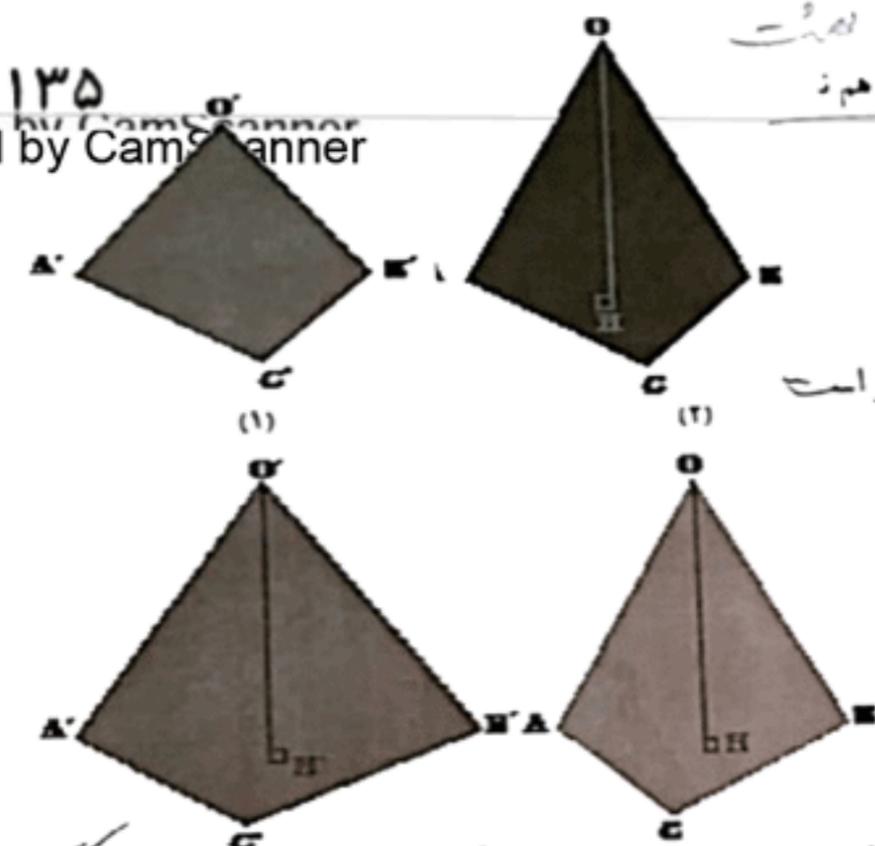
مسئله ۲ قسمت ب
 134
 مساحت جانبی استوانه $= 2\pi R \times h = 2\pi \times 0,3 \times 0,7 = 0,84\pi$
 مساحت کلاهک $= \pi R^2 = \pi \times 0,3^2 = 0,09\pi$
 مساحت کل $= 0,18\pi + 0,84\pi + 0,09\pi = 1,11\pi$
 به گرم $1,11\pi \times 10^3 = 111\pi$ گرم



۱- اگر چند ضلعی قاعده، یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی با هم، هم‌نهشت باشد، هرم را منتظم می‌گوییم. در این صورت اگر قاعده، مرکز تقارن داشته باشد، پای ارتفاع (نقطه برخورد ارتفاع و قاعده) روی مرکز تقارن می‌افتد. در هرم منتظم مقابل: نام رأس: O ، ارتفاع: $O.H$ ، شکل قاعده: چهارضلعی منتظم، وجه‌های جانبی: مثلث، تعداد وجه‌ها: ۵.

درج

۲- الف) با توجه به شکل‌ها و اطلاعات داده شده به نظر شما حجم کدام هرم بیشتر است؟ در



نقطه

شکل‌های (۱) و (۲) مثلث‌های قاعده هم‌نهشتند

$$O'H' < O'H \Rightarrow V' < V$$

در شکل‌های (۳) و (۴) ارتفاع‌ها برابر است

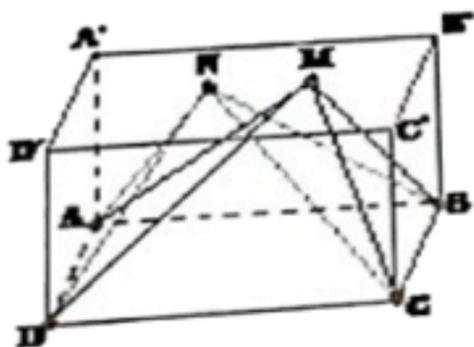
$$S_{ABC} < S_{A'B'C'} \Rightarrow V' < V$$

عبارت صحیح ✗

ب) به نظر شما حجم هرم به چه مقادیری وابسته است؟ به مساحت قاعده و ارتفاع بستگی دارد. ج) برای محاسبه مساحت مثلث از چه مقادیری استفاده می‌کردید؟ برای محاسبه حجم هرم چه حدسی می‌زنید؟ از قاعده و ارتفاع مثلث. به قاعده و ارتفاع مثلث و ارتفاع هرم. د) اگر دو هرم دارای قاعده‌های با مساحت مساوی و ارتفاع‌های مساوی باشند، دربارهٔ حجم‌های آنها چه می‌توانید بگویید؟ حجم‌ها برابر می‌شوند.

اگر دو هرم دارای قاعده‌های هم‌مساحت و ارتفاع‌های مساوی باشند، حجم‌های آنها با هم برابر است.

کار در کلاس



در شکل مقابل، ABCD یک وجه یک مکعب مستطیل و M و N دو نقطه دلخواه روی وجه مقابل $(A'B'C'D')$ است. چرا هرم‌های MABCD و NABCD دارای حجم‌های یکسان است؟ به این ترتیب چند هرم می‌توان ساخت که با هرم‌های بالا حجم یکسان داشته باشند؟

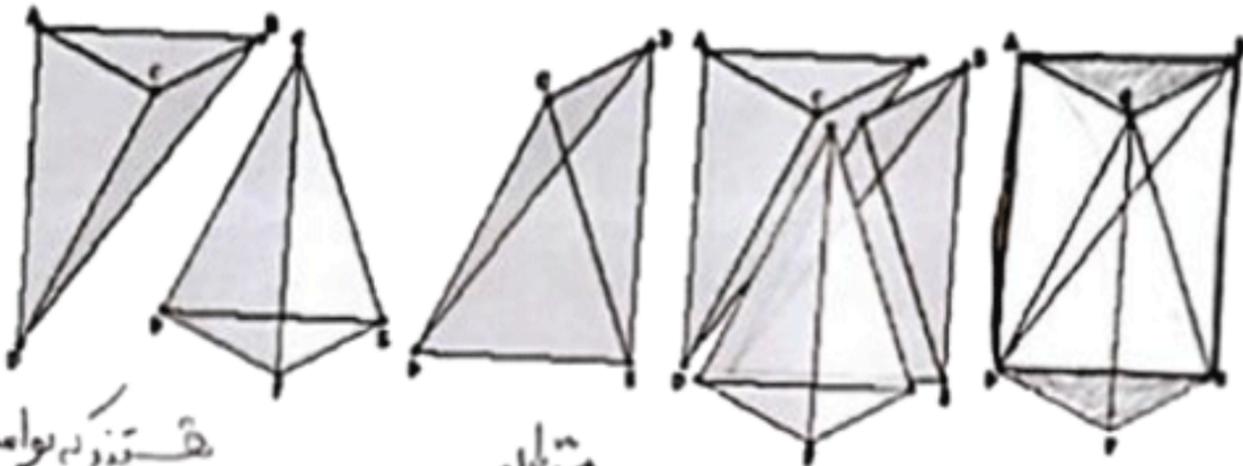
۱۳۶

- چون دارای قاعده و ارتفاع برابر می‌باشند.

بسیار مهم: به تغییر نقطه‌های M و N می‌توان حجم‌های متفاوت داشت.

محاسبه حجم هرم

در شکل زیر، منشور با دو فاعده ABC و DEF را ملاحظه می کنید. نقطه C را به نقطه های E و D و نقطه B را به نقطه D وصل می کنیم؛ به این ترتیب منشور را به سه هرم، مطابق شکل تجزیه می کنیم. آیا این سه هرم را در این منشور تشخیص می دهید؟ با پاسخ دادن به سؤالات زیر، نشان دهید که این سه هرم، حجم های برابر دارد و از آنجا نتیجه بگیرید که حجم هر یک از آنها، یک سوم حجم منشور است.



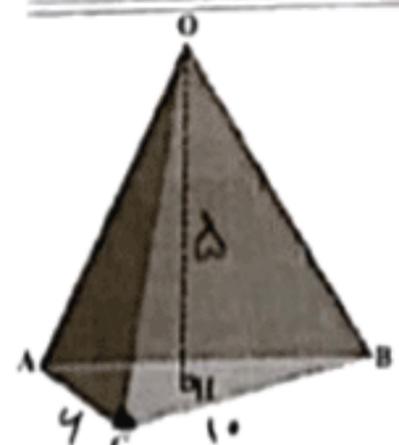
نقطه D به دو اسطوخودوس قطر مسطح ایجاد می کند

- مثال
- ۱- چهار ضلعی $ABED$ ، چه نوع چهار ضلعی است؟ چرا مثلث های ABD و BDE هم مساحت دارند؟ چگونه در مثلث هم مساحتی است؟
 - ۲- چرا هرم های $CBED$ و $CBAD$ دارای حجم های برابر است؟ چگونه مساحت های $CBED$ و $CBAD$ هم مساحتی است؟
 - ۳- چرا مثلث های ABC و DEF هم مساحت دارند؟ چگونه مساحت های ABC و DEF هم مساحتی است؟
 - ۴- چرا هرم های $CDEF$ و $DABC$ دارای حجم های برابر است؟ چگونه مساحت های $CDEF$ و $DABC$ هم مساحتی است؟
 - ۵- با توجه به پاسخ سوال های ۲ و ۴ چه نتیجه ای می گیریم؟ این هرم های $CBED$ ، $CBAD$ و $CDEF$ دارای حجم های برابرند.

حجم هر هرم با مساحت فاعده S و ارتفاع h برابر است با:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \pi R^2 h$$

کار در کلاس



در شکل مقابل هرم $OABC$ دارای فاعده ABC است که در آن $AC = 6\text{cm}$ و $BC = 10\text{cm}$ و زاویه $\hat{ACB} = 90^\circ$ و ارتفاع OH هرم مساوی 5cm است. با کامل کردن عبارات های زیر حجم هرم را به دست آورید.

$$S_{ABC} = \frac{AC \times CB}{2} = \frac{6 \times 10}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 30 \times 5 = 50 \text{ cm}^3$$



در شکل زیر، هرم منتظم با قاعده مربع، رسم شده که وجه‌های جانبی آن همگی مثلث‌هایی مساوی‌الساقین و طول ساق‌های آنها ۱۰cm و M وسط BC است.

- ۱- باره خط OM در مثلث OBC چه خواصی دارد؟ عمود منصف BC
- ۲- مثلث OBM چه نوع مثلثی است؟ قائم الزامی



۳- اگر طول ضلع قاعده، ۱۲cm باشد به کمک قضیه فیثاغورس $OM^2 = OB^2 - MB^2$ در مثلث OBM طول OM را حساب کنید. $OM = 8\text{cm}$

$$\begin{aligned} OH^2 &= OM^2 - MH^2 \\ OH^2 &= 4^2 - 4^2 = 0 \\ OH &= \sqrt{0} = 0 \end{aligned}$$

MH = 4

- ۴- مثلث OMH چه نوع مثلثی است؟ طول MH جقدر است؟
- ۵- به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث OMH، طول OH را به دست آورید.

$OH = 2\sqrt{7}$

- ۶- حجم هرم OABCD را به دست آورید.

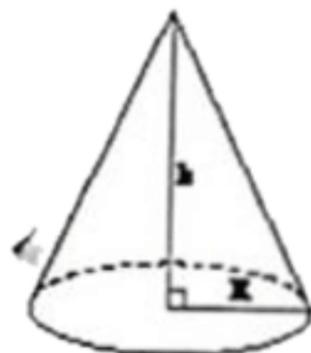


هرم منتظمی را در نظر بگیرید که قاعده آن یک چندضلعی منتظم باشد. مانند مربع، پنج ضلعی منتظم، شش ضلعی منتظم و جال تعداد ضلع‌های این چندضلعی را بیشتر و بیشتر کنید؛ چند ضلعی فوق به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ هرم به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ دایره - مخروط

مخروط، شکلی شبیه به هرم منتظم است که قاعده آن به شکل دایره و پای ارتفاع مخروط مرکز این دایره است.

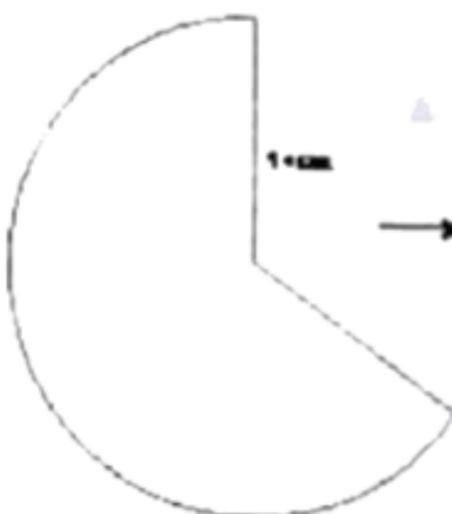
از اینجا نتیجه می‌شود که حجم مخروط، مانند حجم هرم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_b = \frac{1}{3} \pi R^2 h \\ V &= \frac{1}{3} S_b h = \frac{1}{3} \pi R^2 h \end{aligned}$$



کار در کلاس

$$\begin{aligned} h^2 &= 10^2 - 4^2 \\ h^2 &= 100 - 16 = 84 \\ h &= 8 \end{aligned}$$



علی با قسمتی از دایره به شعاع ۱۰cm، مخروطی به قطر قاعده ۱۲cm ساخته است. حجم مخروط را به دست آورید. $R = 4$

$$V = \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times 8 = 94 \pi \text{ cm}^3$$

پای

۱- حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن مستطیلی به ابعاد ۶ و ۵ سانتیمتر و ارتفاع آن ۱۰ سانتیمتر باشد.

$$V = \frac{1}{3} \times 5 \times 4 \times 10 = 100 \text{ cm}^3$$

$$V = \frac{1}{3} S h$$

۲- حجم هرمی با قاعده مربع را به دست آورید که ضلع قاعده آن ۴cm باشد و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الساقینی به ساق‌های ۸cm باشد. در پایین

۳- ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه ۴cm و به ارتفاع ۱۲cm را از آب پر می‌کنیم و در لبوانی استوانه‌ای شکل، که شعاع قاعده آن ۶cm است، خالی می‌کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی در لبوان بالا می‌آید؟



$$V = S h = 4 \pi h$$

$$4 \pi h = 34 \pi h$$

$$h = \frac{24}{34} = 1, \bar{7} \text{ cm}$$

* شعاع = ۶

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times 12$$

$$V = 4 \pi$$

طرف مخروطی

۱۳۹

۲



$$OM^2 = OB^2 - BM^2$$

$$OM^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$$

$$OM = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$OH^2 = OM^2 - MH^2$$

$$OH^2 = 12 - 4 = 8$$

$$OH = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

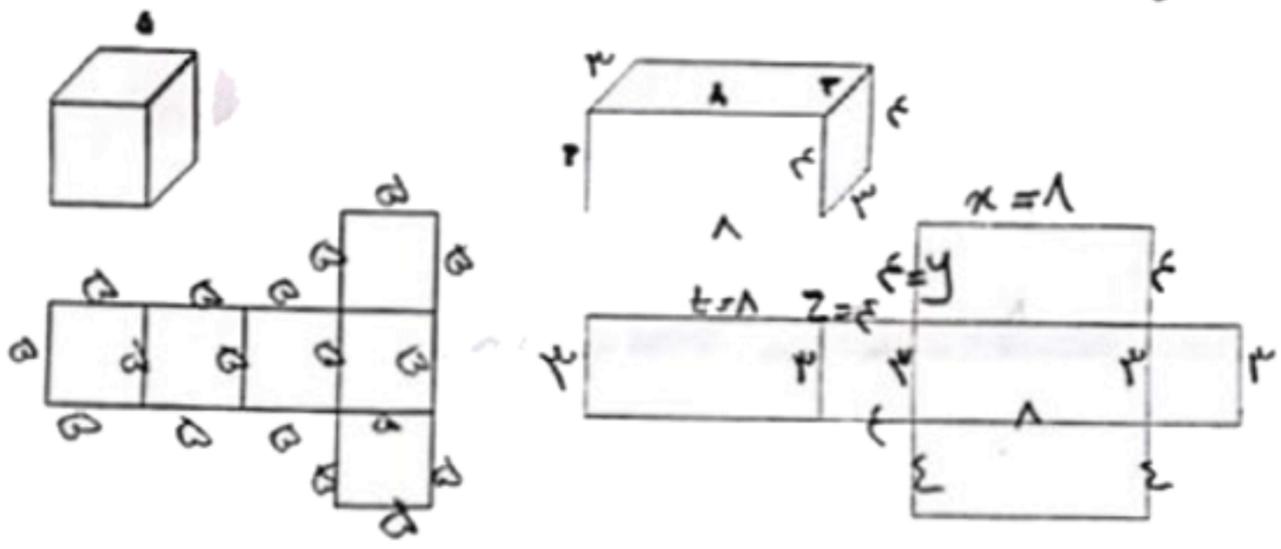
$$V = \frac{1}{3} S \cdot h =$$

$$V = \frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 2\sqrt{3}$$

$$= \frac{32\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$$

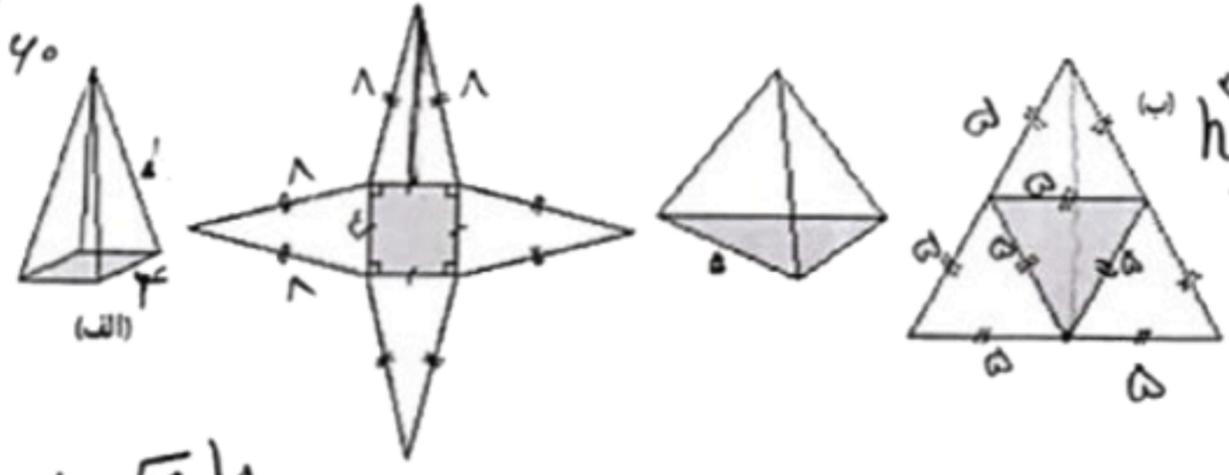
درست

۱- با توجه به اندازه‌های ابعاد مکعب و مکعب مستطیل، اندازه ضلع‌ها را در گسترده هر کدام مشخص کنید.



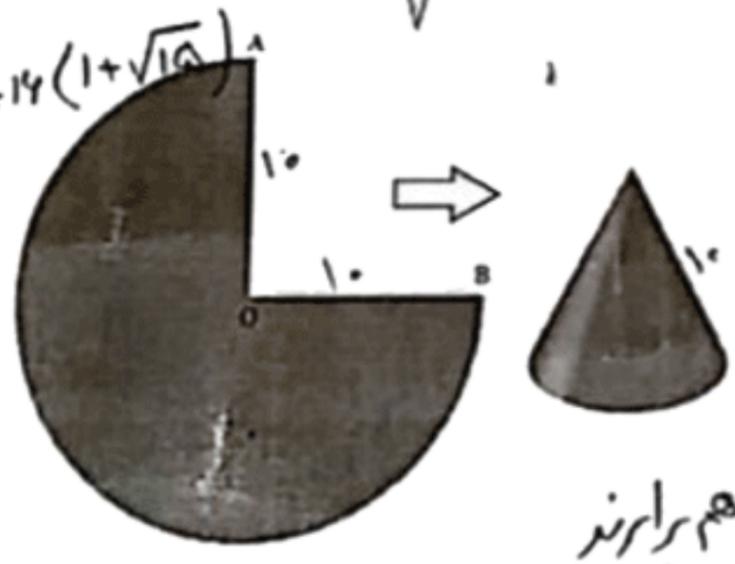
۲- مساحت گسترده هر یک از هرم‌ها را با توجه به اندازه‌های روی هر هرم محاسبه کنید.

مساحت $S = \epsilon \times \epsilon = 14$
 $h^2 = 1^2 - 2^2 = 4 - 4 = 0$
 $h = \sqrt{0} = 0$
 $S = \frac{\epsilon \times 2\sqrt{15} \times \epsilon}{2}$



$h^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75$
 $h = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$
 $S = \frac{5\sqrt{3} \times 10}{2} = 25\sqrt{3}$

$S = 14\sqrt{15}$
 $S_{total} = 14 + 14\sqrt{15} = 14(1 + \sqrt{15})$



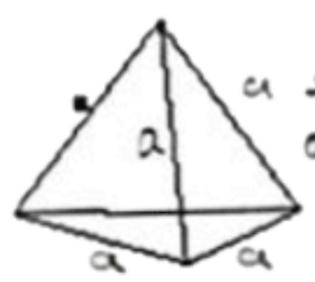
۲- $\frac{2}{3}$ دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر را برداشته‌ایم؛ با کمک آن یک سطح مخروطی شکل درست کرده‌ایم؛ طول کمان AB چقدر است؟ چه رابط‌های بین طول کمان AB و محیط دایره قاعده مخروط وجود دارد؟ شعاع قاعده مخروط را پیدا کنید. با هم برابرند

$P = 2R\pi = 2\pi \times 10 = 20\pi$

$P_{mخروط} = 5\pi$
 $5\pi = 2\pi R$
 $R = \frac{5}{2} = 2,5$

$20\pi \div 4 = 5\pi$

طول کمان AB = 5π



۱- مساحت کل هرم منتظم مقابل را به دست آورید که طول همه یال‌های آن 'a' است.
 $OH = OB - BH$

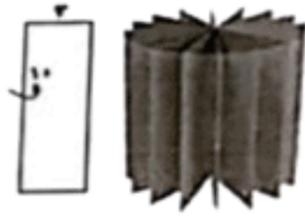


$OH^2 = (2a)^2 - a^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$
 $OH = a\sqrt{3}$
 $S = \frac{a\sqrt{3} \times 2a}{2} = a^2\sqrt{3}$

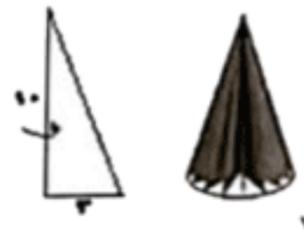
$h^2 = 20^2 - 5^2 = 400 - 25 = 375$
 $h = \sqrt{375}$



۲- با توجه به اندازه ضلع قاعده منش ضلعی منتظم و اندازه یال هرم، مساحت جانبی هرم را پیدا کنید.
 $\frac{6 \times \sqrt{375} \times 10}{2} = 30\sqrt{375} \approx 510,9$



۱- با دوران دادن یک مستطیل حول ضلع آن چه حجمی به دست می آید؟ استوانه
 شعاع قاعده شکل حاصل: r ... ارتفاع شکل حاصل: h
 ۱.۹. حجم شکل حاصل را پیدا کنید.



۲- اگر مثلث قائم الزاویه را حول ضلع مشخص شده در شکل دوران دهیم، چه شکلی به دست می آید؟ حجم آن را پیدا کنید. مخروط
 شعاع قاعده شکل حاصل: r ... ارتفاع شکل حاصل: h
 ۱.۱۰. $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

۳- در هر شکل با توجه به محور دوران، که در هر یک مشخص شده است، شکل حجم حاصل را توصیف کنید.



استوانه که در سمت راست آن مخروطی خالی شده و در سمت چپ به همان اندازه مخروطی اضافه شده

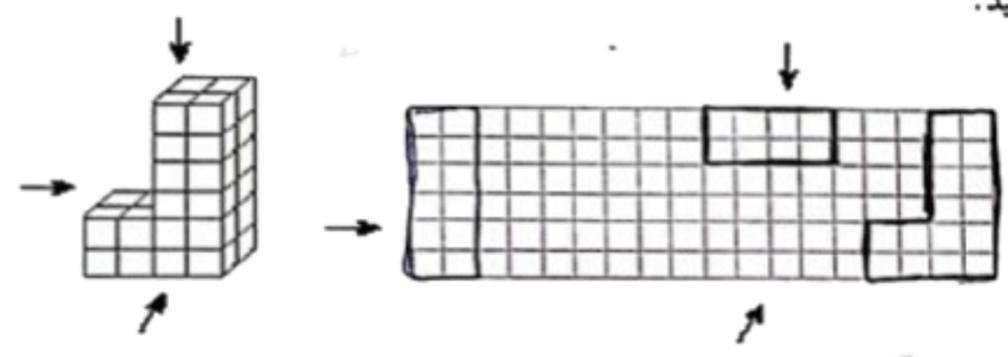
کار در کلاس

حجم حاصل از دوران یک ربع دایره به شعاع ۵cm را حول شعاع آن پیدا کنید
 شماره شکل می شود

$$\frac{1}{4} \pi R^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \pi \times 5^2 = \frac{25\pi}{8}$$

فعالیت

۱- با توجه به حجم مقابل در صفحه شطرنجی زیر سطح دیده شده از جهت های مشخص شده را رسم کنید.

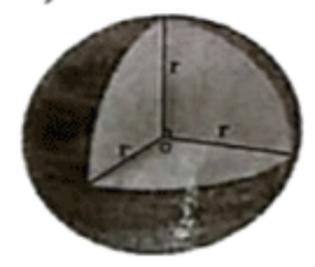


۲- اگر هر کدام از هرم های منتظم زیر را از بالا نگاه کنیم، چه شکلی دیده می شود؟

الف) هرم منتظم با قاعده منش ضلعی (ب) هرم منتظم با قاعده مربع (ج) هرم منتظم با قاعده مثلث مثلث مساوی و ارتفاع متساوی



۳- کره مقابل با یک صفحه بریده شده است. سطح بریده شده چه شکلی دارد؟ در چه صورت این شکل بیشترین مساحت را دارد؟ دایره - اگر دو نیم کره مساوی تقسیم شود

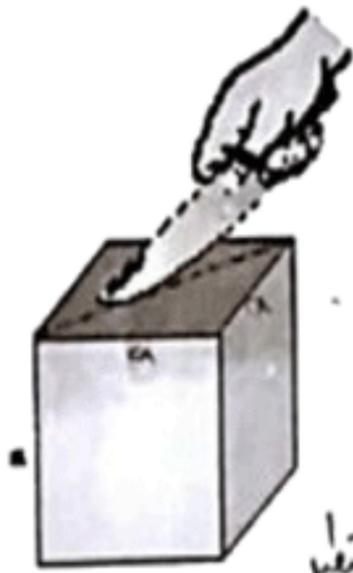


۴- در شکل مقابل، چه کسری از حجم کره برداشته شده است؟

از نیم کره با کمانه اندازه $\frac{1}{2}$ آن برداشته شده

۱۴۲ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ از کره می باشد

کار در کلاس



یک اسفنج مکعب شکل به ضلع a را مانند شکل مقابل بریده ایم. سطح بریده شده به چه شکلی متصل است؟ اندازه ضلع های آن را پیدا کنید.

$$x^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$x = a\sqrt{2} \text{ طول مستطیل}$$

$$= a \text{ عرض مستطیل}$$

تصویر

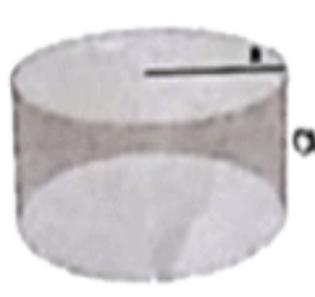
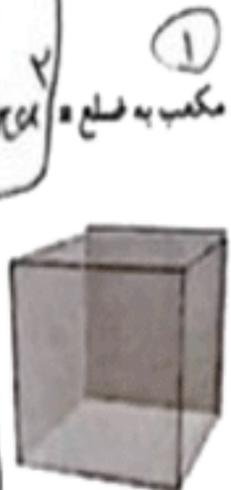
مثال سوم استوانه

مکعب به ضلع a $S = 2\pi a x a = 2\pi a^2 x$ جانبی

کل $S = 2\pi a^2$

کل $S = 2\pi a^2 + 2\pi a^2$

۱- حجم و سطح کل شکل های زیر را پیدا و باهم مقایسه کنید.



① $\frac{V}{S} = \frac{a^3}{6a^2} = \frac{a}{6}$

② $\frac{\frac{2}{3}\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{6}$

③ $\frac{\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{4}$

④ $\frac{\frac{1}{2}\pi a^3}{\frac{r}{2}\pi a^2} = \frac{a}{r}$

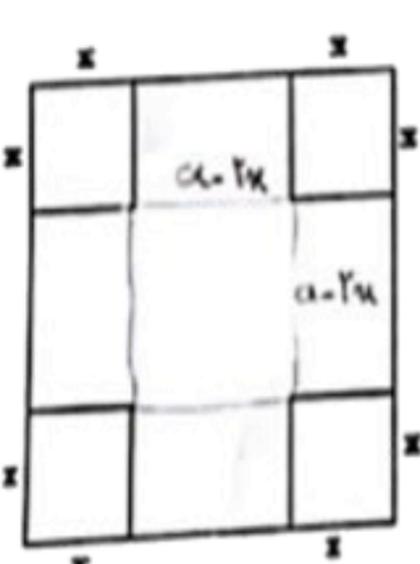
$V = a^3$
 $S = 6a^2$

$V = \frac{2}{3}\pi a^3$
 $S = 4\pi a^2$

$V = \pi a^3$
 $S = 4\pi a^2$

$V = \frac{\pi a^3}{2}$
 $S = \pi a^2 + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}$

در هر مورد، نسبت حجم به سطح ($\frac{V}{S}$) را به دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ تر است؟



شکل دوم
۲- از یک مربع متوازی به ضلع a گوشه های مربع شکل به ضلع x را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده ایم. چه رابطه ای بین a و x باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع x داخل این جعبه جای داد.

$a - 2x = 2x$
 $a = 4x$



سوال با a برابر 4 است