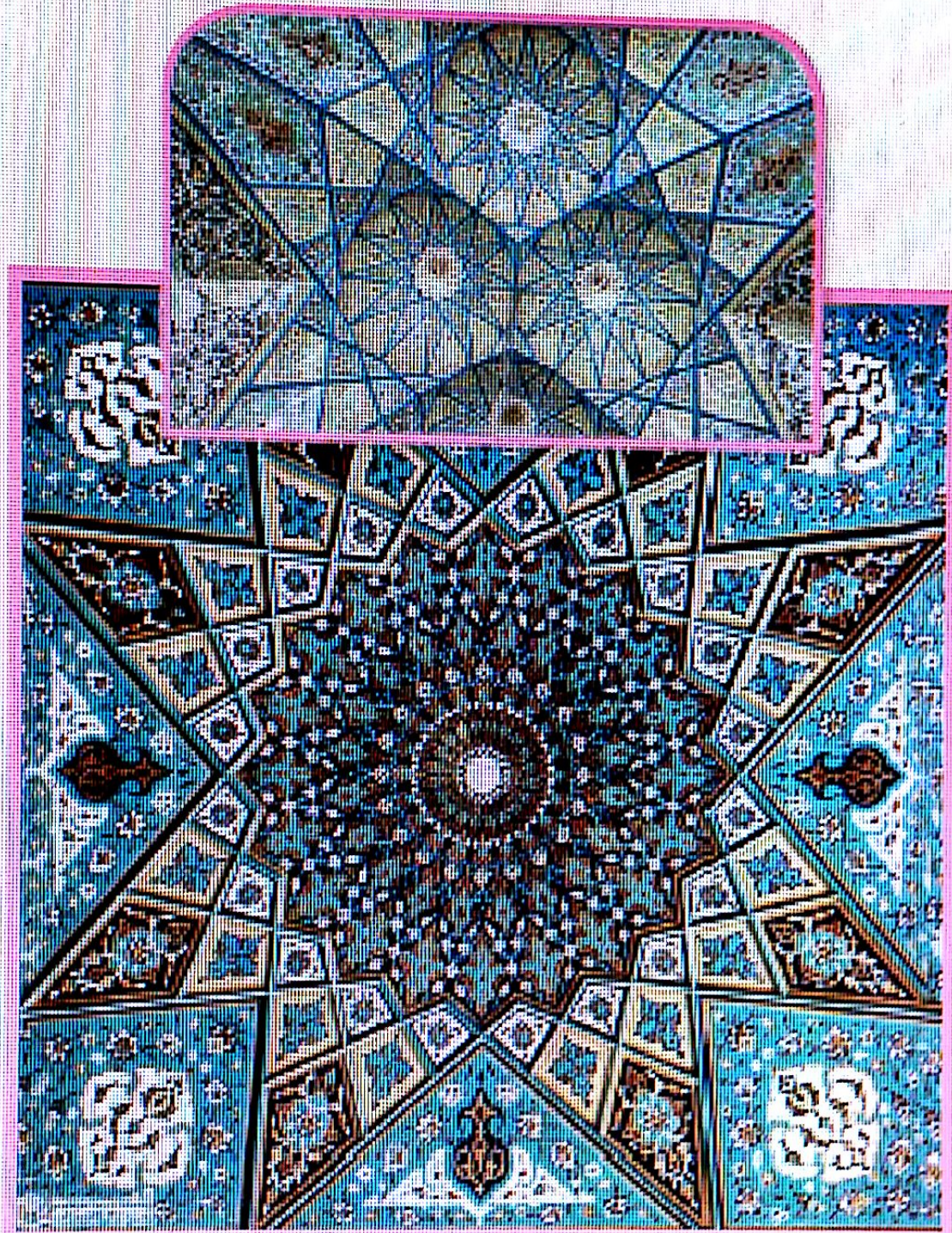


کاربرد هندسه و خط‌ها در فرش بافی، کاشی کاری، نگارگری، خطاطی، گچ‌بری، کتیبه نویسی، تذهیب و ... غیر قابل انکار، و بسیار حائز اهمیت است. از انواع خط برای ایجاد زاویه‌ها و جداسازی فضاها استفاده‌های فراوان شده است.



بخشی از سقف مسجد و درای حرم مطهر «بید الشهداء» امام حسین (ع)

درس اول: معادله خط

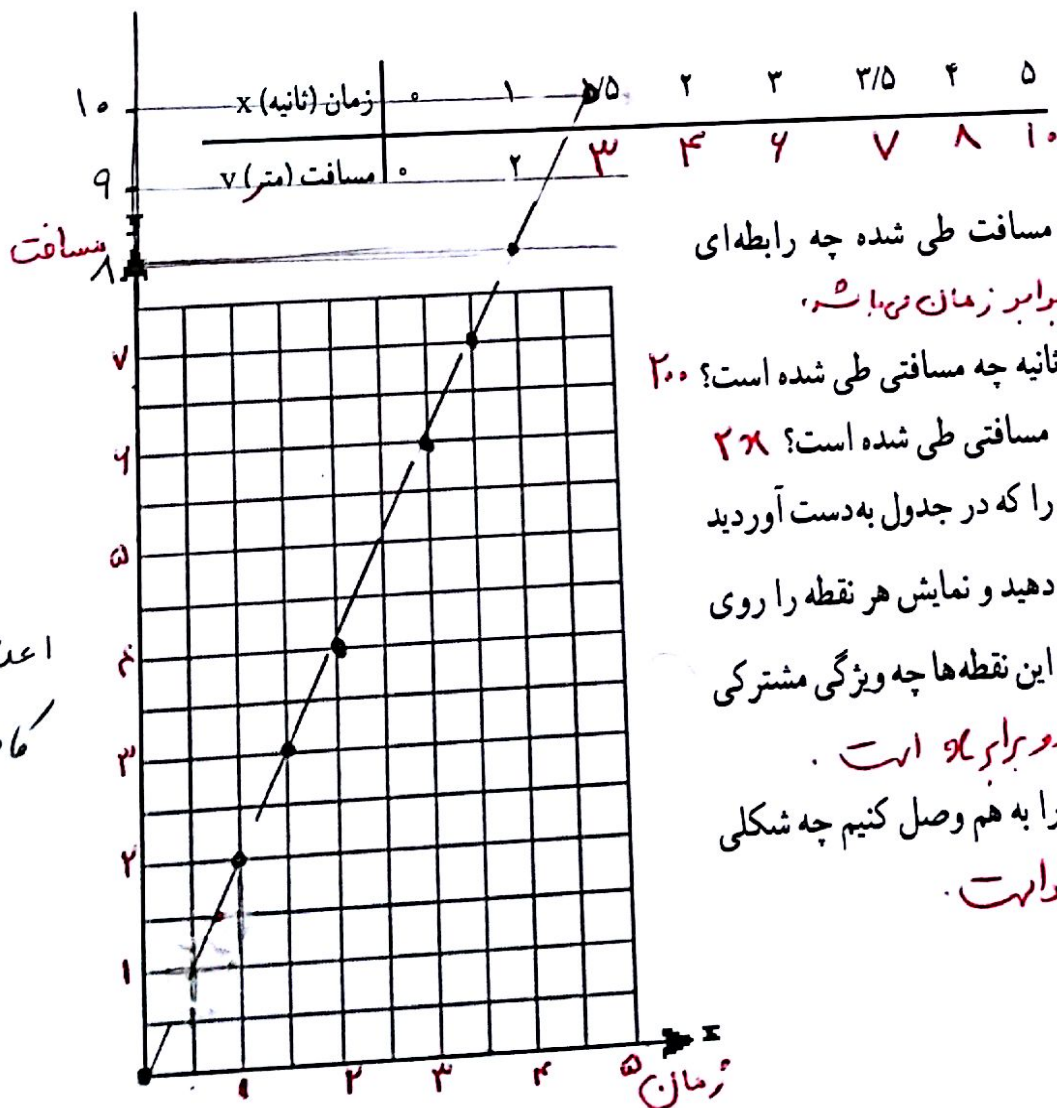


وقتی دوچرخه سواری در حال حرکت است، بین زمان و مسافت طی شده رابطه وجود دارد. بین زمان سوختن شمع و کوتاه شدن آن نیز رابطه ای دیده می شود. در الگوی عددی زیر نیز بین هر جمله و شماره آن رابطه ای هست که به صورت $n \rightarrow 2n$ نمایش داده شده است:

1	2	3	4	...	n
↓	↓	↓	↓		↓
2	4	6	8	...	2n

فعالیت

دوچرخه سواری با سرعت ثابت دو متر در ثانیه در حال حرکت است؛ یعنی در هر ثانیه دو متر را طی می کند. جدول زیر را کامل کنید.



بین زمان و مسافت طی شده چه رابطه ای هست؟ مسافت در برابر زمان می باشد.

پس از ۱۰۰ ثانیه چه مسافتی طی شده است؟ ۲۰۰

اگر x ثانیه بگذرد چه مسافتی طی شده است؟ ۲x

زوج عددهایی را که در جدول به دست آوردید

به صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نشان دهید و نمایش هر نقطه را روی

نمودار مشخص کنید؛ این نقطه ها چه ویژگی مشترکی دارند؟ در تمام نقاط دو برابر است.

اگر این نقطه ها را به هم وصل کنیم چه شکلی

به دست می آید؟ خط راست.

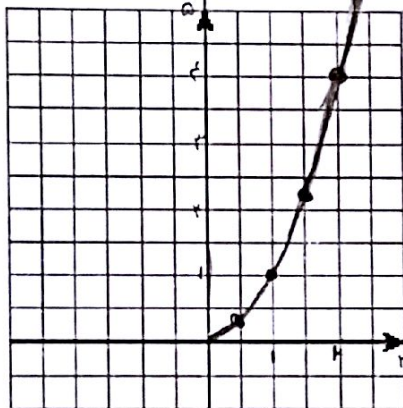
کاردر کلاس

۱- اگر طول ضلع یک مربع را با x و محیط آن را با y نشان دهیم، چه رابطه‌ای بین x و y هست؟ *ی‌چهار برابر x است*

ضلع (x)	۱	۲	۳	۴	۱۰۰	x
محیط (y)	۴	۸	۱۲	۱۶	۴۰۰	$4x$

$$y = 4x$$

۲- اگر طول ضلع یک مربع را با x و مساحت مربع را با y نشان دهیم، بین x و y چه رابطه‌ای *مساحت با مجذور x است* هست؟ پس از کامل کردن جدول زیر، هر نقطه را روی نمودار پیدا کنید.



ضلع x (سانتیمتر)	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳
مساحت y (سانتیمتر مربع)	۰	۰/۲۵	۱	۰/۲۵	۴	۶/۲۵	۹
نقطه‌ها	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/25 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/25 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2/5 \\ 4/25 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

*
محورهای مختصات
متناسب با اعداد
جدول نموده‌اش

آیا این نقطه‌ها هم روی یک خط راست قرار گرفتند؟ *نه خیر*

فعالیت

۱- معادله $y = -x + 10$ چند پاسخ دارد؟ پنج پاسخ آن را به صورت زیر بنویسید:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=9 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=9 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=10 \\ y=0 \end{cases}$$

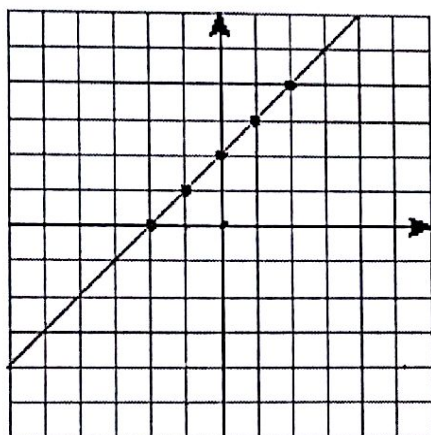
توضیح دهید چگونه پاسخ‌های مختلف این معادله را می‌توان پیدا کرد. *در هر نقطه y برابر با $-x + 10$ به اضافه ۱۰*

آیا تساوی برای $x=2$ و $y=5$ برقرار است؟ *نه خیر*

توضیح دهید چرا این تساوی معادله است و اتحاد نیست؟

چون به ازای مقادیر x تساوی برقرار است

۲- در شکل زیر نمودار یک خط داده شده است. جدول زیر را با توجه به نمودار خط کامل کنید.



x (طول نقطه)	۰	۱	-۱	۲	-۲
y (عرض نقطه)	۲	۳	۱	۴	۵
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

عرض با طول رابطه ۲ برابر است.

بین طول و عرض نقطه‌ها چه رابطه‌ای هست؟ این رابطه را به صورت یک معادله بنویسید.

$$y = x + 2$$

۳- پنج جواب برای هر یک از معادله‌های زیر بنویسید.

$$3x - 4y = 7$$

$$y = 2x - 1$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases} \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases} \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{13}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

توضیح دهید که پیدا کردن جواب در معادله سمت راست راحت‌تر و سریع‌تر است یا در معادله سمت چپ. سمت راست.

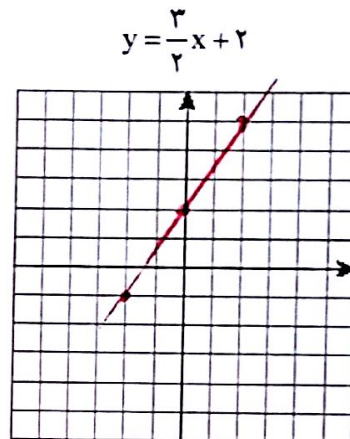
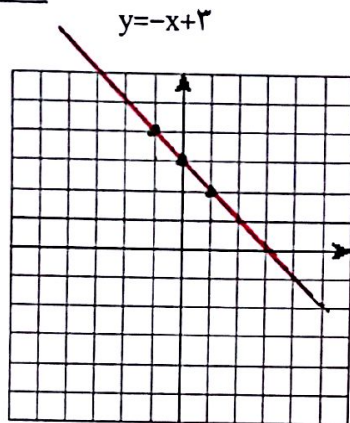
هر معادله به صورت کلی $y = ax + b$ معادله یک خط است؛ زیرا در صورتی که تمام پاسخ‌های آن معادله را به صورت نقطه روی دستگاه مختصات نمایش دهیم، شکل یک خط به دست می‌آید؛ به همین دلیل می‌گوییم x و y با هم رابطه خطی دارند. معادله بالا بیشمار جواب دارد ولی اتحاد نیست.

به عنوان مثال $x + 2$ معادله یک خط است که در آن $a = 1$ و $b = 2$ فرض شده است و نمودار آن را در بالا ملاحظه کردید.

کار در کلاس

۱- نمودار خط‌های با معادله زیر را رسم کنید.

x	۰	۱	-۱
y	۳	۲	۴
	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$



x	۰	۲	-۲
y	۲	۵	-۱
	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

۲- آیا خط $y = 3x$ از مبدأ مختصات (یعنی نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$) می‌گذرد؟ چرا؟ بله چون برای $x = 0$ هم برابر صفر است.

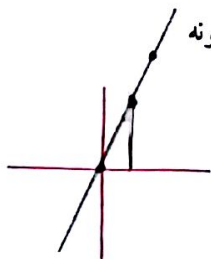
۳- اگر در معادله $y = ax$ به جای a عددهای مختلفی قرار دهیم، به‌شمار معادله خطی مانند $y = 3x$ ، $y = 2x$ ، $y = -x$ و ... به‌دست می‌آید. آیا می‌توان گفت تمام این خط‌ها از مبدأ مختصات می‌گذرند؟ بله

$y = ax$ صورت کلی معادله خط‌هایی است که از مبدأ مختصات می‌گذرند.

فعالیت

۱- در هر مورد دو نقطه از یک خط داده شده است؛ ابتدا خط را رسم کنید و سپس مانند نمونه

با توجه به مختصات هر نقطه معادله خط را حدس بزنید.



$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$y = 2x$$



$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$y = -x$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{1}{3}x$$



۲- در فعالیت ۱ برای هر مورد مختصات دو نقطه دیگر را روی هر خط به‌دست آورید.

۹۹

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۳- در قسمت (ب) کدام یک از نقطه‌ها با مختصات $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ روی خط قرار دارد؟

کار در کلاس

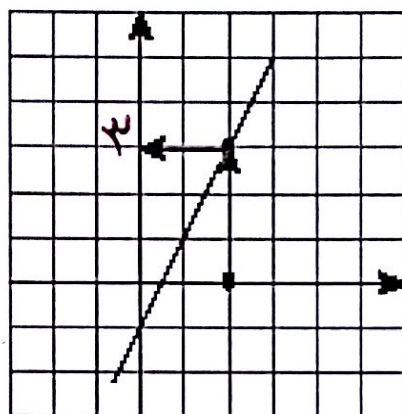
۱- مختصات نقطه‌ای به طول ۲ را روی خط $y = 2x - 1$ پیدا کنید.

با استفاده از معادله خط

$$y = 2x - 1$$

$$y = 2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

با استفاده از نمودار خط



$$-3 = -\frac{1}{2}x + 2$$

۲- مختصات نقطه‌ای به عرض ۳ را روی خط $y = -\frac{1}{2}x + 2$ پیدا کنید.

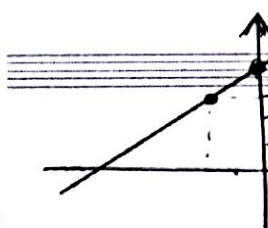
$$-\frac{1}{2}x = -3 - 2 = -5 \rightarrow$$

$$x = 10$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \times 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

۳- مختصات محل برخورد خط $y = 5x + 1$ را با محورهای مختصات پیدا کنید.

$$\begin{cases} 0 = 5x + 1 \rightarrow x = -\frac{1}{5} \\ y = 0 \end{cases}$$



تمرین

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & -2 \\ \hline y & 4 & 3 \\ \hline & \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

۱- خط به معادله $y = \frac{1}{2}x + 4$ را رسم کنید.

$$-1 \neq \frac{1}{2} \times 2 + 4 = 5$$

الف) آیا نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ روی این خط است. خیر

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ب) مختصات نقطه‌های برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

ج) نقطه‌ای از خط به طول ۱ را پیدا کنید.

$$y = \frac{1}{2}x(-1) + 4$$

$$y = -\frac{1}{2} + 4 = \frac{7}{2}$$

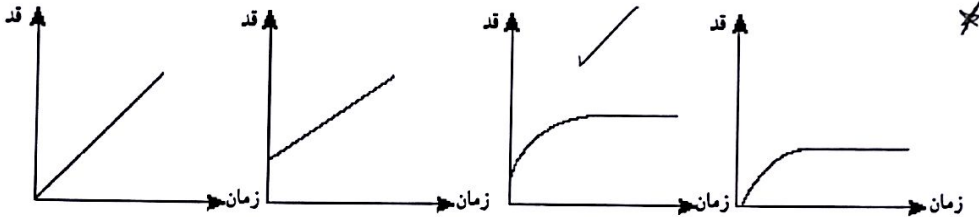
۲- طول یک فنر ۱۰ سانتیمتر است. وقتی وزنه‌ای به جرم x به آن وصل شود، طول فنر از رابطه

$y = 0.8x + 10$ پیدا می‌شود. اگر وزنه‌ای به جرم ۵ کیلوگرم به آن وصل شود، طول فنر چقدر می‌شود؟

۳- کدام یک از نمودارهای زیر رابطه رشد قد انسان را از هنگام تولد تا بزرگسالی نشان می‌دهد؟

با توجه به وضعیت‌های مختلف، نمودار آن را توصیف کنید؛ برای مثال بگویید محل برخورد نمودار

با محور y به چه معنا است. یعنی زمان تولد را چه رقم هر چه بعد از مدتی قد انسان دیگر ثابت می‌ماند و افزایش ندارد.



۴- دو نقطه از یک خط داده شده است؛ معادله خط را حدس بزنید. $y = 2x - 1$

$$y = 3x$$

الف) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$y = 3x + 1$$

قیمت بوج

۵- مختصات محل برخورد خط به معادله $y = -x + 2$ را با محورهای مختصات بیابید.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

۶- مختصات نقطه‌ای از خط به معادله $y = -\frac{3}{5}x + 4$ را بیابید که طول آن نقطه ۵ باشد.

۷- خط $y = -\frac{1}{2}x + 2$ را رسم کنید.

آیا نقطه $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد؟ نقطه‌ای به طول ۱- از این خط پیدا کنید.

نقطه‌ای به عرض ۲- از این خط پیدا کنید.

محل برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

x	۰	۲
y	۲	۱
	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$



۱۰۱

$$3 = -\frac{1}{2}x(-2) + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x(-1) + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$-2 = -\frac{1}{2}x + 2 \rightarrow \frac{1}{2}x = 2 + 2 = 4 \rightarrow x = 8$$

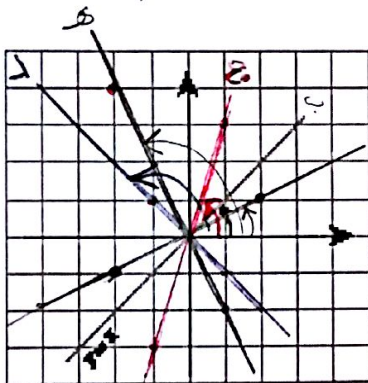
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

درس دوم: شیب خط و عرض از مبدأ

فعالیت

۱- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه محور مختصات رسم کنید؛ هر خط را با یک رنگ بکشید.

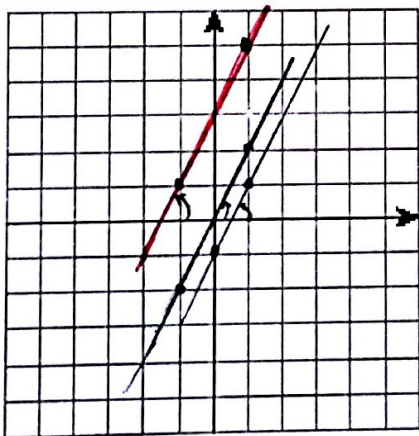
الف) $y = \frac{1}{4}x$ ب) $y = x$ ج) $y = 2x$ د) $y = -x$ هـ) $y = -2x$



در ضریب x یا زاویه α با محور x ها در رسم می‌کنند. در چیست؟ زاویه هر خط را مانند نمونه با قسمت مثبت محور x طول‌ها مشخص کنید. در خط‌های الف، ب و ج چه رابطه‌ای بین ضریب x و این زاویه وجود دارد؟ ضریب x مثبت است. زاویه درست شده زاویه تند است. خط‌های د و ه چه نوع زاویه‌ای با جهت مثبت محور x ها می‌سازد؟ زاویه باز.

۲- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید؛ هر خط را با یک رنگ بکشید.

$y = 2x - 1$, $y = 2x$, $y = 2x + 3$



در معادله این خط‌ها ضریب x برابر با ۲ است که به آن شیب خط می‌گوییم. تفاوت خط‌ها در چیست؟ زاویه خط‌ها را با محور x ها با هم مقایسه کنید؛ چرا این خط‌ها با هم موازی هستند؟ چون شیب‌ها برابر هستند. بین محل برخورد خط با محور عرض‌ها و عدد

ثابت معادله چه رابطه‌ای می‌بینید؟ در همان عدد ثابت محور عرض‌ها را قطع کرده

در معادله خط $y = ax + b$ ، عدد a ، شیب خط نامیده می‌شود. با تغییر a زاویه خط با محور طول‌ها تغییر می‌کند. عدد b نشان‌دهنده محل برخورد خط با محور عرض‌ها است؛ به همین دلیل به آن عرض از مبدأ می‌گویند.

به عنوان مثال در خط به معادله $y = -2x + 2$ ، عرض از مبدأ ۲ و شیب خط، -۲ است.

فاصله خطوط زیاد شود

۱- در هر یک از معادله‌های زیر، شیب و عرض را از مبدأ خط مشخص کنید
 عرض از مبدأ: $y = 2x - 4$ شیب: $y = -\frac{2}{3}x$ عرض از مبدأ: $y = -2x + 1$

۲- معادله خطی بنویسید که:

الف) شیب آن ۲- و عرض از مبدأ آن ۱- باشد.
 $y = -2x - 1$

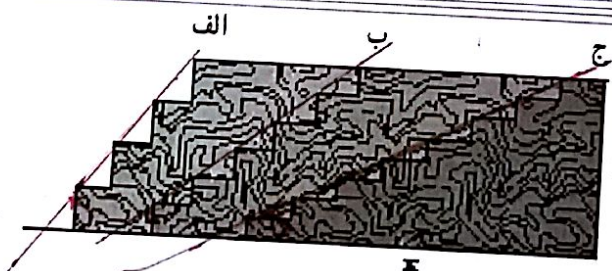
ب) شیب آن $\frac{1}{3}$ باشد و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند.
 $y = \frac{1}{3}x + 3$

ج) با خط $y = 2x + 1$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ بگذرد.
 $y = 2x + 4$

۳- معادله خطی بنویسید که شیب آن ۲ باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ بگذرد.

$y = ax + b \rightarrow y = 2x + b \rightarrow 2 = 2 \times 1 + b \rightarrow b = 0$ معادله خط $y = 2x$

فعالیت



۱- در این تصویر، سه نوع راه پله می‌بینید؛ در هر سه مورد ارتفاعی که بالا می‌روید یکسان است.

کدام راه پله شیب بیشتری دارد؟ الف

کدام یک، تعداد پله بیشتری دارد؟ ج

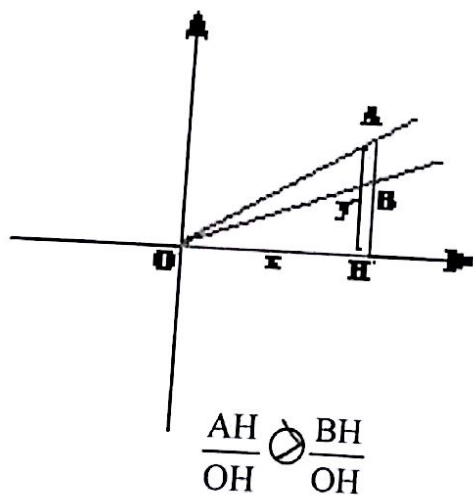
بالا رفتن از کدام یک راحت‌تر است؟ ح

۲- در محورهای مختصات مقابل، کدام خط شیب بیشتری دارد؟ A

نقطه‌های A و B طول ثابتی دارند ولی عرض آنها متفاوت است.

کدام یک از دو نسبت زیر بزرگ‌تر است؟ چرا؟

این دو نسبت چه ارتباطی با شیب خط‌ها دارد؟



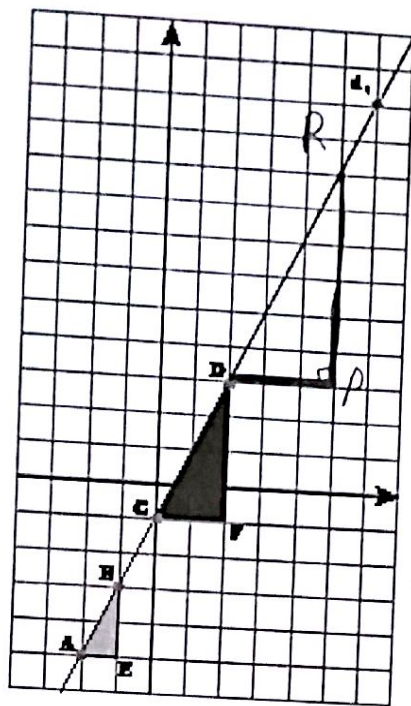
$\frac{AH}{OH} \bigcirc \frac{BH}{OH}$

۱۰۳

چون نقطه A بالا تر از نقطه B است

AH بیشتر است مقدار شیب آن خط هم بیشتر است

BH کمتر است مقدار شیب آن هم کمتر است



۳- روی خط d_1 به معادله $y = 2x - 1$ دو نقطه دلخواه مثل A و B در نظر گرفته ایم. با توجه به مثل قائم الزاویه ایجاد شده، شیب خط را به دست آورده ایم.

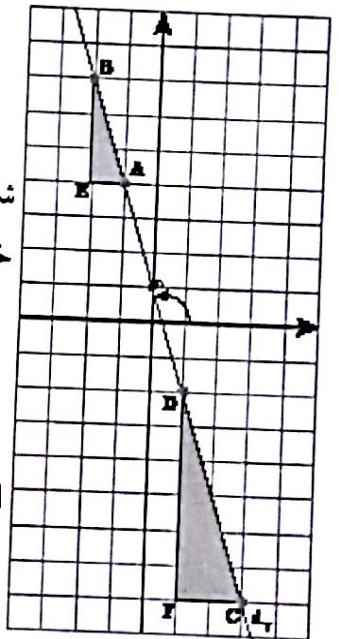
$$d_1 \text{ شیب خط} = \frac{EB}{EA} = \frac{2}{1} = 2$$

برای دو نقطه C و D نیز با توجه به مثل رسم شده، شیب خط را پیدا کنید.

$$\frac{FD}{CF} = \frac{1}{0.5} = 2$$

دو نقطه دلخواه دیگر روی خط در نظر بگیرید و با رسم یک مثل قائم الزاویه شیب خط را دوباره پیدا کنید.

$$\frac{PR}{DP} = \frac{2}{1} = 2$$



۴- خط d_2 با محور طول، زاویه بزرگ تر از 90° می سازد؛ پس شیب خط، منفی می شود. با توجه به مثل های رسم شده مقدار شیب خط d_2 را پیدا کنید.

$$d_2 \text{ شیب خط} = -\frac{EB}{EA} = -\frac{3}{1} = -3$$

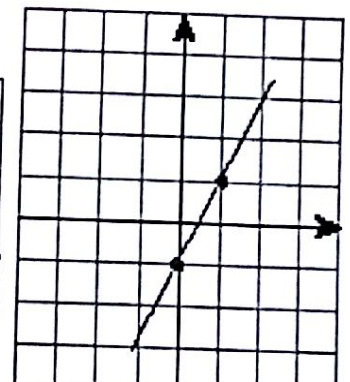
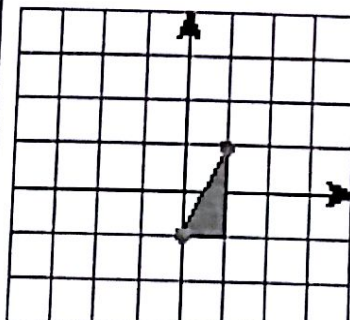
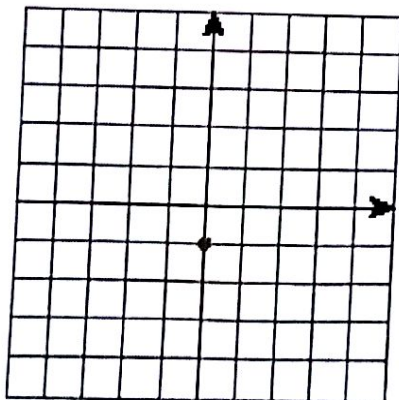
$$-\frac{FD}{FC} = -\frac{3}{1} = -3$$

خط d_2 محور عرض ها را در نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ قطع کرده است یا عرض از مبدأ آن ۱ است. معادله خط d_2 را بنویسید.

$$y = -3x + 1$$

۵- با توجه به این بیان از شیب خط در زیر مراحل رسم معادله خط

$y = 2x - 1$ با روش دیگری مشخص شده است؛ این روش را توضیح دهید. $y = 2x - 1$ رسم می باشد.



(۱) خط از این نقطه می گذرد. (۲) با توجه به مقدار شیب نقطه دیگر پیدا می شود. (۳) با داشتن دو نقطه خط رسم می شود.

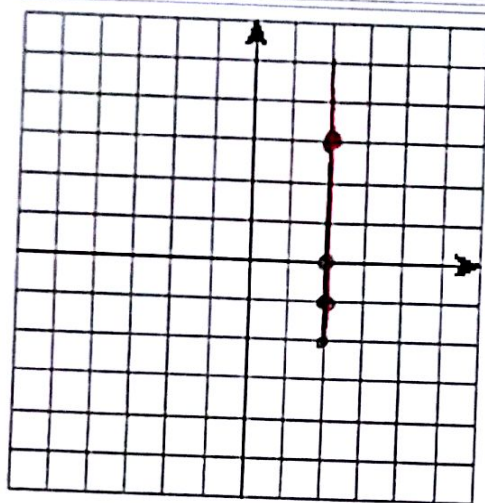
۱۰۴

(۱) عرض از مبدأ مشخص می کند

(۲) شیب خط مشخص می شود و نقطه بدست می آید.

۳- دو نقطه بدست آمده را به هم وصل و امتداد می دهیم تا خط بدست آید.

فعالیت



۱- نقطه‌های $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ را در دستگاه

مختصات نشان دهید و خطی را رسم کنید که از این دو نقطه می‌گذرد.

روی خط، دو نقطه انتخاب کنید و مختصات

آنها را بنویسید. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

اگر نقطه دیگری روی این خط در نظر بگیریم،

طول آن برابر است با: ۲ خواهد بود.

یک نقطه دلخواه به طول ۲ بنویسید و روی محور مختصات نشان دهید: $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

تمام نقطه‌ها به طول ۲ روی خط بالا قرار می‌گیرد و معادله آن به صورت $x=2$ است.

۲- صورت کلی معادله‌های خطی به صورت $ax+by=c$ است.

الف) با توجه به مقدارهای نوشته شده، معادله خط را بنویسید؛ کدام خط از مبدأ می‌گذرد؟ خط دوم چون عرض

$$a=2, b=3, c=4 \rightarrow 2x+3y=4 \quad \text{از مبدأ آن صفر است.}$$

$$a=-1, b=2, c=0 \rightarrow -x+2y=0$$

ب) با توجه به خط‌های داده شده، مقدارهای a, b و c را پیدا کنید.

$$-3x+2y=2 \rightarrow a=-3, b=2, c=2$$

$$y-2x=1 \quad 2x-y=-1 \quad y=2x+1 \rightarrow a=2, b=-1, c=1 \quad \text{یا} \quad a=-2, b=1, c=+1$$

ج) برای خط $x=2$ مقدارهای a, b و c را بنویسید.

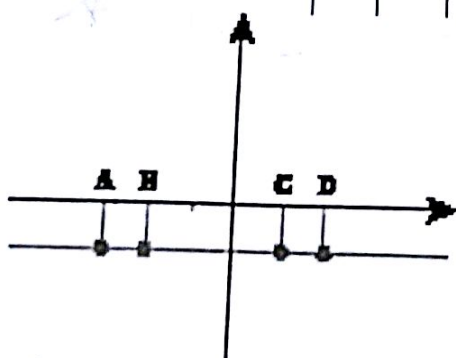
$$a=1$$

$$b=0$$

$$c=2$$

$$ax+by=c \rightarrow x=2$$

۳- مختصات نقطه‌های مشخص شده را روی خط



$$A = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

این نقطه ها چه ویژگی مشترکی دارند؟ دارای عرض یک هستند
معادله خط رسم شده را بنویسید. $y = -1$

در فرم کلی معادله های خطی به جای a , b و c چه عدد هایی قرار دهیم تا معادله خط رسم شده به دست آید؟

$$ax + by = c$$

\downarrow شیب \downarrow عرض \downarrow -1
 \downarrow صفر \downarrow 1 \downarrow -1

۴- مانند نمونه برای خط های داده شده شیب و عرض از مبدأ را پیدا کنید.



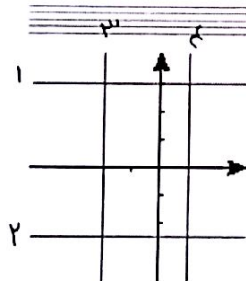
عرض از مبدأ شیب
 \downarrow \downarrow

$$2y - 4x = 8 \rightarrow 2y = 4x + 8 \rightarrow y = \frac{4}{2}x + \frac{8}{2} \rightarrow y = 2x + 4$$

$$2x - 2y = 6 \rightarrow -2y = -2x + 6 \rightarrow y = \frac{-2}{-2}x + \frac{6}{-2} \rightarrow y = \frac{1}{1}x - 3$$

$$x + 2y - 9 = 0 \rightarrow 2y = -x + 9 \rightarrow y = \frac{-1}{2}x + \frac{9}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

کار در کلاس



۱- معادله های خط های رسم شده را در دستگاه مختصات مقابل کنار هر کدام بنویسید.

$1 \rightarrow y = 3$
 $2 \rightarrow y = -3$
 $3 \rightarrow x = 1$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

۲- از برخورد دو خط $x=1$ و $y=-3$ کدام نقطه به دست می آید؟

۳- معادله خطی بنویسید که موازی محور x ها باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ بگذرد.

$$y = 1$$

تمرین

۱- خط های به معادله $x=-2$ و $y=3$ را رسم و مختصات محل برخورد آنها را پیدا کنید. زاویه

بین این دو خط چند درجه است؟ 90° درجه

۲- معادله محور طول ها و محور عرض ها را بنویسید؛ محل برخورد آنها چه نقطه ای است؟

۳- شیب و عرض از مبدأ خط های زیر را پیدا و سپس آن خط ها را رسم کنید.

$$y = 0 \rightarrow \text{محور طول}$$

$$x = 0 \rightarrow \text{محور عرض}$$

$$\text{محل برخورد} = 0$$

$$2y - 2x = 6 \rightarrow y = \frac{2}{2}x + \frac{6}{2} \rightarrow y = x + 3$$

$$4x - 2y = 8$$

$$-2y = -4x + 8$$

$$y = \frac{-4}{-2}x + \frac{8}{-2} \rightarrow y = 2x - 4$$

$$y = 2x - 4$$

$$2x - y = 3$$

$$-y = -2x + 3$$

$$y = 2x - 3$$

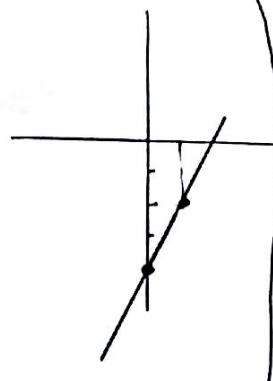
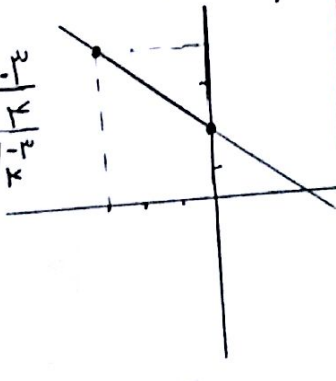
$$y = 2x - 3$$

$$y = 2x - 3$$

$$y = 2x - 3$$

$$y = 2x - 3$$

x	0	-3
y	2	3
	$ \frac{0}{2} $	$ \frac{-3}{3} $



$$106$$

$$-y = -2x + 3$$

$$y = 2x - 3$$

$$y = 2x - 3$$

$$y = 2x - 3$$

$$y = 2x - 3$$

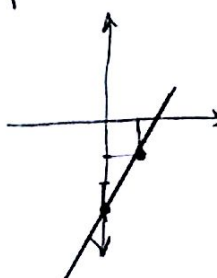
$$y = 2x - 3$$

$$y = 2x - 3$$

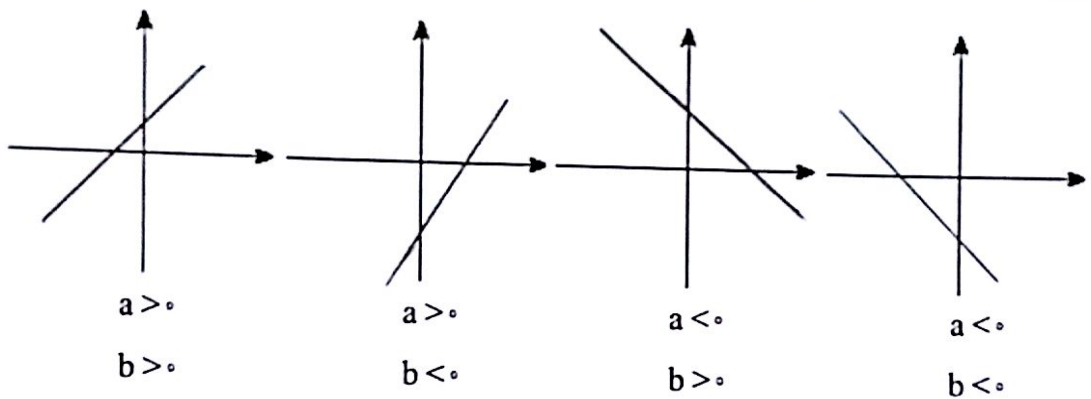
$$y = 2x - 3$$

$$y = 2x - 3$$

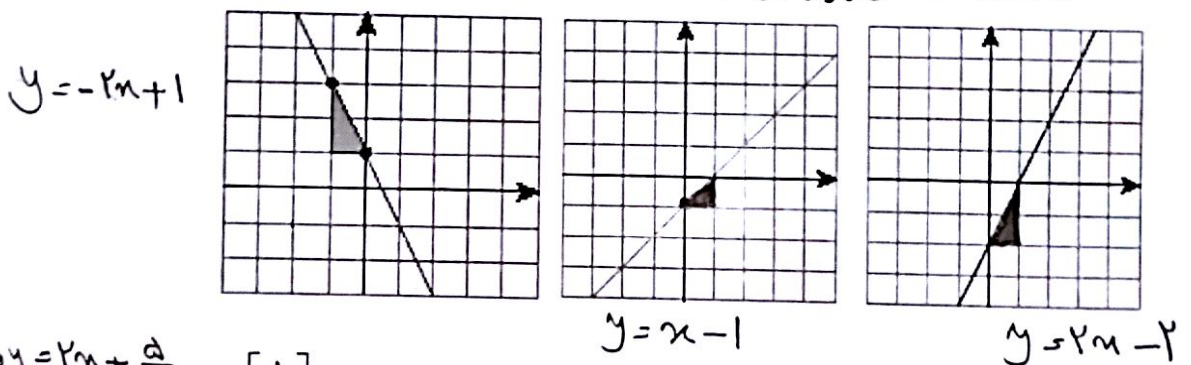
$$y = 2x - 3$$



سوال ۴- خط $y=ax+b$ را در نظر بگیرید. در هر یک از حالت های مورد نظر، خط را مانند نمونه در دستگاه مختصات رسم کنید.



۵- معادله خط های زیر را بنویسید.



$$2y = 4x + 5 \Rightarrow y = 2x + \frac{5}{2}$$

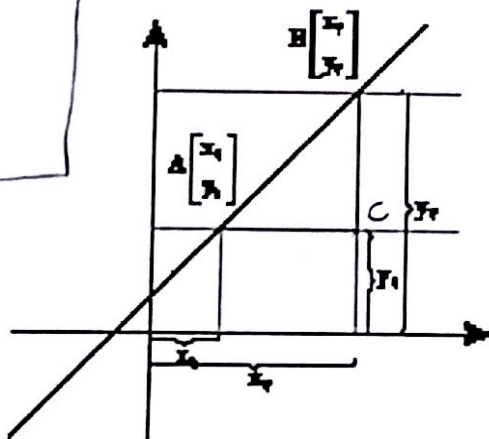
$$y = 2x + b \xrightarrow{1-1} -1 = 2x + b$$

$$b = -1 - 2 = -3$$

$$y = 2x - 3$$

۶- معادله خطی بنویسید که با خط $2y - 4x = 5$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ بگذرد.

۷- با توجه به شکل مقابل نشان دهید.



$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{شیب خط} = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

۸- دو نقطه از یک خط هستند؛ شیب خط را پیدا کنید و معادله خط را بنویسید.

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{شیب} = \frac{2 - (-1)}{3 - 4} = \frac{3}{-1} = -3$$

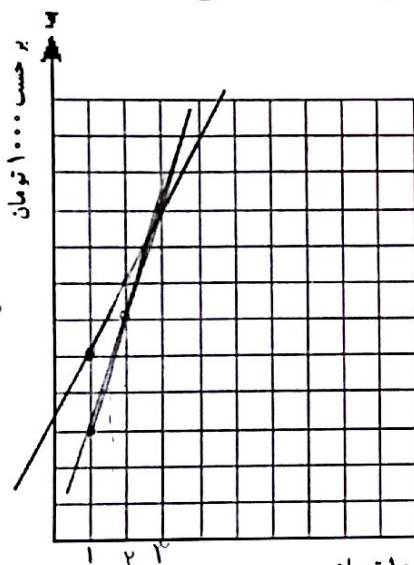
$$1.7 \quad y = -3x + b$$

$$\xrightarrow{1.7} 2 = -3 \times 3 + b \rightarrow 2 + 9 = b \rightarrow b = 11$$

فعالیت

۱- هزینه اشتراک یک خط اینترنت روی تلفن همراه ۳۰۰۰ تومان مبلغ ثابت و ۲۰۰۰ تومان برای هر ساعت استفاده است. هزینه کلی x ساعت استفاده از اینترنت را با y نشان دهید و رابطه‌ای بین y و x بنویسید.

$$y = 2000x + 3000$$



واحد های محور در دست
من با ۸

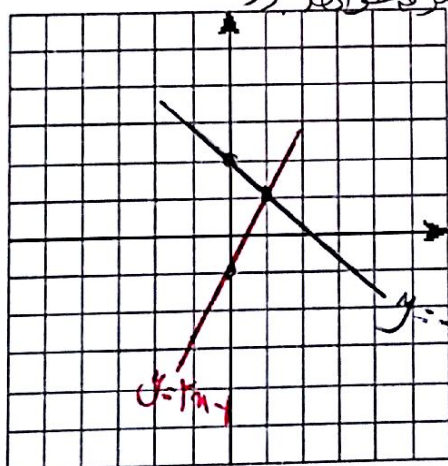
یک نوع دیگر از اشتراک اینترنت بدون مبلغ ثابت است؛ ولی برای هر ساعت استفاده، ۳۰۰۰ تومان هزینه دارد. رابطه‌ای بین هزینه اشتراک (y) و x ساعت استفاده از اینترنت را در این حالت بنویسید.

$$y = 3000x$$

دو خط به معادله‌های فوق را در دستگاه مختصات مقابل رسم کنید. محل برخورد این دو خط چه ویژگی‌ای دارد؟ برای $1/5$ ساعت استفاده، کدام نوع اشتراک بهتر است؟ بعد از چند ساعت استفاده از اینترنت، اشتراک نوع اول به صرفه خواهد بود؟

برای استفاده ۳ ساعت اشتراک هزینه هر خط ۱۰۰۰ تومان

نوع برابر است ۹ پس از ۳ ساعت ۲ بعد از ۱ اول به صرفه خواهد بود



آن را رسم کنید. شمار

معادله $y = -x + 2$ چند جواب دارد؟ شمار

نمودار آن را رسم کنید. توضیح دهید چگونه

یک جواب مشترک برای این دو معادله پیدا می‌کنید.

$$y = x + 2$$

محل برخورد دو خط جواب

مشترک برای دو معادله است

کار در کلاس

با رسم خط‌ها، دستگاه معادله‌های خطی زیر را حل کنید؛ یعنی یک جواب مشترک برای دو

معادله پیدا کنید.

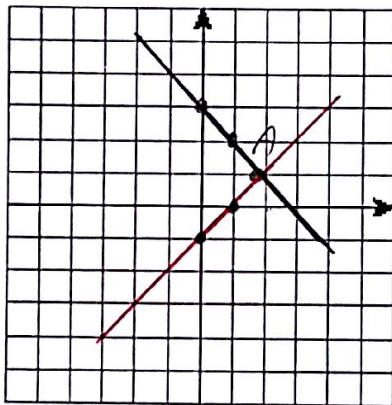
$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \rightarrow y = x - 1 \\ x + y = 3 \rightarrow y = -x + 3 \end{cases}$$

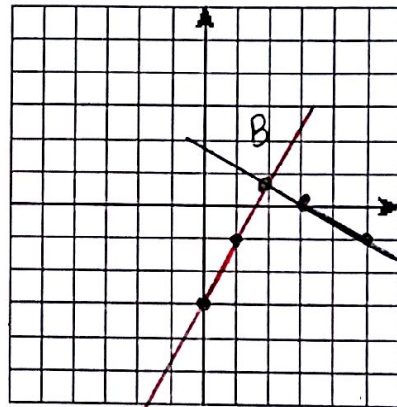
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \rightarrow y = 2x - 3 \\ x + 2y = 3 \rightarrow y = \frac{-x}{2} + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & -3 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 3 & 2 \end{array}$$



$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

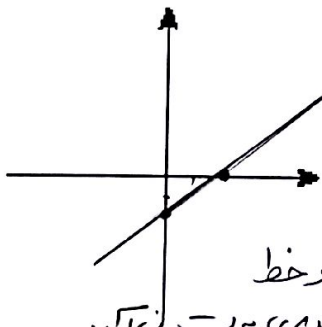


$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 5 & 3 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$$

فعالیت

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}$$



۱- خط $2x - 3y = 4$ را رسم کنید. خط به معادله $4x - 6y = 8$

که در آن تمام عددهای معادله بالا دو برابر شده است را رسم کنید.

الف) آیا خط جدیدی به دست آمد؟ خیر

ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر تمام ضرایب‌های عددی یک معادله

خط را در یک عدد ضرب کنیم دو خط برهم منطبق خواهند بود و خط

ج) آیا می‌توان گفت این دستگاه معادله خطی بی‌شمار جواب جدید دارد؟ نه! درست است.

دارد؟ چرا؟ بله. چون دو خط برهم منطبق شده و بی‌شمار

نقطه مشترک خواهند داشت.

۲- به مثال های زیر توجه کنید :



$$\begin{array}{l} 2=2 \\ 2+5=5 \\ 7=7 \end{array} \quad \text{الف)}$$

$$\begin{array}{l} x=x \\ x+2x=2x \\ 3x=3x \end{array} \quad \text{ب)}$$

ج)

از این مثال چه نتیجه ای می گیرید؟ اگر دو طرف دو تساوی را با هم جمع کنیم، باز یک تساوی خواهیم داشت.

۳- با توجه به نتیجه هایی که از سوال های بالا گرفتید، توضیح دهید که چگونه دستگاه معادله های

زیر حل شده است. در هر قسمت مشخص کنید از کدام نتیجه استفاده شده است:

با جمع طرفین یکی از

مجهولات حذف می شوند

و تساوی هم برقرار است

و یکی از مجهولات محاسب می شود

پس با جایگذاری مجهول دوم

جواب دستگاه نیز بدست می آید.

$$\begin{array}{l} \text{الف)} \quad \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=3 \end{cases} \\ \hline 2x=4 \\ x=2 \end{array}$$

$$x+y=3 \quad \text{و} \quad x=2$$

$$2+y=3 \rightarrow y=1$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{ب)} \quad \begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-2y=6 \\ x+2y=4 \end{cases} \\ \hline 5x=10 \\ x=2 \end{array}$$

$$x+2y=4 \quad \text{و} \quad x=2$$

$$2+2y=4$$

$$2y=2 \rightarrow y=1$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{جواب دستگاه}$$

با ضرب عدد در طرفین تساوی یکی از ضرایب برابر می شود

و با جمع طرفین یکی از مجهولات

حذف می شود و مانند قسمت

الف حل می شود.

یکی از راه های حل کردن دستگاه معادله های خطی، حذف کردن x یا y است تا به یک معادله یک مجهولی برسیم؛ نام این روش، حذفی است.

کاردر کلاس

دستگاه های معادله های خطی زیر را حل کنید.

۱) طرف دوم مشخص نیست

در معادله اول

$$\begin{cases} x-y= \\ 4x+2y=6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 2) \quad \begin{cases} 3x-5y=1 \\ 2x+3y=7 \end{cases} \\ 3) \quad \begin{cases} 3x+2y=50 \\ 2x+2y=35 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -4x+10y=-2 \\ 4x+9y=21 \\ \hline 19y=19 \end{array}$$

$$y=\frac{19}{19}=1$$

$$3x-5 \times 1=1 \quad \text{ج} \quad | \times 2$$

$$3x=5+1=6$$

$$x=\frac{6}{3}=2$$

$$\begin{array}{l} -1) \quad \begin{cases} 3x+2y=50 \\ 2x+2y=35 \end{cases} \\ \hline -3x-2y=-50 \\ 2x+2y=35 \\ \hline -x=-15 \rightarrow x=15 \end{array}$$

$$3 \times 15 + 2y = 50$$

$$2y = 50 - 45 = 5$$

$$y = \frac{5}{2}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 5 \\ \hline 2 \end{array} \quad \text{ج}$$

۱- دستگاه معادله های خطی زیر را به روش دیگری نیز می توان حل کرد.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \Rightarrow 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{1}$$

(راهنمایی: هدف این است که به یک معادله یک مجهولی برسیم؛ بنابراین مقدار y را از معادله

پایین در معادله بالا قرار دهید تا یک معادله یک مجهولی به دست آید؛ نام این روش، جایگزینی است).

$$2x - 3\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 5 \rightarrow 2x - x + 2 = 5 \rightarrow x = 5 - 2 = 3$$

نقشه بالا

۲- «طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن ۳ سانتیمتر کمتر است. اگر محیط مستطیل

۲۴ سانتیمتر باشد، طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.» این مسئله توسط سه دانش آموز حل شده

است. روش های هر کدام را توضیح دهید و کامل کنید.

روش ۱: $2x - 3$: طول مستطیل و x : عرض مستطیل

$$محیط = 2(x + 2x - 3) = 24$$

$$3x - 3 = 12 \rightarrow 3x = 15 \rightarrow x = 5 \text{ و } طول = 2 \times 5 - 3 = 7$$

روش ۲:

y : طول مستطیل و x : عرض مستطیل

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2(x + y) = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + 2y = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -y - 2y = 3 - 24 \\ -3y = -21 \end{cases} \rightarrow y = 7$$

با نوشتن دو معادله خطی و حل دستگاه های معادله های خطی به روش حذفی محاسبه

روش ۳: $y = 2x - 3 \rightarrow 7 = 2x - 3 \rightarrow 2x = 7 + 3 \rightarrow x = 5$

y : طول مستطیل و x : عرض مستطیل

$$y = 2x - 3$$

$$2(x + y) = 24 \rightarrow 2(x + 2x - 3) = 24$$

طول را بر حسب عرض نوشته و سپس

جایگزینی کرده به روش جایگزینی حل کرده اند.

بین روش های اول و سوم چه شباهتی هست؟

هر دو از روش جایگزینی استفاده کرده اند

بیشتر مربع و ۶۰٪

پاسخ ص ۱۱۲

سوال ۵

$$\begin{cases} -2x \begin{cases} x+y=20 \\ 4x+2y=54 \end{cases} \\ \begin{cases} -2x-2y=-40 \\ 4x+2y=54 \end{cases} \\ \hline 2x=14 \\ x=7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x+y &= 20 \\ y &= 20-7=13 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -2x \begin{cases} 2x-3y=7 \\ 4x-4y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} -4x+6y=14 \\ 4x-4y=5 \end{cases} \\ \hline \end{cases}$$

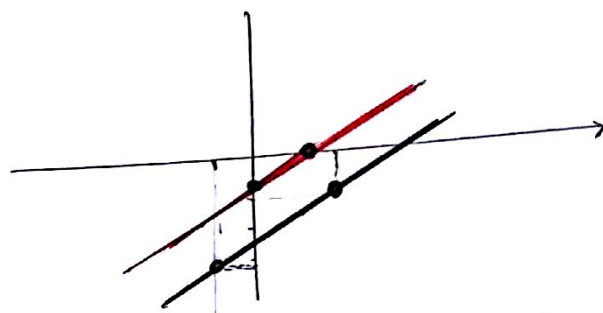
سوال ۶ معادله جواب ندارد.

$$2x-3y=7$$

x	-1	2
y	-3	-1
	-1	2
	-3	-1

$$4x-4y=5$$

x	0	$\frac{5}{4}$
y	$-\frac{5}{4}$	0
	0	$\frac{5}{4}$
	$-\frac{5}{4}$	0



دو خط باهم موازیند و محل برخورد ندارند

$$2x-3y=7 \rightarrow -3y=-2x+7 \rightarrow y=\frac{-2}{-3}x+\frac{7}{-3} \Rightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$$

$$4x-4y=5 \rightarrow -4y=-4x+5 \rightarrow y=\frac{-4}{-4}x+\frac{5}{-4} \Rightarrow y=\frac{4}{4}x-\frac{5}{4}$$

$$y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$$

شیب خطها برابرند پس خطوط موازیند و همديگر را قطع نميکنند

در نتیجه معادله جواب ندارد

$$\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ x = 2 \end{cases}$$

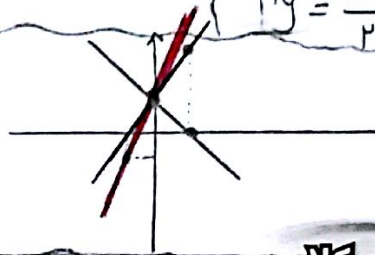
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ y = 4 - x \end{cases} \Rightarrow y = 2$$

$$\begin{cases} 2x - 7 - 2 = 0 \rightarrow 2x = 9 \rightarrow x = \frac{9}{2} \\ x + y - 1 = 0 \rightarrow \frac{9}{2} + y - 1 = 0 \rightarrow y = 1 - \frac{9}{2} \\ y = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x + 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$$



سوال ۴

هر سه خط یک جواب مشترک دارند

کار در کلاس

$$2x - 7y = 15 \Rightarrow 2(2y + 7) - 7y = 15 \rightarrow 4y + 14 - 7y = 15 \rightarrow -3y = 1 \rightarrow y = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x - 3y = 7 \rightarrow x = 3y + 7 \\ 2x - 7y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 7 \\ 2(3y + 7) - 7y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 7 \\ 6y + 14 - 7y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 7 \\ -y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \rightarrow y = 2x - 6 \\ 2x + \frac{1}{3}y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 6 \\ 2x + \frac{1}{3}(2x - 6) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 6 \\ 2x + \frac{2}{3}x - 2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 6 \\ \frac{8}{3}x = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 6 \\ x = \frac{15}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + 4y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5y = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ y = \frac{18}{5} \end{cases}$$

۱- دستگاه‌های زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x - 1 - \frac{y - 1}{3} = \frac{1}{6} \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 - \frac{y - 1}{3} = \frac{1}{6} \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 - \frac{y - 1}{3} = \frac{1}{6} \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 - \frac{y - 1}{3} = \frac{1}{6} \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 - \frac{y - 1}{3} = \frac{1}{6} \\ x + y = 4 \end{cases}$$

دو عدد توان از بار یا به هر دو عدد ۲۰ یک جواب برای x و y طوری تعیین کنید که تساوی زیر برقرار باشد.

$$2x - 7 - 2 = 3x + y - 1 \Rightarrow 2x - 9 = 3x + y - 1 \Rightarrow -x - y = 8 \Rightarrow x + y = -8$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

۵- در یک مزرعه، ۲۰ شترمرغ و گاو وجود دارد. پاهای آنها ۵۶ عدد است. در این مزرعه، چند شترمرغ و چند گاو وجود دارد؟ (شترمرغ ۲ پا و گاو ۴ پا دارد)

پاسخ در صفحه قبل

۶- دستگاه معادله خطی زیر را از دو روش حذفی و ترسیمی حل کنید.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$$

آیا این دستگاه جواب دارد؟

شیب هر دو خط را به دست آورید. توضیح دهید چرا نقطه مشترکی به عنوان جواب معادله به دست نمی‌آید.

۷- مجموع سن علی و پدرش ۷۰ سال و اختلاف آنها ۲۶ سال است. سن هر یک را با تشکیل دستگاه معادلات به دست آورید.

$$x = \text{سن علی}$$

$$y = \text{سن پدر}$$

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ y - x = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 70 \\ 2y = 96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 70 \\ y = 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ x = 70 - 48 = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 70 \\ x = 22 \end{cases}$$

$$y = 48$$